H.S.M. COXETER

Fundamentos de GEOMETRIA

www.telocompro.es

LIMUSA

FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA

OBSEQUIO DE LA
MISION ECONOMICA
DE LOS EE.UU. EN CHILE

LIMUSA
WILEY

Contenido

PARTE I

1 TRIANGULOS 25

1.1 Euclides, 25
1.2 Conceptos primitivos y axiomas, 26
1.3 *Pons asinorum*, 28
1.4 Las medianas y el centroide, 32
1.5 El incírculo y el circuncírculo, 33
1.6 La recta de Euler y el ortocentro, 40
1.7 La circunferencia de los nueve puntos, 41
1.8 Dos problemas extremos, 43
1.9 El teorema de Morley, 47

2 POLIGONOS REGULARES 51

2.1 Ciclotomía, 51
2.2 La trisección de un ángulo, 53
2.3 Isometría, 54
2.4 Simetría, 55
2.5 Grupos, 57
2.6 El producto de dos reflexiones, 58
2.7 El kaleidoscopio, 60
2.8 Polígonos en forma de estrella, 62

3 ISOMETRIA EN EL PLANO EUCLIDIANO 65

3.1 Isometrías directas y opuestas, 65
3.2 Traslación, 68
3.3 Reflexión en deslizamiento, 69
3.4 Reflexiones y semigiros, 72
3.5 Resumen de los resultados acerca de isometrías, 72
3.6 Teorema de Hjelmslev, 73
3.7 Diseños en una franja, 74

4 CRISTALOGRAFIA BIDIMENSIONAL 77

4.1 Las celosías y sus regiones de Dirichlet, 77
4.2 El grupo de simetría de celosía general, 82
4.3 El arte de M. C. Escher, 84
4.4 Seis diseños de ladrillos, 86
4.5 La restricción cristalográfica, 88
4.6 Mosaicos regulares, 89
4.7 El problema de los puntos colineales de Sylvester, 93

5 LA SEMEJANZA EN EL PLANO EUCLIDIANO 95

5.1 Dilatación, 95
5.2 Centros de similitud, 98
5.3 El centro de los nueve puntos, 99
5.4 El punto invariante de una semejanza,. 100
5.5 Semejanza directa, 103
5.6 Semejanza opuesta, 103

6 CIRCULOS Y ESFERAS 105

6.1 La inversión en un círculo, 105
6.2 Círculos ortogonales, 107
6.3 Inversión de rectas y círculos, 108
6.4 El plano inversivo, 111
6.5 Círculos coaxiales, 113
6.6 El círculo de Apolonio, 117
6.7 Transformaciones que preservan el círculo, 119
6.8 La inversión en una esfera, 120
6.9 El plano elíptico, 121

7 ISOMETRIA Y SEMEJANZA EN EL ESPACIO EUCLIDIANO 125

7.1 Isometrías directas y opuestas, 125
7.2 La inversión central, 127
7.3 Rotación y traslación, 128
7.4 El producto de tres reflexiones, 128
7.5 Torcedura, 129
7.6 Rotación dilativa, 131
7.7 Transformaciones que preservan la esfera, 133

ARTE II

8 COORDENADAS 137

8.1 Coordenadas, cartesianas, 137
8.2 Coordenadas polares, 140
8.3 La circunferencia, 143
8.4 Cónicas, 145
8.5 La tangente, la longitud y el área, 149
8.6 Funciones hiperbólicas, 154
8.7 La espiral equiangular, 155
8.8 Tres dimensiones, 157

9 NUMEROS COMPLEJOS 165

9.1 Los números racionales, 166
9.2 Los números reales, 167
9.3 El diagrama de Argand, 168
9.4 Módulo y amplitud, 171
9.5 La fórmula $e^{\pi i} + 1 = 0$, 173
9.6 Raíces de ecuaciones, 174
9.7 Transformaciones conformes, 175

10 LOS CINCO CUERPOS PLATONICOS 179

10.1 Pirámides, prismas y antiprismas, 179
10.2 Dibujos y modelos, 183
10.3 La fórmula de Euler, 183
10.4 Radios y ángulos, 186
10.5 Poliedros y recíprocos, 189

11 LA DIVISION AUREA Y LA FILOTAXIA 191

11.1 Razón extrema y media, 191
11.2 *De divina proportione*, 193
11.3 La espiral áurea, 195
11.4 Los números de Fibonacci, 196
11.5 La filotaxia, 200

PARTE III

12 GEOMETRIA ORDENADA 207

12.1 La extracción de dos geometrías distintas de Euclides, 207
12.2 Mediación, 209
12.3 El problema de Sylvester acerca de los puntos colineales, 213
12.4 Planos e hiperplanos, 215
12.5 Continuidad, 219
12.6 Paralelismo, 220

13 GEOMETRIA AFIN 225

13.1 El axioma del paralelismo y el axioma de "Desargues", 225
13.2 Dilataciones, 228
13.3 Afinidades, 233
13.4 Equiafinidades, 238
13.5 Celosías bidimensionales, 243
13.6 Vectores y centroides, 247
13.7 Coordenadas baricéntricas, 251
13.8 El espacio afín, 257
13.9 Celosías tridimensionales, 260

14 GEOMETRIA PROYECTIVA 265

14.1 Axiomas del plano proyectivo general, 266
14.2 Coordenadas proyectivas, 271
14.3 El teorema de Desargues, 274
14.4 Conjuntos cuadrangulares y armónicos, 276
14.5 Proyectividades, 279
14.6 Colineaciones y correlaciones, 284
14.7 La cónica, 289
14.8 El espacio proyectivo, 293
14.9 El espacio euclidiano, 299

15 GEOMETRIA ABSOLUTA 301

15.1 Congruencia, 301
15.2 Paralelismo, 303
15.3 Isometría, 307
15.4 Grupos finitos de rotaciones, 308
15.5 Grupos finitos de isometrías, 314
15.6 Cristalografía geométrica, 316
15.7 El kaleidoscopio poliedral, 318
15.8 Grupos discretos a los que generan las inversiones, 321

16 GEOMETRIA HIPERBOLICA 327

16.1 Los axiomas euclidianos e hiperbólicos del paralelismo, 327
16.2 La cuestión de la consistencia, 328
16.3 El ángulo de paralelismo, 331
16.4 La finitud de los triángulos, 335
16.5 El área y el defecto angular, 337
16.6 Círculos, horociclos y curvas equidistantes, 340
16.7 El modelo del "semiplano" de Poincaré, 342
16.8 La horoesfera y el plano euclidiano, 344

PARTE IV

17 GEOMETRIA DIFERENCIAL DE LAS CURVAS 347

17.1 Los vectores en el espacio euclidiano, 347
17.2 Las funciones vectoriales y sus derivadas, 352
17.3 Curvatura, evolutas e involutas, 353
17.4 La catenaria, 358
17.5 La tractriz, 359
17.6 Curvas torcidas, 361
17.7 La hélice circular, 363
17.8 La hélice general, 365
17.9 La concoespiral, 366

18 LA NOTACION TENSORIAL 369

18.1 Bases duales, 369
18.2 El tensor fundamental, 370
18.3 Celosías recíprocas, 373
18.4 La celosía crítica de una esfera, 376
18.5 Coordenadas generales, 379
18.6 El símbolo alternante, 382

GEOMETRIA DIFERENCIAL DE LAS SUPERFICIES 385

19.1 El empleo de dos parámetros en una superficie, 385
19.2 Direcciones en una superficie, 388
19.3 Curvatura normal, 392
19.4 Curvaturas principales, 395
19.5 Direcciones principales y líneas de curvatura, 400
19.6 Umbílicos, 403
19.7 Teorema de Dupin y el teorema de Liouville, 404
19.8 La indicatriz de Dupin, 406

20 LAS GEODESICAS 411

20.1 *Theorema egregium*, 411
20.2 Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas, 414
20.3 La curvatura integral de un triángulo geodésico, 417
20.4 La característica de Euler-Poincaré, 418
20.5 Superficies de curvatura constante, 420
20.6 El ángulo de paralelismo, 421
20.7 La pseudoesfera, 422

21 TOPOLOGIA DE SUPERFICIES 425

21.1 Superficies orientables, 426
21.2 Superficies no orientables, 428
21.3 Mapas regulares, 432
21.4 El problema de los cuatro colores, 436
21.5 El teorema de los seis colores, 437
21.6 El número suficiente de colores para cualquier superficie, 440
21.7 Superficies que necesitan el número completo de colores, 441

22 GEOMETRIA DE CUATRO DIMENSIONES 443

22.1 Las figuras más sencillas de cuatro dimensiones, 444
22.2 Una condición necesaria para la existencia de p, q, r, 446
22.3 Construcciones de politopos regulares, 448
22.4 Paquetes repletos de esferas iguales, 452
22.5 Una colmena estadística, 459

TABLAS 461

REFERENCIAS 463

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS 467

INDICE 507

Indice de láminas

I El grupo *pg*, que generan dos reflexiones paralelas en deslizamiento 85

II El grupo *cm*, que generan una reflexión y una reflexión paralela en deslizamiento 87

III Un modelo de alambre politopo de 120 celdas, 5, 3, 3 451

IV Paquetes repletos de círculos en el plano euclidiano 454

Las matemáticas no solamente poseen la verdad, sino la suprema belleza
—una belleza fría y austera, como la de la escultura,
sin atractivo para la parte más débil de nuestra naturaleza...
capaz de decidida perfección y hasta lo sublime pura
como sólo el arte más grande puede mostrar.

BERTRAND RUSSELL (1872-1970)

Parte I

1

Triángulos

En este capítulo repasaremos algunas de las muy conocidas proposiciones de la geometría elemental, en las que haremos resaltar el papel de la simetría. Nos referiremos a Euclides por medio de su propia numeración, que se usa desde hace más de dos mil años en todo el mundo. Desde la época de F. Commandino (1509–1575), que tradujo las obras de Arquímedes, Apolonio y Papo, se han descubierto muchos otros teoremas que comparten el mismo espíritu; esos resultados fueron objeto de estudios muy detallados durante el siglo diecinueve. Como la tendencia actual consiste en abandonarlos para favorecer otras ramas de las matemáticas, nos bastará mencionar unos cuantos que son particularmente interesantes.

1.1 EUCLIDES

> *La obra de Euclides permanecerá viva mucho después de que los libros de texto de hoy se encuentren superados y olvidados. Es uno de los monumentos más nobles de la antigüedad.*
>
> Sir Thomas L. Heath (1861–1940)*

Hacia el año 300, a. C., Euclides de Alejandría escribió un tratado en trece libros al que puso por nombre los *Elementos*. Sabemos muy poco del autor (que a veces es lamentablemente confundido con el filósofo anterior a él, Euclides de Megara). Proclo (410–485 d. C.) señala que "reunió los Elementos recogiendo muchos de los teoremas de Eudoxio, perfeccionando otros tantos de los de Teateto y demostrando irrefutablemente aquellas cosas

* Heath 1, pág. vi. (Estas referencias se han reunido al final del libro, págs. 415-417.)

que sus predecesores habían probado con cierta imprecisión. Este hombre vivió en la época del primer Ptolomeo (quien) una vez le preguntó si había en la geometría un camino más corto que el de los Elementos, y él le respondió que no había un camino real a la geometría. Heath cita un relato de Estobaecio acerca de alguien que, habiendo empezado a estudiar geometría con Euclides, le preguntó: "¿Qué obtendré al aprender estas cosas?" Euclides llamó a su esclavo y le dijo: "Dale diez centavos, pues éste tiene que sacar ganancia de lo que aprende."

De los trece libros, podemos describir los seis primeros con mucha brevedad al decir que tratan respectivamente de triángulos, rectángulos, círculos, polígonos, proporción y semejanza. Los cuatro siguientes, que son acerca de la teoría de los números, incluyen dos hazañas notables: IX.2 y X.9, en las que se demuestra que hay una infinidad de números primos y que $\sqrt{2}$ es irracional [Hardy 2, págs. 32–36]. El libro XI constituye una introducción a la geometría del espacio, el XII estudia pirámides, conos y cilindros, y el XIII es acerca de los cinco cuerpos regulares.

Según Proclo, Euclides "se propuso, como fin de toda la obra, la construcción de las que se conocen como figuras platónicas". Esta idea acerca de las intenciones de Euclides se basa en la teoría platónica de la correspondencia mística entre los cuatro cuerpos

$$\left.\begin{array}{l}\text{cubo,}\\ \text{tetraedro,}\\ \text{octaedro,}\\ \text{icosaedro,}\end{array}\right\}\ \text{y los cuatro "elementos"}\ \left\{\begin{array}{l}\text{tierra,}\\ \text{fuego,}\\ \text{aire,}\\ \text{agua}\end{array}\right.$$

[cf. Coxeter 1, pág. 18]. Una señal de lo contrario la constituyen los libros de aritmética, del VII al X, que evidentemente se incluyeron debido a su interés intrínseco y no por su aplicación a la geometría del espacio.

1.2 CONCEPTOS PRIMITIVOS Y AXIOMAS

"Cuando digo una palabra," dijo Humpty-Dumpty, "significa lo que quiero que signifique; ni más ni menos."

Lewis Carroll (1832–1898)

[Dodgson 2, Capítulo 6]

En el desarrollo lógico de cualquier rama de las matemáticas, en cada definición de un concepto y en cada relación intervienen otros conceptos y relaciones. Por lo tanto, la única manera de evitar un círculo vicioso consiste en admitir que ciertos conceptos y relaciones *primitivos* (por lo general, tan pocos como se pueda) permanezcan indefinidos [Synge 1, págs. 32–34]. Del mismo modo, la demostración de cada proposición se vale de otras proposiciones y, en consecuencia, hay proposiciones primitivas, que se llaman *axiomas* o *postulados*, que se dejan sin demostrar. Euclides no quiso concretar sus conceptos y relaciones primitivos; le bastó con dar definiciones

en términos de ideas que le serían familiares a cualquiera. Sus cinco postulados son los siguientes:

1.21 *Se puede trazar una recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera.*

1.22 *Se puede prolongar continuamente una recta finita en línea recta.*

1.23 *Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y cualquier radio.*

1.24 *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*

1.25 *Si una recta corta a otras dos de manera que los dos ángulos internos en cada uno de sus lados sean menores que dos rectos, las otras rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán en el mismo lado del plano en el que los ángulos son menores que dos rectos.* *

Es muy natural que transcurridos unos 2250 años se vea que hay detalles susceptibles de ser mejorados. (Por ejemplo, en Euclides I.1 se construye un triángulo equilátero mediante el trazado de dos circunferencias pero, ¿cómo sabemos que se intersectarán?) Lo maravilloso es que mucho del trabajo de Euclides permanezca perfectamente válido. El tratamiento moderno de su geometría [véase, por ejemplo, Coxeter **3**, págs. 161–187], acostumbra reconocer el concepto primitivo de *punto* y las dos relaciones primitivas de *mediación* (la idea de que un punto se encuentre entre otros dos) y de *congruencia* (la idea de que la distancia entre dos puntos sea igual a la distancia entre otros dos puntos, o que dos segmentos de recta tengan la misma longitud). Hay también distintas versiones del axioma de *continuidad*, una de las que dice que toda sucesión convergente de puntos tiene un límite.

El "principio de superposición" de Euclides, del que se sirve para demostrar I.4, plantea la pregunta acerca de que sea posible mover una figura sin alterar su estructura interna. Este principio se reemplaza actualmente por una suposición más explícita, como lo es el axioma de "la rigidez de un triángulo con una extremidad" (figura 1.2*a*):

1.26 *Si ABC es un triángulo y D es un punto en la prolongación del lado BC, mientras D' se relaciona de modo análogo con otro triángulo $A'B'C'$, y si $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, $AB = A'B'$, $BD = B'D'$, entonces $AD = A'D'$.*

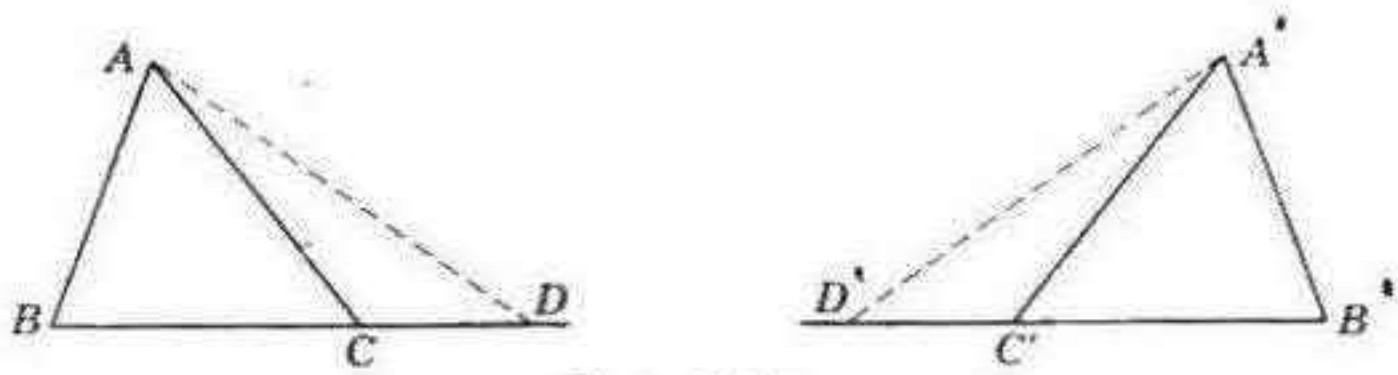


Figura 1.2a

* En el capítulo 15 se verá cómo se avanza al prescindir de este quinto postulado, tan lleno de complicaciones desagradables.

Este axioma puede servir para llevar la idea de congruencia de segmentos a figuras más complicadas, como los ángulos, de modo que sepamos con precisión el significado que damos a la relación

$$\angle ABC = \angle A'B'C'.$$

Y así dejamos de necesitar el discutible principio de superposición para demostrar Euclides I.4:

Si dos triángulos tienen respectivamente dos lados iguales a dos lados, y son iguales los ángulos que contienen a los lados iguales, tendrán también los terceros lados iguales y los demás ángulos respectivamente iguales; de hecho, serán triángulos congruentes.

1.3 PONS ASINORUM

Minos: *Se pretende demostrar I.5 si se toma el triángulo isósceles, se le da vuelta y se le vuelve a colocar sobre sí mismo.*

Euclides: *¿No crees que eso se parece mucho al cuento del toro irlandés y recuerda con demasiada intensidad el caso del hombre que se tragó a sí mismo para figurar en un tratado estrictamente filosófico?*

Minos: *Supongo que sus defensores dicen que, en su concepción, el triángulo deja tras de sí un vestigio, y, una vez invertido, se pone encima del vestigio que dejó.*

C. L. Dodgson (1832–1898)

[Dodgson 3, pág. 48]

I.5. *Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.*

El mote de *pons asinorum* de este famoso teorema probablemente provenga de la apariencia de puente que tiene la figura de Euclides (con las rectas auxiliares que intervienen en su demostración bastante complicada y de la idea de que cualquiera que no lo cruce ha de ser un borrico. Por fortuna, Papo de Alejandría dio hacia 340, d. C., una demostración mucho más sencilla (figura 1.3*a*):

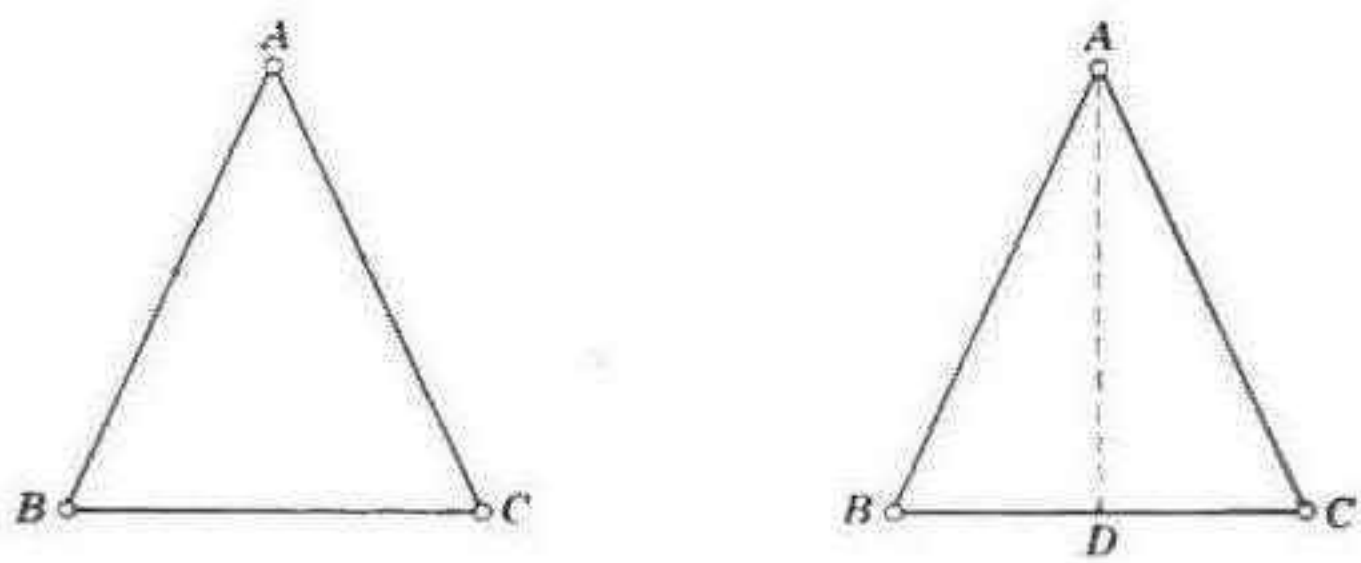


Figura 1.3a

Sea ABC un triángulo isósceles donde AB es igual a AC. Concibamos este triángulo como dos triángulos y examinémoslos de esta manera. Como $AB = AC$ y $AC = AB$, los dos lados AB, AC son iguales a los dos lados AC, AB. También el ángulo BAC es igual al ángulo CAB, pues es el mismo ángulo. Por lo tanto, todas las partes correspondientes (de los triángulos ABC, ACB) son iguales. En particular,

$$\angle ABC = \angle ACB.$$

La dificultad pedagógica que implica la comparación del triángulo isósceles consigo mismo se evita a veces al unir el vértice superior A, con D, el punto medio de la base BC. La mediana AD puede considerarse como un *espejo* que refleja a B en C. Así, decimos que un triángulo isósceles es simétrico por *reflexión*, o que tiene *simetría bilateral*. (Por supuesto, el espejo ideal de la geometría carece de grosor y ha recibido el baño de plata por ambas caras, de modo que no sólo refleja a B en C, sino también a C en B.)

Por irregular que sea su forma, de cualquier figura surge otra simétrica si la colocamos junto a un espejo e ignoramos la diferencia entre objeto e imagen. Esta simetría bilateral es una característica de la forma externa de casi todos los animales.

A partir de cualquier punto P, que puede estar a uno u otro lado de un espejo geométrico, podemos construir su imagen reflejada P' al trazar la perpendicular de P al espejo y prolongarla por el otro lado hasta un punto a la misma distancia; con esta construcción, el espejo biseca perpendicularmente al segmento de recta PP'. Si estamos trabajando en el plano (figura 1.3*b*) y nuestro espejo es la recta AB, trazamos dos círculos con centros en A, B y radios AP, BP. Los dos puntos de intersección de las circunferencias son P y su imagen P'.

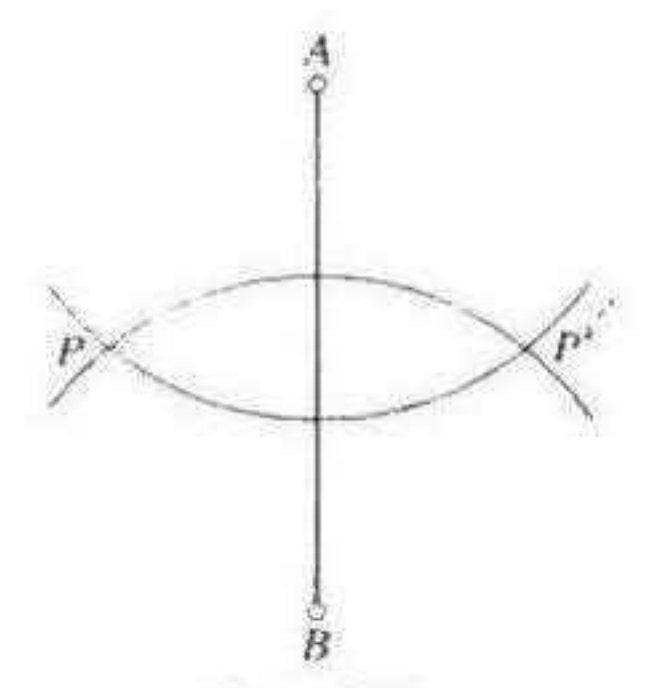


Figura 1.3b

Como veremos más adelante, muchas demostraciones geométricas ganan en brevedad y brillantez al usar reflexiones. Pero no olvidemos que nuestro procedimiento no es sino una manera de cortar camino: cada paso puede evitarse por medio de un circunloquio acerca de triángulos congruentes. Por ejemplo, la construcción anterior es válida debido a que los triángulos ABP, ABP', son congruentes.

Pons asinorum tiene muchas consecuencias de utilidad, como las cinco que enumeramos a continuación:

III.3 *Si en una circunferencia uno de los diámetros biseca una cuerda que no pasa por el centro, es perpendicular a ella; o, si es perpendicular a ella, la biseca.*

III.20. *En una circunferencia, el ángulo cuyo vértice está en el centro es el doble del ángulo cuyo vértice está en la circunferencia cuando los rayos que forman el ángulo cortan a la circunferencia en los mismos dos puntos.*

III.21. *En una circunferencia, una cuerda subtiende ángulos iguales cuyos vértices están en cualquier punto de uno de los dos arcos que determina la cuerda* (por ejemplo, en la figura 1.3c, $\angle PQQ' = \angle PP'Q'$).

III.22. *Los ángulos opuestos de cualquier cuadrángulo inscrito en una circunferencia suman dos rectos.*

III.32. *Si desde el punto de contacto de una tangente a una circunferencia se traza una cuerda de ésta, el ángulo que forman la tangente y la cuerda es igual al ángulo que subtiende la cuerda y cuyo vértice está en cualquier punto de la parte de la circunferencia que queda en el lado distante de la cuerda* (por ejemplo, en la figura 1.3c, $\angle OTP' = \angle TPP'$).

También usaremos dos conocidos teoremas de triángulos semejantes:

VI.2. *La paralela a uno de los lados de un triángulo cortará proporcionalmente a los otros lados; y si dos lados de un triángulo se cortan proporcionalmente, entonces la recta que une los puntos de intersección será paralela al otro lado.*

VI.4. *Si los ángulos de dos triángulos son respectivamente iguales, los lados respectivos serán proporcionales.*

Al combinar este último resultado con III.21 y 32, podemos deducir dos propiedades significativas de las secantes de una circunferencia (figura 1.3c):

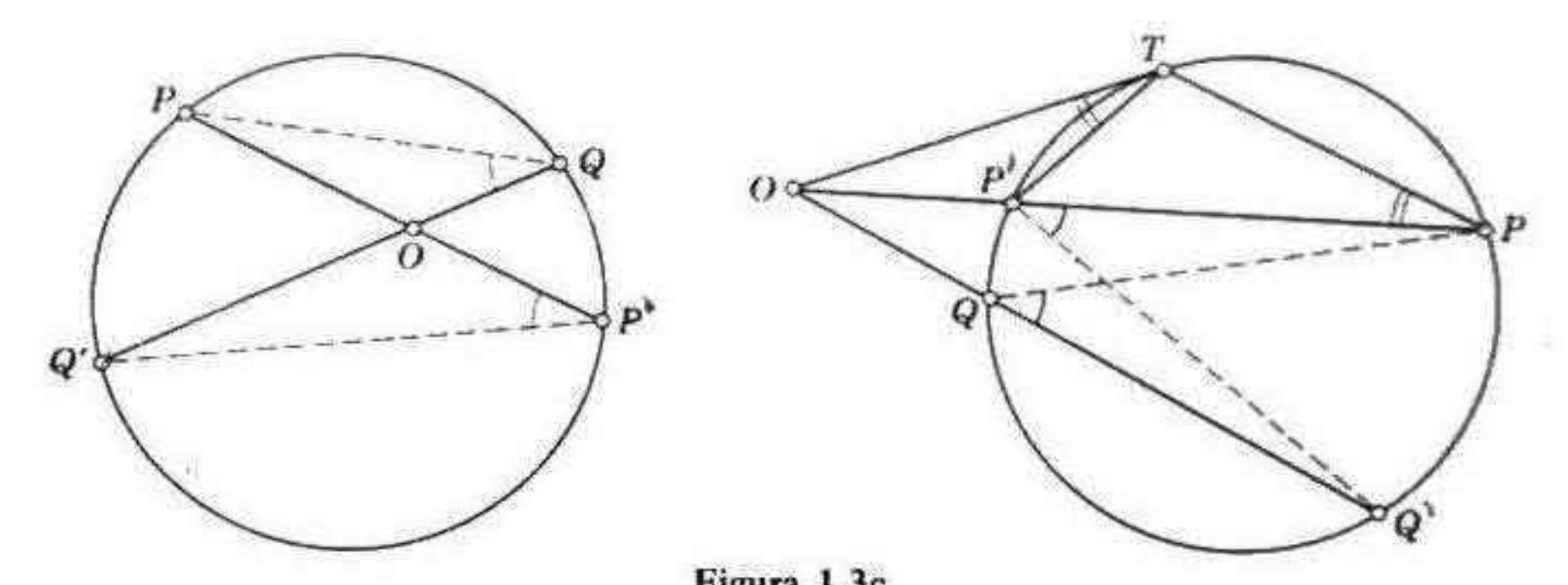


Figura 1.3c

III.35. *Si dôs rectas se cortan en el interior de una circunferencia, el rectángulo que contienen los segmentos de una es igual al rectángulo que contienen los segmentos de la otra* (es decir, $OP \times OP' = OQ \times OQ'$).

III.36. *Si se trazan una secante y una tangente, desde un punto exterior a una circunferencia, el rectángulo contenido por la secante entera y la parte que queda fuera del círculo será igual al cuadrado sobre la tangente* (es decir, $OP \times OP' = OT^2$).

El libro VI también contiene una propiedad importante del área:

VI.19. *Los triángulos semejantes son entre sí como el cuadrado de la razón de sus lados correspondientes* (es decir, si ABC y $A'B'C'$ son triángulos semejantes, sus áreas están en la proporción $AB^2 : A'B'^2$).

De aquí se tiene una fácil demostración del teorema de Pitágoras, que daremos a continuación [véase Heath **1**, pág. 353; **2**, págs. 210, 232, 269]:

I.47. *En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos.*

En el triángulo ABC, rectángulo en C, trácese CF, perpendicular a la hipotenusa AB, como se ha hecho en la figura 1.3*d*. Tenemos así tres triángulos rectángulos semejantes, ABC, ACF, CBF, cuyas hipotenusas son AB, AC, CB. Por VI.19, sus áreas satisfacen la proporción

$$\frac{ABC}{AB^2} = \frac{ACF}{AC^2} = \frac{CBF}{CB^2}.$$

Es evidente que $ABC = ACF + CBF$. Por lo tanto, $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

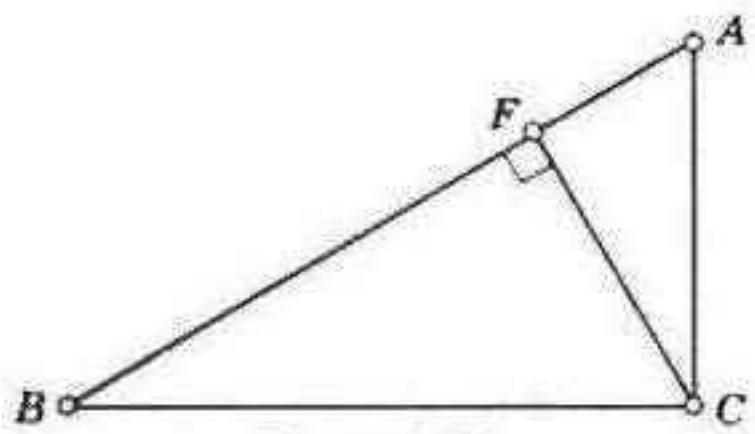


Figura 1.3d

EJERCICIOS

1. Por medio de coordenadas cartesianas rectangulares, demuéstrese que la reflexión en el eje de las y ($x = 0$) invierte el signo de x. ¿Qué sucede cuando lo reflejamos en la recta $x = y$?

2. Dedúzcase I.47 a partir de III.36 (donde lo aplicamos a una circunferencia de centro A y radio AC).

3. En el interior de un cuadrado $ABDE$ tómese el punto C tal que CDE sea un triángulo isósceles con ángulos de 15° en D y E. ¿Qué clase de triángulo es ABC?

4. Demuéstrese el teorema de Erdös–Mordell: si O es un punto cualquiera dentro de un triángulo ABC, y P, Q, R son los pies de las perpendiculares de O a los lados correspondientes BC, CA, AB, entonces

$$OA + OB + OC \geqslant 2(OP + OQ + OR).$$

*Indicación:** Sean P_1 y P_2 los pies de las perpendiculares desde R y Q a BC. Defínanse puntos análogos Q_1 y Q_2 y R_1 y R_2 en los otros dos lados. Por medio de la

* León Bankoff, *American Mathematical Monthly*, **65** (1958), pág. 521. Hay otras demostraciones en G. R. Veldkamp y H. Brabant, *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, **45**, (1958), págs. 193-196; **46** (1959), pag. 87.

semejanza de los triángulos PRP_1 y OBR, se puede expresar P_1P en términos de RP, OR y OB. Cuando esas expresiones se han substituido en

$$OA + OB + OC \geqslant OA(P_1P + PP_2)/RQ + OB(Q_1Q + QQ_2)/PR + OC(R_1R + RR_2)/QP,$$

se pueden reunir los términos en los que intervienen respectivamente OP, OQ, OR.)

5. ¿En qué circunstancias se puede reemplazar el símbolo $\geqslant$ por $=$ en el ejercicio 4?

6. De acuerdo con la notación del ejercicio 4,

$$OA \times OB \times OC \geqslant (OQ + OR)(OR + OP)(OP + OQ)$$

(A. Oppenheim, *American Mathematical Monthly*, 68 (1961), pág. 230. Véase también L. J. Mordell, *Mathematical Gazette*, 46 (1962), págs. 213–215.)

7. Demuéstrese el teorema de Steiner–Lehmus: cualquier triángulo que tenga dos bisectrices de ángulos internos iguales es isósceles. (*Indicación*:* si un triángulo tiene dos ángulos diferentes, la bisectriz del ángulo menor es la más larga.)

1.4 LAS MEDIANAS Y EL CENTROIDE

Las matemáticas orientales pueden ser interesantes, pero las matemáticas griegas realmente lo son... Los griegos, como me dijo Littlewood una vez, no son escolares inteligentes ni "candidatos a beca", sino "investigadores de una universidad diferente." Así, las matemáticas griegas son permanentes, más aún que la literatura griega. Se recordará a Arquímedes cuando Esquilo haya sido olvidado, pues los lenguajes mueren y las ideas matemáticas no.

G. H. Hardy (1877–1947)

[Hardy 2, pág. 21]

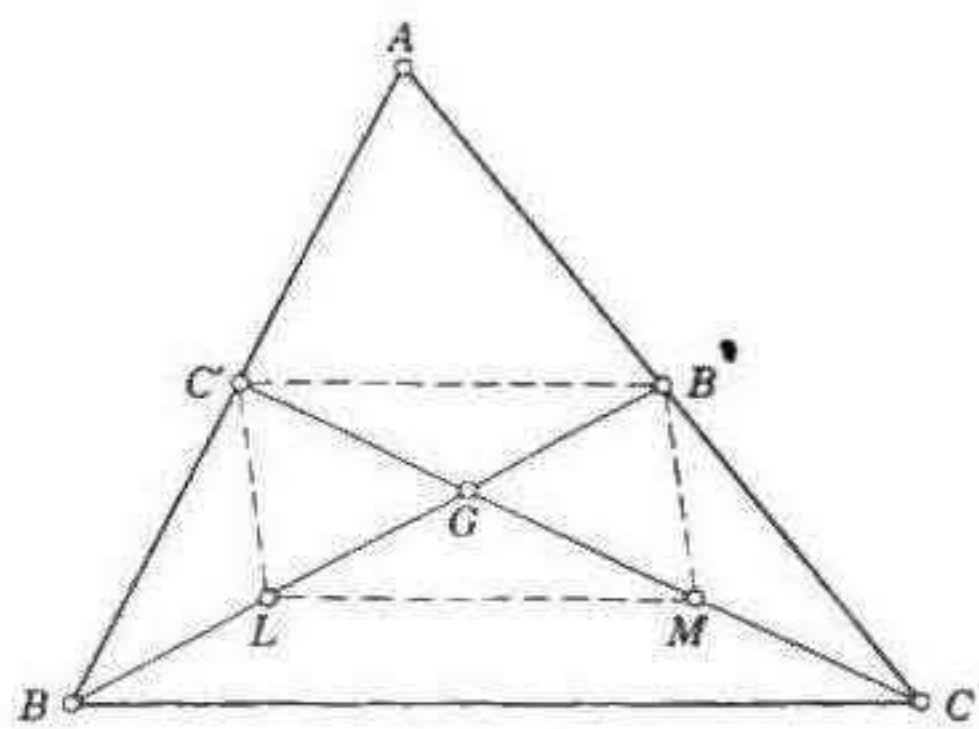


Figura 1.4a

La recta que une el vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto se llama *mediana*.

* Court 2, pág. 72. La demostración de Lehmus, que data de 1848, se puede ver en Coxeter y Greitzer 1, pág. 15.

Sean dos de las tres medianas, BB' y CC', tales que se intersecten en G (figura 1.4a). Y sean L y M los puntos medios de GB y GC. Por Euclides VI.2 y 4 (que conocíamos en la pág. 30), tanto $C'B'$ como LM son paralelas a BC y su longitud es la mitad de la longitud de BC. Por lo tanto, $B'C'LM$ es un paralelogramo. Como las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí, tenemos

$$B'G = GL = LB, \qquad C'G = GM = MC.$$

Así, las dos medianas BB', CC', se trisecan mutuamente en el punto G. En otras palabras, G, que también pudo definirse como punto de trisección de una mediana, es también punto de trisección de otra, y lo mismo sucede con la tercera. Así hemos demostrado [con el método de Court 1, pág. 58] el teorema siguiente:

1.41 *Las tres medianas de un triángulo cualquiera pasan por el mismo punto.*

El punto común G de las tres medianas se llama *centroide* del triángulo. Arquímedes (hacia 287–212 a. C.) lo obtuvo como el centro de gravedad de una placa triangular de densidad uniforme.

EJERCICIOS

1. Cualquier triángulo en el que dos medianas son iguales es isósceles.*
2. La suma de las medianas de un triángulo está entre $\frac{3}{4}p$ y p, donde p es la suma de los lados. [Court 1, págs. 60–61.]

1.5 LAS CIRCUNFERENCIAS INSCRITA Y CIRCUNSCRITA

A solas, en la noche,
Leo más la Biblia y a Euclides menos.†

Robert Buchanan (1841–1901)

(La historia de un viejo clérigo)

Euclides nos dice en III.3 que una circunferencia es simétrica por reflexión en cualquier diámetro (mientras la elipse lo es solamente en dos diámetros especiales: los ejes mayor y menor). En consecuencia, el ángulo entre dos tangentes que se intersectan es bisecado por el diámetro que pasa por el punto común a ambas. Al considerar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de pares de lados de un triángulo ABC, podemos observar que las bisectrices internas y externas de los tres ángulos se cortan de tres en tres en cuatro puntos I, I_a, I_b, I_c, como se puede ver en la figura 1.5*a*. Estos puntos son los centros de las cuatro circunferencias que se pueden describir de modo que sean tangentes a las tres rectas BC, CA, AB. Uno de ellos, el *incentro* I, que está dentro del triángulo, es el centro de la *circunferencia inscrita*

* De aquí en adelante, entiéndase que cualquier ejercicio que aparezca como teorema ha de ser *demostrado*. Así ahorramos el espacio de las palabras "demuéstrese que".

† *Alone at nights,*
I read my Bible more and Euclid less. (*T*)

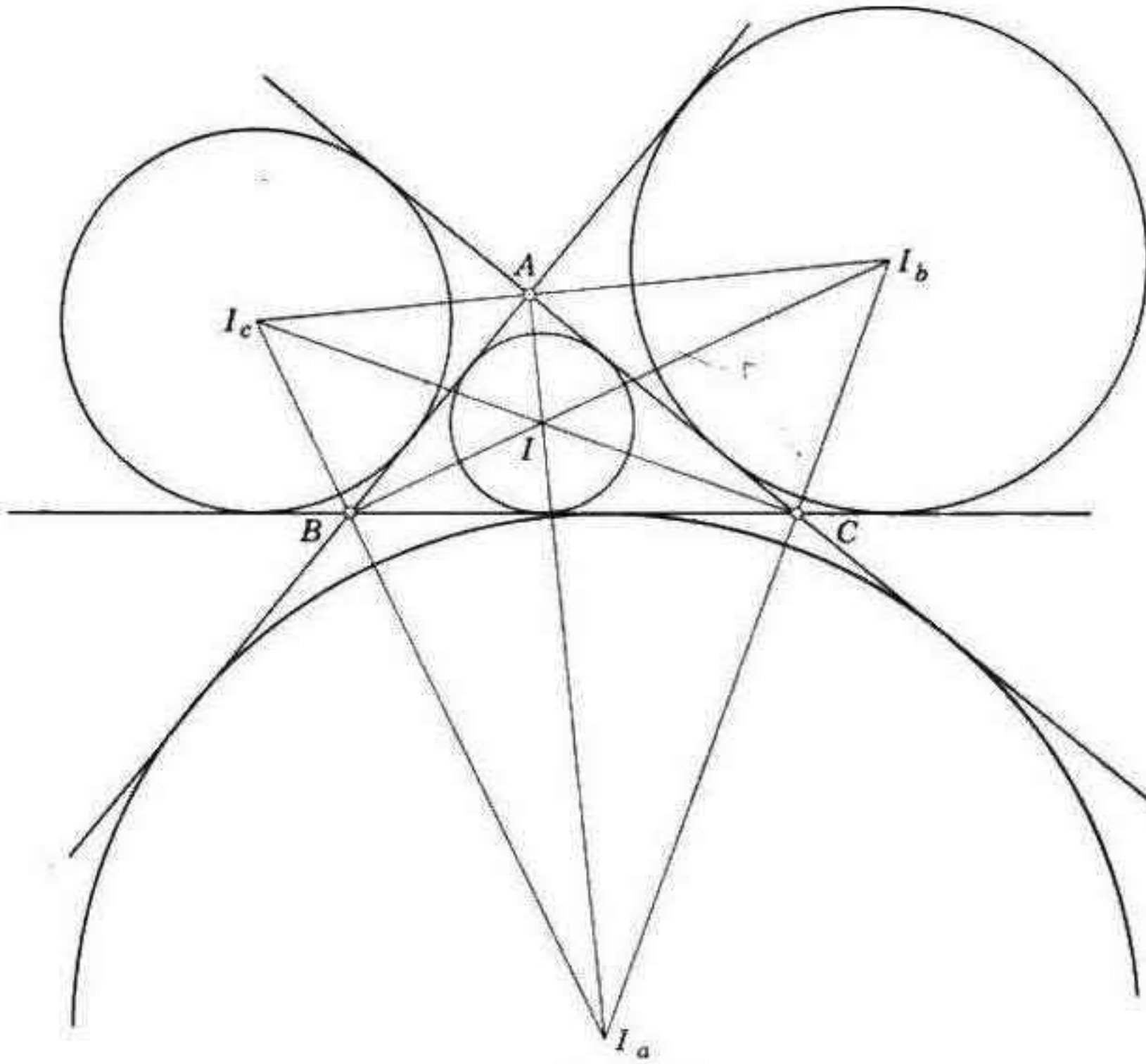


Figura 1.5a

(Euclides IV.4). Los otros tres son los *excentros* I_a, I_b, I_c: centros de las tres *circunferencias ex-inscritas* [Court 2, págs. 72–88]. Los radios de las circunferencias inscrita y ex-inscritas son el *inradio* r y los *exradios* r_a, r_b, r_c.

Al describir un triángulo ABC se suele llamar a los lados

$$a = BC, \qquad b = CA, \qquad c = AB,$$

al semiperímetro

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c),$$

a los ángulos A, B, C, y al área Δ.

Puesto que $A + B + C = 180°$ tenemos

1.51 $$\angle BIC = 90° + \tfrac{1}{2}A,$$

y este resultado nos será útil en § 1.9.

Como BC es el triángulo cuya base es a y cuya altura es r, su área es $\frac{1}{2}ar$. Al sumar los tres triángulos, tenemos

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(a + b + c)r = sr.$$

De la misma manera, $\Delta = \frac{1}{2}(b + c - a)r_a = (s - a)r_a$. Así

1.52 $$\Delta = sr = (s - a)r_a = (s - b)r_b = (s - c)r_c.$$

A partir de la conocida fórmula $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$, encontramos también

$$\operatorname{sen} A = [-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2]^{\frac{1}{2}}/2bc,$$

de donde

1.53 $$\begin{aligned} \Delta &= \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} A \\ &= \tfrac{1}{4}[-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \tfrac{1}{4}[(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)]^{\frac{1}{2}} \\ &= [s(s - a)(s - b)(s - c)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Esta notable expresión, que emplearemos en § 18.4, suele ser atribuida a Heron de Alejandría (hacia el año 60 d. C.), pero en realidad fue Arquímedes el que la descubrió. (Véase B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, Nueva York, 1961, págs. 228, 277.) Al combinar la fórmula de Heron con la 1.52, obtenemos

1.531
$$r^2 = \left(\frac{\Delta}{s}\right)^2 = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}, \quad r_a^2 = \left(\frac{\Delta}{s - a}\right)^2 = \frac{s(s - c)(s - b)}{s - a}.$$

Otra consecuencia de la simetría de la circunferencia consiste en que las mediatrices de los tres lados de un triángulo pasan todas por el *circuncentro* O, que es el centro de la *circunferencia circunscrita* (Euclides IV.5.) Se trata de la única circunferencia que pasa por los tres vértices A, B, C. Al radio R se le llama *circunradio* del triángulo. Puesto que el "ángulo cuyo vértice está en el centro", $\angle BOC$ (figura 1.5*b*), es el doble del ángulo A, los triángulos

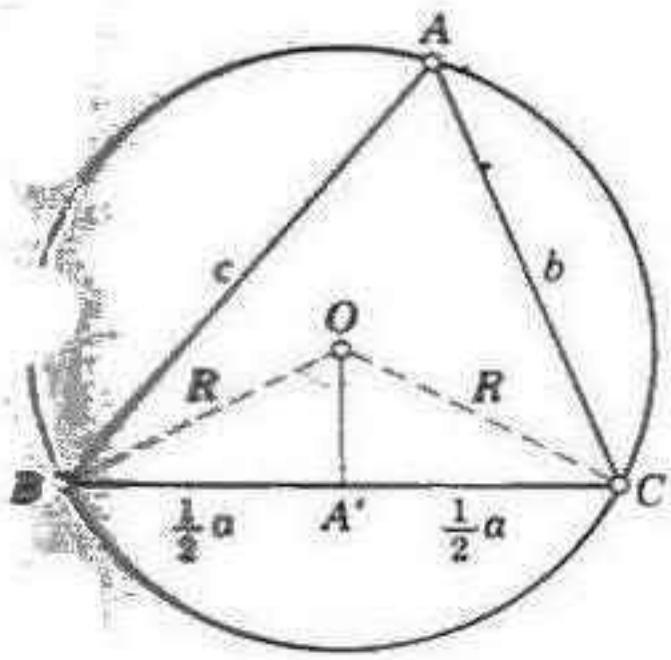


Figura 1.5b

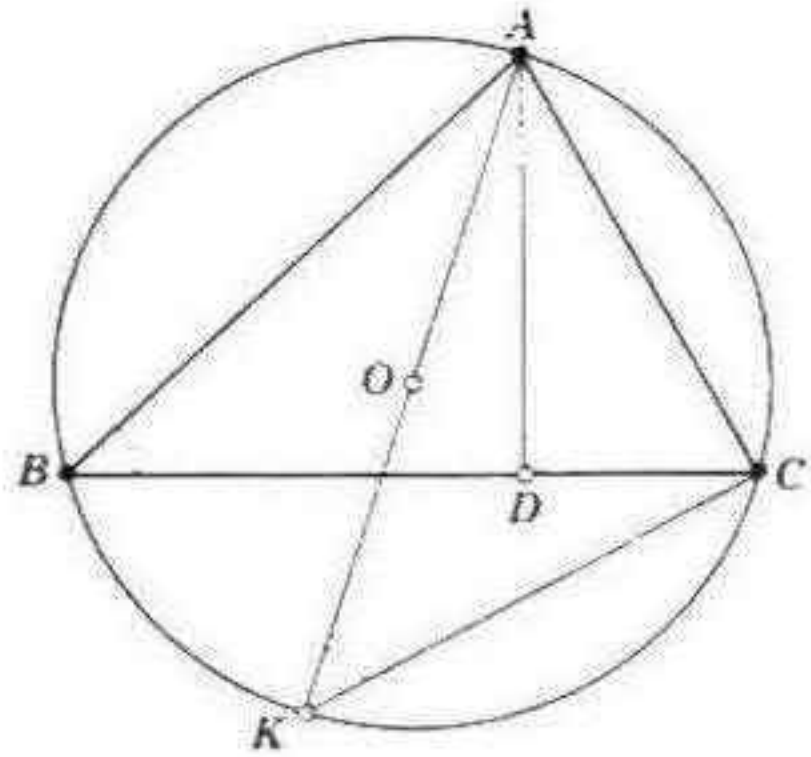


Figura 1.5c

rectángulos congruentes OBA', OCA' tienen un ángulo igual a A en O, de donde

$$R \operatorname{sen} A = BA' = \tfrac{1}{2}a,$$

1.54 $$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Trácese la perpendicular AD a BC, y sea AK el diámetro de la circunferencia circunscrita que pasa por A, como se ha dispuesto en la figura 1.5*c*. Por Euclides III.21, los triángulos rectángulos ABD y AKC son semejantes; por lo tanto,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AK}, \quad AD = \frac{bc}{2R}.$$

Como $\Delta = \frac{1}{2}BC \times AD$, tendremos que

1.55 $$\begin{aligned} 4\Delta R &= abc \\ &= s(s-b)(s-c) + s(s-c)(s-a) + s(s-a)(s-b) \\ &\qquad - (s-a)(s-b)(s-c) \\ &= \frac{\Delta^2}{s-a} + \frac{\Delta^2}{s-b} + \frac{\Delta^2}{s-c} - \frac{\Delta^2}{s} \\ &= \Delta\,(r_a + r_b + r_c - r). \end{aligned}$$

Y así quedan los cinco radios relacionados por la fórmula

1.56 $$4R = r_a + r_b + r_c - r.$$

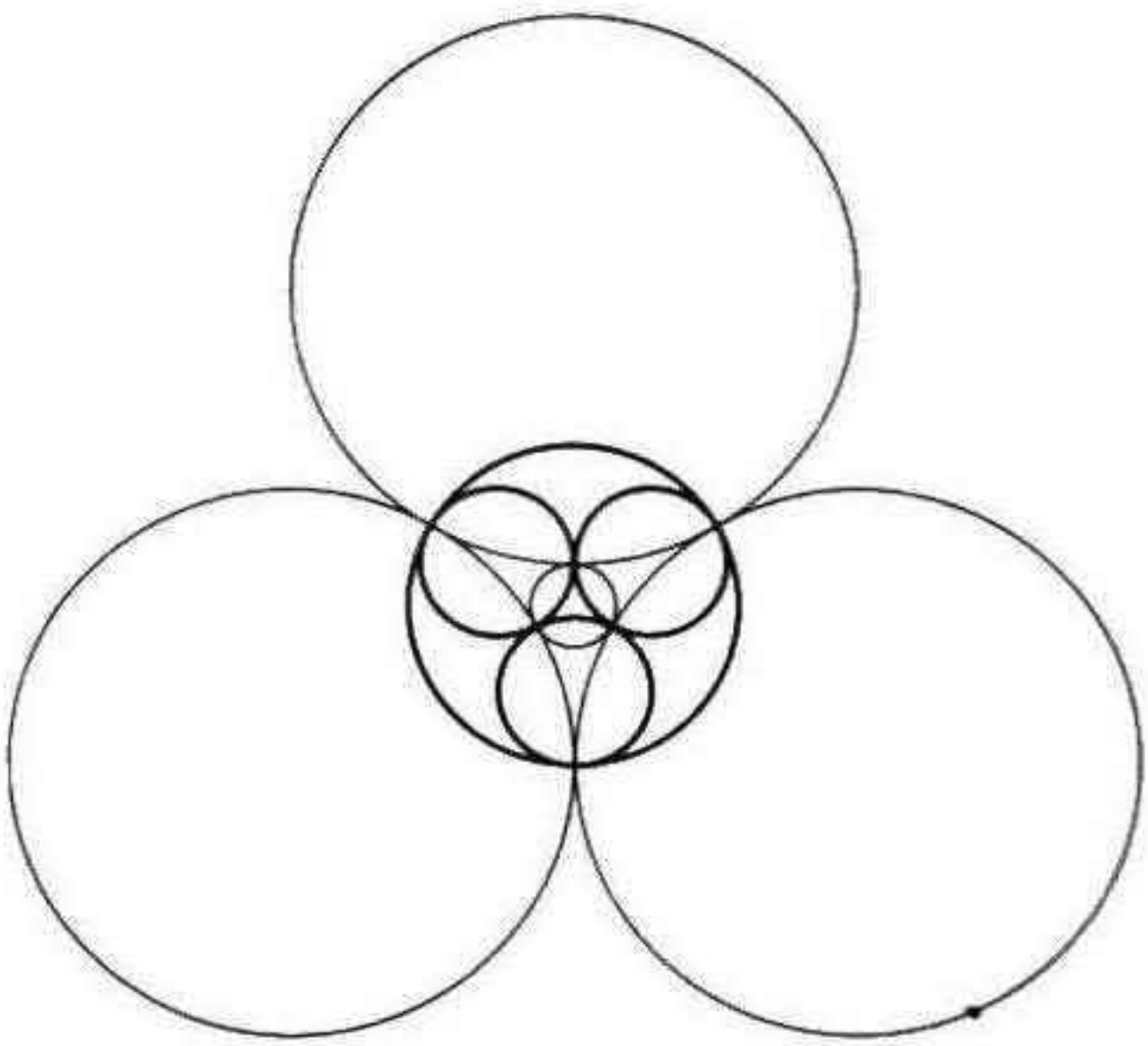


Figura 1.5d

Consideremos ahora cuatro circunferencias E_1, E_2, E_3, E_4 tangentes entre sí en seis puntos distintos. Cada circunferencia E_i tiene una *curvatura*, ε_i, que se define como recíproca del radio y va precedida por el signo adecuado, a saber: si todos los contactos son externos (como sucede con las circunferencias trazadas con líneas delgadas en la figura 1.5*d*), las curvaturas son positivas, pero si una de ellas rodea a las otras tres (como es el caso de las circunferencias gruesas) la curvatura de la mayor se toma como negativa; y una recta cuenta como una circunferencia de curvatura cero. De cualquier manera, la suma de las cuatro curvaturas es positiva.

En noviembre de 1643, René Descartes dirigía una carta a la Princesa Isabel de Bohemia, en la que desarrollaba una fórmula para relacionar los radios de cuatro circunferencias tangentes entre sí. Expresada en la notación de curvatura es así:

1.57 $$2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2.$$

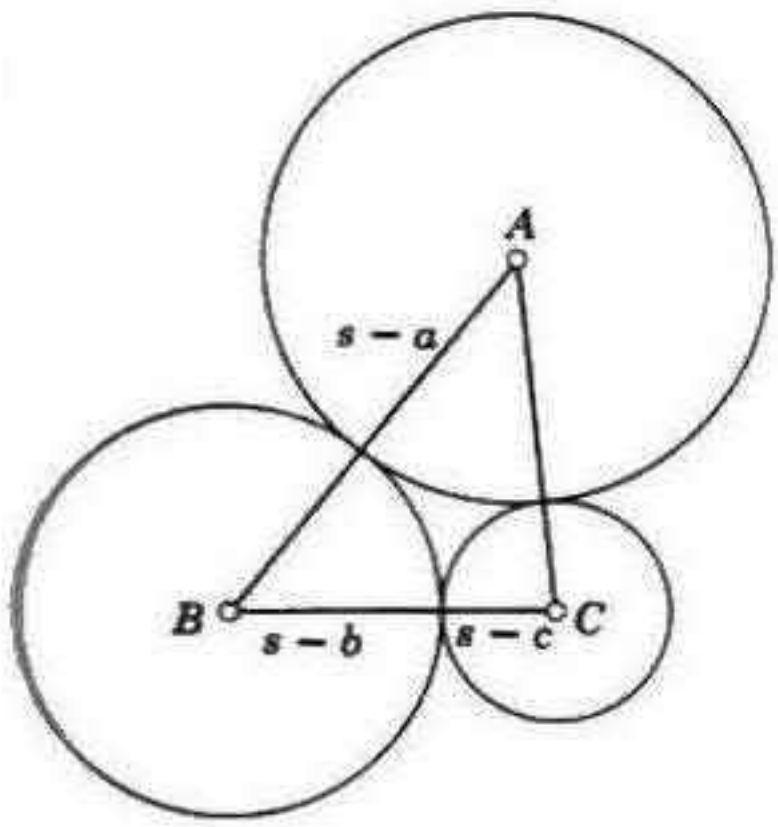


Figura 1.5e

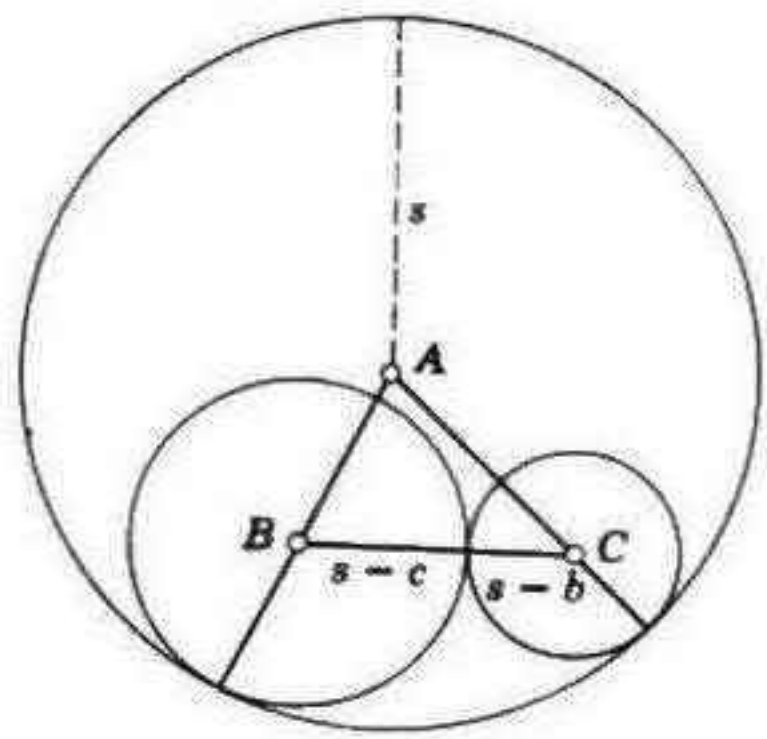


Figura 1.5f

El *teorema del círculo de Descartes* fue redescubierto en 1842 por un amateur inglés, Philip Beecroft, que observó que las cuatro circunferencias E_i determinan otro conjunto de circunferencias, H_i tangentes entre sí en los mismos seis puntos: H_1 en los tres puntos de tangencia de E_2, E_3, E_4, y así sucesivamente. Denotemos la curvatura de H_i por η_i. Si los centros de E_1, E_2, E_3 forman un triángulo ABC, H_4 será forzosamente la circunferencia inscrita o una de las ex-inscritas. En el primer caso (figura 1.5*e*),

1.58 $$\varepsilon_1 = \frac{1}{s-a},\ \varepsilon_2 = \frac{1}{s-b},\ \varepsilon_3 = \frac{1}{s-c},\ \eta_4 = \mp\frac{1}{r}.$$

En el segundo (figura 1.5*f*),

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{s},\ \varepsilon_2 = \frac{1}{s-c},\ \varepsilon_3 = \frac{1}{s-b},\ \eta_4 = \pm\frac{1}{r_a}.$$

En ambos casos, podemos ver que, según 1.531,

$$\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \eta_4^2.$$

De la misma manera, $\eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1 + \eta_1\eta_2 = \varepsilon_4^2$, y, por supuesto, podemos permutar los subíndices 1, 2, 3, 4. De donde tendremos

$$(\Sigma\varepsilon_i)^2 = \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_4^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \ldots + 2\varepsilon_3\varepsilon_4 = \Sigma\varepsilon_i^2 + \Sigma\eta_i^2.$$

Puesto que en la expresión intervienen de modo simétrico ε_i y η_i, es igual también a $(\Sigma\eta_i)^2$; así

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 > 0.$$

Y también, puesto que

$$\begin{aligned}&(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 - \varepsilon_4^2\\ &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - \varepsilon_4^2 + 2\eta_4^2\\ &= (\eta_2\eta_3 + \eta_2\eta_4 + \eta_3\eta_4) + (\eta_1\eta_3 + \ldots) + (\eta_1\eta_2 + \ldots) - (\eta_1\eta_2 + \ldots) + 2\eta_4^2\\ &= 2(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_4 + \eta_3\eta_4) + 2\eta_4^2 = 2\eta_4(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4),\end{aligned}$$

1.59 $$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = 2\eta_4.$$

Al sumar las cuatro ecuaciones una vez que hemos elevado al cuadrado cada miembro, deducimos $\Sigma\varepsilon_i^2 = \Sigma\eta_i^2$, de donde

$$2\Sigma\varepsilon_i^2 = \Sigma\varepsilon_i^2 + \Sigma\eta_i^2 = (\Sigma\varepsilon_i)^2.$$

Así se ha demostrado 1.57.

En 1936, Sir Frederick Soddy, que en 1921 había recibido el premio Nobel por el descubrimiento de los isótopos, redescubrió de nuevo el teorema. Lo expresó poéticamente en *El Beso Preciso (The Kiss Precise)*,* cuyas estrofas centrales dicen:

Acuden cuatro círculos a un beso;
Si más pequeños, con más curvatura.
Precisamente es la curvatura
De la distancia al centro el inverso.
Aunque Euclides quedó mudo ante el dilema,
No hay ya necesidad de un "más o menos".
Pues la curvatura cero es una recta
Y si es cóncava tiene signo menos;
La suma de sus cuadrados dará
Del cuadrado de la suma la mitad.†

* *Nature*, 137 (1936), pág. 1021; 139 (1937), pág. 62. En los demás versos, Soddy anuncia el descubrimiento de una fórmula análoga acerca de 5 esferas en tres dimensiones. Thorold Gosset (1869-1962) añadió una estrofa final con respecto a $n + 2$ esferas en n dimensiones; véase Coxeter, *Aequationes Mathematicae*, 1 (1968), págs. 104-121.

† Four circles to the kissing come,
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There´s now no need for rule of thumb.
Since zero bend´s a dead straight line

Un cuadrángulo así, $ABCH$, se llama *cuadrángulo ortocéntrico*. Sus seis lados

$$BC, \quad CA, \quad AB, \quad HA, \quad HB, \quad HC$$

son los lados y las alturas del triángulo ABC, y sus puntos diagonales D, E, F son los pies de las alturas. Nuestra notación parece señalar un papel especial, entre los cuatro vértices del cuadrángulo, a H. Sin embargo, es claro que

1.73 *Cada vértice de un cuadrángulo ortocéntrico es el ortocentro del triángulo que se forma con los otros tres vértices.*

Los cuatro triángulos (de los cuales hay uno solo de ángulos agudos) tienen todos el mismo triángulo órtico y, en consecuencia, la misma circunferencia de los nueve puntos.

Se demuestra en los libros de geometría afín [como el Coxeter **2**, 8.71] que los puntos medios de los seis lados de cualquier cuadrángulo completo y los tres puntos diagonales quedan todos en la misma cónica. Los comentarios anteriores señalan que cuando el cuadrángulo es ortocéntrico, la "cónica de los nueve puntos" se reduce a una circunferencia.

EJERCICIOS

1. De los nueve puntos que se han descrito en 1.71, ¿cuántos coinciden cuando el triángulo es (*a*) isósceles, (*b*) equilátero?

2. Los pies de las alturas descomponen la circunferencia de los nueve puntos en tres arcos, de la manera siguiente cuando el triángulo es escaleno: un arco contiene solamente uno de los seis puntos restantes, otro contiene dos y el tercero contiene tres.

3. En el arco $A'D$ de la circunferencia de los nueve puntos, tómese el punto X a la tercera parte del camino de A' a D. En los arcos $B'E$, $C'F$ tómense puntos Y, Z de la misma manera. Tendremos que XYZ es un triángulo equilátero.

4. El incentro y los excentros de un triángulo cualquiera forman un cuadrángulo ortocéntrico. [Casey **1**, pág. 247.]

5. Con la notación del § 1.5, la recta de Euler de $I_aI_bI_c$ es IO.

6. Los cuatro triángulos que se presentan en un cuadrángulo ortocéntrico tienen los mismos circunradios.

1.8 DOS PROBLEMAS EXTREMOS

La mayor parte de la gente aprecia en cierta medida las matemáticas, de la manera en que la mayor parte de la gente disfruta de una melodía agradable; y hay probablemente más gente que se interesa de verdad en las matemáticas que en la música.

G. H. Hardy [**2**, pág. 26]

Su interés se verá estimulado si eliminamos la aversión hacia las matemáticas que tantos han adquirido en experiencias de la infancia.

Hans Rademacher (1892–)

[Rademacher y Toeplitz **1**, pág. 5]

Describiremos los problemas de Fagnano y Fermat con bastantes detalles debido a que en su resolución intervienen métodos interesantes. El primero fue propuesto en 1775 por J. F. Toschi di Fagnano, que lo resolvió por medio del cálculo diferencial. El método que estudiaremos aquí fue descubierto por L. Fejér mientras era estudiante [Rademacher y Toeplitz **1**, págs. 30-32].

EL PROBLEMA DE FAGNANO. Dado un triángulo ABC de ángulos agudos, inscríbase el triángulo UVW cuyo perímetro ha de ser el menor de los posibles.

Empecemos por considerar un triángulo arbitrario UVW, donde U está en BC, V en CA, W en AB. Sean U', U'' las imágenes de U por reflexión en CA y CB, respectivamente. Entonces

$$UV + VW + WU = U'V + VW + WU'',$$

es decir, el camino de U' a U'', que suele ser una línea quebrada con ángulos en V y W. La distancia mínima de U' a U'' es una recta, y en la figura 1.8*a* se tiene una trayectoria recta. Así, entre todos los triángulos inscritos con un vértice dado U en BC se presenta el de menor perímetro cuando V y W se encuentran en la recta $U'U''$. De esta manera obtenemos un triángulo definido UVW cada vez que tomamos un punto U en BC. El problema estará resuelto cuando tomemos U tal que minimice $U'U''$, es decir, el perímetro.

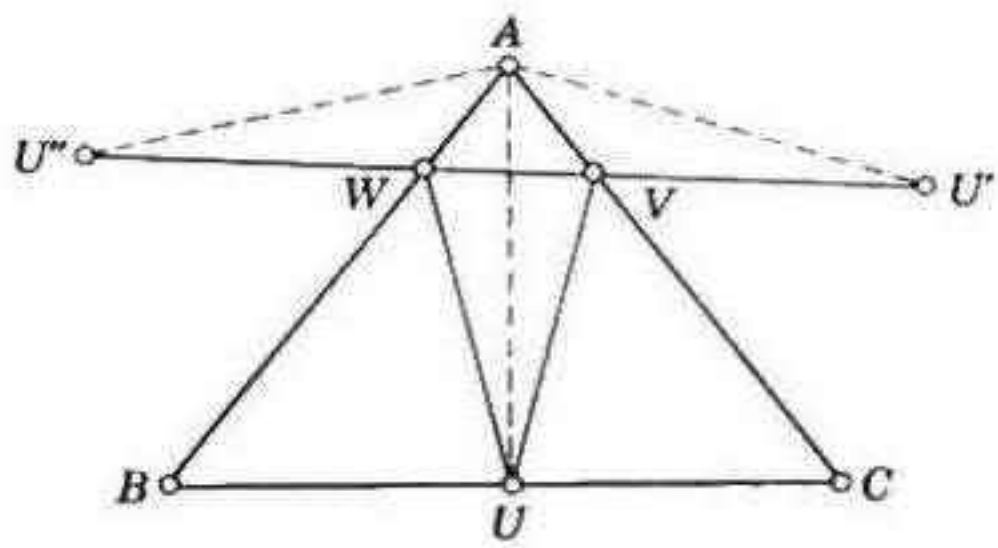


Figura 1.8a

Puesto que AU' y AU'' son imágenes de AU por reflexión en AC y AB, son congruentes y

$$\angle U'AU'' = 2A.$$

De esta manera, $AU'U''$ es un triángulo isósceles cuyo ángulo en A no depende de la elección de U. La base $U'U''$ será mínima cuando los lados iguales lo sean, es decir, cuando AU sea la menor distancia posible. En otras palabras, AU es la distancia menor desde el punto dado A a la recta dada BC. Como la hipotenusa de un triángulo rectángulo es más larga que cualquiera de los catetos, la ubicación de U que buscamos es tal que AU es perpendicular a BC. Y así, AU es la altura que baja de A.

Al elegir de esta manera a U se tiene un único triángulo UVW de perímetro menor que el de cualquier otro triángulo inscrito. Lo mismo podríamos haber hecho a partir de B o C en lugar de A; por lo tanto, observamos que BV y CW son las alturas desde B y C. En consecuencia,

El triángulo inscrito en un triángulo de ángulos agudos ABC que tiene el menor perímetro es el triángulo órtico de ABC.

Con el mismo método se puede demostrar el resultado correspondiente a los triángulos esféricos [Steiner 2, pág. 45, Nº 7].

El otro problema, propuesto por Pierre Fermat (1601–1665), trata también de la manera de minimizar la suma de tres distancias. La solución que damos aquí se debe a J. E. Hoffmann.*

EL PROBLEMA DE FERMAT. *Dado un triángulo de ángulos agudos ABC, localícese un punto P tal que la suma de sus distancias a A, B, C sea lo más pequeña posible.*

Empecemos por tomar un punto arbitrario P dentro del triángulo. Se une P con A, B, C y se aplica al triángulo interior APB una rotación de 60° alrededor de B de manera que se obtenga $C'P'B$; así, ABC' y PBP' serán triángulos equiláteros, como se tiene en la figura 1.8*b*. Entonces

$$AP + BP + CP = C'P' + P'P + PC,$$

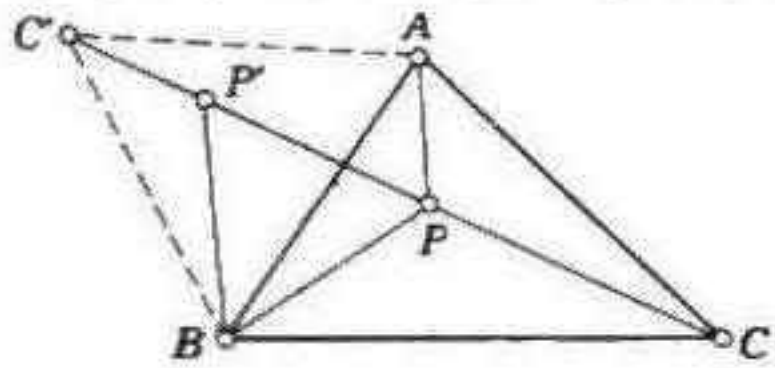


Figura 1.8b

que es el camino de C' a C, y suele presentarse como una línea quebrada con ángulos en P' y P. El menor camino estará sobre la recta (donde se una C' a C por medio de una serie de tres segmentos); en ese caso

$$\angle BPC = 180° - \angle BPP' = 120°$$

y

$$\angle APB = \angle C'P'B = 180° - \angle PP'B = 120°.$$

Así, el punto que se quiere encontrar, tal que la suma $AP + BP + CP$ sea mínima, es el punto en el que cada uno de los lados BC, CA, AB subtiende un ángulo de 120°. La construcción más sencilla del "punto de Fermat" se lleva a cabo al tomar la segunda intersección de la recta CC' y la circunferencia ABC' (es decir, la circunferencia circunscrita del triángulo equilátero ABC').

Se ha señalado [véase, por ejemplo, Pedoe 1, págs. 11–12] que el triángulo ABC no necesita ser de ángulos agudos. La solución anterior es válida siempre y cuando ninguno de los ángulos sea mayor que 120°.

En lugar del triángulo equilátero ABC' podríamos haber tomado sobre BC el triángulo equilátero BCA' o CAB' sobre CA, como se ha hecho en la figura 1.8*c*. Aquí se tiene que las tres rectas AA', BB', CC' pasan por el punto de Fermat, P, y con dos cualesquiera de ellas se tiene una construcción alterna de él. Pero, más aún, los segmentos de recta AA', BB', CC' son todos iguales a $AP + BP + CP$. Por consiguiente,

Si sobre los lados de un triángulo ABC se toman triángulos equiláteros

* Elementare Lösung einer Minimumsaufgabe, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, **60** (1929), págs. 22-23.

construidos hacia afuera –sean BCA', CAB', ABC'–, los segmentos de recta AA', BB', CC' son iguales, concurren al mismo punto y forman entre sí ángulos de 60°.

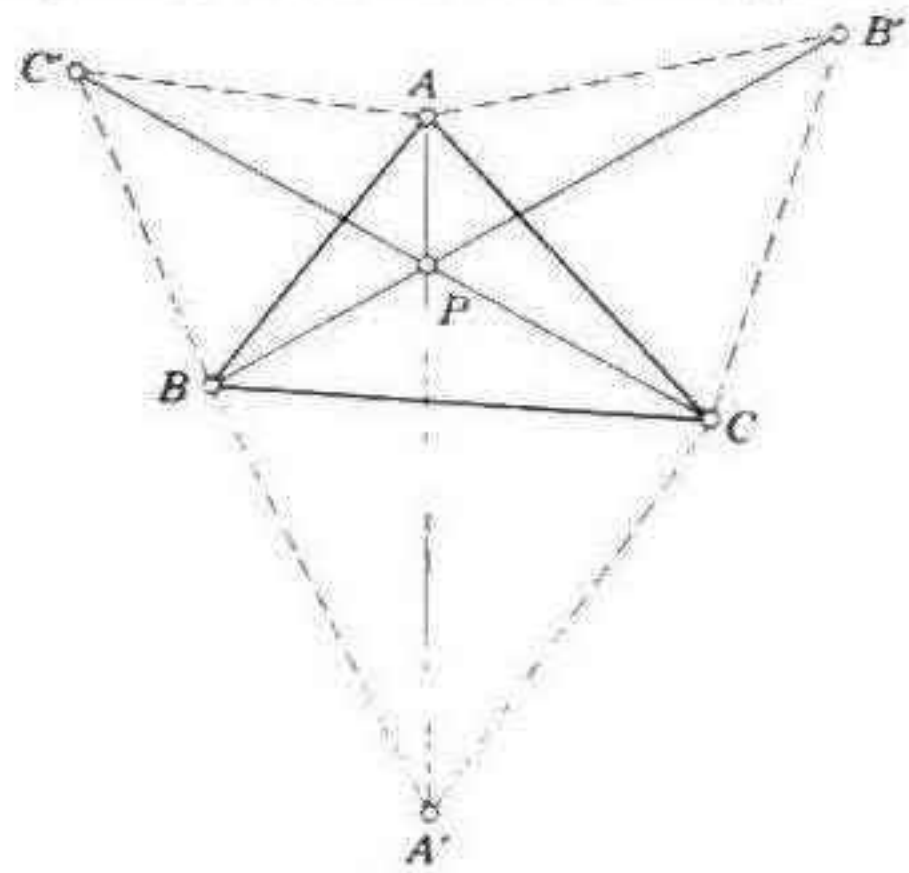


Figura 1.8c

EJERCICIOS

1. Se tiene en la figura 1.8*a* que UV y VW forman ángulos iguales con CA. Dedúzcase que el ortocentro de un triángulo cualquiera es el incentro del triángulo órtico. (Dicho de otro modo, si ABC fuera una mesa de billar de forma triangular, al impulsar la bola en U sobre la dirección UV, la bola recorrería indefinidamente el triángulo UVW a menos, claro, que la fricción la detuviera.)

2. ¿En qué sentido se deshace el problema de Fagnano cuando intentamos aplicarlo a un triángulo ABC donde el ángulo A es obtuso?

3. Las circunferencias circunscritas de los tres triángulos equiláteros de la figura 1.8*c* pasan todas por P, y sus centros son los vértices de un cuarto triángulo equilátero.*

4. En una mesa se hacen tres hoyos en los vértices de un triángulo arbitrario. A través de cada hoyo se hace pasar un cordel al que se la ha atado un peso, que queda colgando por debajo de la mesa. A continuación, por encima de ella se atan los tres cordeles y se sueltan súbitamente. ¿En qué punto descansará el nudo si los tres pesos son iguales?

5. En los vértices de un cuadrado de lado igual a una milla hay cuatro pueblos. Los habitantes desean comunicar los pueblos por medio de un sistema de caminos, pero el material que poseen les servirá sólo para $\sqrt{3}+1$ millas de camino. ¿Qué deben hacer? [Courant y Robbins **1**, pág. 392.]

6. Resuélvase el problema de Fermat con un triángulo ABC donde $A > 120°$, y para un cuadrángulo convexo $ABCD$.

7. Si en el interior de un triángulo se han situado los puntos P, P', de manera que $\angle CBP = \angle PBP' = \angle P'BA$, $\angle ACP' = \angle P'CP = \angle PBC$, entonces $\angle BP'P = \angle PP'C$.

8. Si se colocan sobre los cuatro lados de un paralelogramo cuatro cuadrados por el exterior (o por el interior), sus centros serán vértices de otro cuadrado. [Yaglom **1**, págs. 96–97.]

9. Sean X, Y, Z los centros de los cuadrados que se han colocado por el exterior sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC. El segmento AX será congruente con y perpendicular a YZ (y también BY a ZX y CZ a XY). (W. A. J. Luxemburg.)

10. Sean Z, X, U, V los centros de los cuadrados que se han colocado por el exterior sobre los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrángulo simple (o "cuadrilátero") cualquiera $ABCD$. El segmento ZU (que une los centros de dos cuadrados "opuestos") es congruente con y perpendicular a XV. [Forder **2**, pág. 40.]

* Court [**1**, págs. 105-107]. Véanse también *Mathesis* 1938, pág. 293 (nota al pie de la página, donde este teorema se atribuye a Napoleón); y Forder [**2**, pág. 40], que estudian generalizaciones interesantes.

1.9 EL TEOREMA DE MORLEY

Muchas de las demostraciones matemáticas son muy largas e intrincadas. Otras, sin ser largas, han sido construidas con gran ingenio.

E. C. Titchmarsh (1899–1963)

[Titchmarsh 1, pág. 23]

Uno de los teoremas más sorprendentes de la geometría elemental fue descubierto hacia 1899 por F. Morley (cuyo hijo Christopher ha escrito novelas como *Thunder on the Left*). Se lo contó a sus amigos, que lo extendieron por el mundo a manera de chisme matemático. Finalmente, después de diez años, se publicaron dos demostraciones, una trigonométrica de M. Satyanarayana y otra elemental de M. T. Naraniengar.*

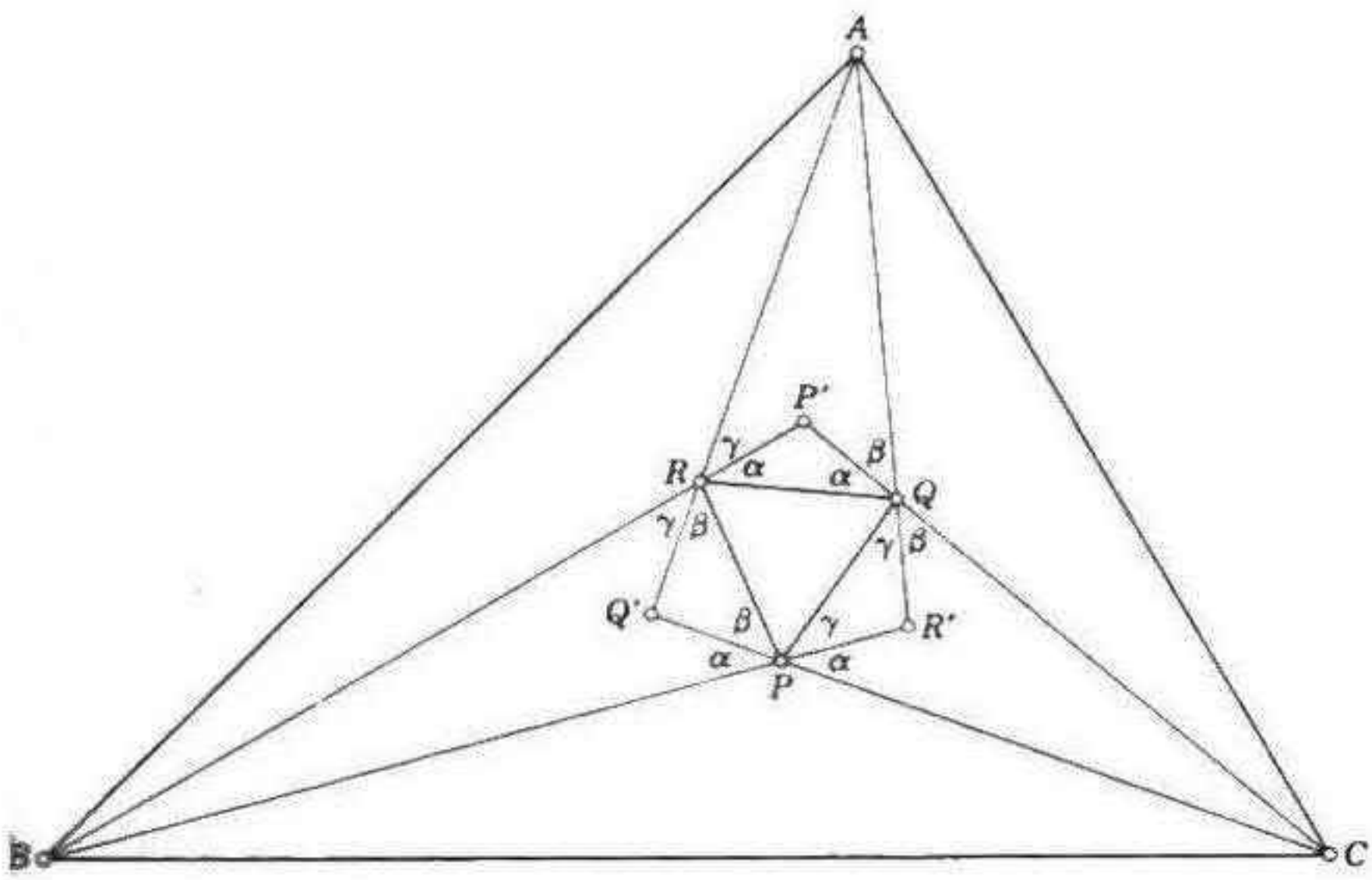


Figura 1.9a

Mathematical Questions and their Solutions from the Educational Times (Nueva serie), 15 (1909), págs. 23–24, 47. Véase también C. H. Chepmell y R. F. Davis, *Mathematical Gazette*, 11 (1923), págs. 85–86; F. Morley, *American Journal of Mathematics*, 51 (1929), págs. 465–472, H. D. Grossman, *American Mathematical Monthly*, 50 (1943), pág. 552, y L. Bankoff, *Mathematics Magazine*, 35 (1962), págs. 223–224. El tratamiento que recibe aquí se debe a Raoul Bricard, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (5), 1 (1922), págs. 254–258. Bottema [1, pág. 34], de manera independiente, desarrolló una demostración parecida.

TEOREMA DE MORLEY. *Los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo cualquiera forman un triángulo equilátero.*

En otras palabras, de cualquier triángulo ABC se obtiene un triángulo equilátero PQR al trisecar los ángulos A, B, C por medio de AQ y AR, BR y BP, CP y CQ, como se tiene en la figura 1.9*a*. (Experimentaremos grandes dificultades si intentamos tomar el punto de vista directo, pero desaparecen si trabajamos hacia atrás, es decir, si empezamos por el triángulo equilátero y construimos un triángulo general que se identificará posteriormente con el triángulo dado ABC.)

En los lados correspondientes QR, RP, PQ de un triángulo equilátero dado erijanse triángulos isósceles $P'QR$, $Q'RP$, $R'PQ$ en los que los ángulos de la base, α, β, γ, cumplan las ecuaciones y desigualdades siguientes:

$$\alpha + \beta + \gamma = 120°, \quad \alpha < 60°, \quad \beta < 60°, \quad \gamma < 60°.$$

A continuación prolónguese, cada lado de los triángulos isósceles por debajo de sus bases hasta que se vuelvan a encontrar en los puntos A, B, C. Puesto que $\alpha + \beta + \gamma + 60° = 180°$, podemos inferir de inmediato las magnitudes de otros ángulos, como se ha señalado en la figura 1.9*a*. Por ejemplo, el triángulo AQR ha de tener un ángulo de $60° - \alpha$ en el vértice A, puesto que sus ángulos en Q y R son $\alpha + \beta$ y $\gamma + \alpha$.

Si nos referimos a 1.51, observaremos que una de las maneras de caracterizar el incentro I de un triángulo ABC consiste en describirlo en relación con la bisectriz del ángulo A en la que está situado a una distancia tal que

$$\angle BIC = 90° + \tfrac{1}{2}A.$$

Al aplicar este principio al punto P del triángulo $P'BC$, observamos que la recta PP' (que es la mediana del triángulo equilátero PQR y del triángulo isósceles $P'QR$) biseca al ángulo en P'. También, la mitad del ángulo que se encuentra en P' es de $90° - \alpha$, y

$$\angle BPC = 180° - \alpha = 90° + (90° - \alpha).$$

En consecuencia, P es el incentro del triángulo $P'BC$. De la misma manera, Q es el incentro de $Q'CA$ y R lo es de $R'AB$. Por lo tanto, los tres ángulos pequeños que están en C son iguales; y lo mismo sucede con los que están en A y en B. En otras palabras, se han trisecado los ángulos del triángulo ABC.

Los tres ángulos pequeños en A son cada uno de $\frac{1}{3}A = 60° - \alpha$; lo mismo en B y C. Así,

$$\alpha = 60° - \tfrac{1}{3}A, \quad \beta = 60° - \tfrac{1}{3}B, \quad \gamma = 60° - \tfrac{1}{3}C.$$

Al escoger estos valores para los ángulos de la base de nuestros triángulos isósceles, podemos asegurar que el procedimiento anterior concluye en un triángulo ABC que es semejante a cualquier triángulo dado.

Así queda completa la demostración.

EJERCICIOS

1. Las tres rectas PP', QQ', RR' (figura 1.9*a*) concurren a un mismo punto. En otras palabras, las trisectrices de A, B, C se intersectan otra vez en los vértices de otro triángulo $P'Q'R'$, que está en perspectiva con el triángulo equilátero PQR. (Por lo general, $P'Q'R'$ *no* es equilátero.)

2. ¿Con qué valores de α, β, γ se tendrá el triángulo ABC (i) equilátero, (ii) rectángulo e isósceles? Dibújese en cada caso la figura.

3. Sean P_1 y P_2 (en CA y AB) las imágenes de P por reflexión en CP' y BP'. Entonces se tendrá que los cuatro puntos P_1, Q, R, P_2 se sitúan a espacios iguales a lo largo de una circunferencia que pasa por A. Cuando se presenta el caso especial en el que el triángulo ABC es equilátero, los cuatro puntos se dan entre los vértices de un eneágono (polígono de nueve lados) regular en el que A es el vértice opuesto al lado QR.

2

Polígonos regulares

Este capítulo empieza con el estudio (sin demostraciones) de la construcción de ciertos polígonos regulares por medio de los instrumentos euclidianos. A continuación, consideraremos los mismos polígonos desde el punto de vista de la simetría, al margen de las cuestiones de construcción. Por último, extenderemos el concepto de polígono regular de manera que queden incluídos los polígonos en forma de estrella.

2.1 CICLOTOMIA

¡Uno, dos! ¡Uno, dos! ¡Hasta hacerlo pedazos
Se hundió una y otra vez el filo vorpal! *

Lewis Carroll

[Dodgson **2**, Cap. 1]

Los postulados de Euclides implican una restricción en los instrumentos para realizar construcciones, que han de ser la regla y el compás. Construye así un triángulo equilátero (I.1), un cuadrado (IV.6), un pentágono regular (IV.11), un exágono regular (IV.15), y un polígono regular de 15 lados (IV.16). El número de lados puede duplicarse una y otra vez por medio de bisecciones sucesivas de ángulos. Es natural que nos preguntemos por los demás polígonos regulares que se pueden construir con los instrumentos de Euclides. Gauss (1777–1855) respondió por completo a esta pregunta a la edad de diecinueve años. [véase Smith **2**, págs. 301–302]. Descubrió que un *enégono* (polígono de n lados) regular, que denotaremos por $\{n\}$, puede

* *One, two! One, two! And through and through*
The vorpal blade went snicker-snack! (*T*)

construirse de la manera descrita si los factores primos impares de n son "números primos de Fermat" diferentes entre sí:

$$F_k = 2^{2^k} + 1.$$

Los únicos primos de esta clase que se conocen son

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3, \quad F_1 = 2^2 + 1 = 5, \quad F_2 = 2^4 + 1 = 17,$$

$$F_3 = 2^8 + 1 = 257, \quad F_4 = 2^{16} + 1 = 65537.$$

Ptolomeo y Richmond* han dado construcciones más sencillas que la de Euclides para inscribir un pentágono regular en una circunferencia dada. La de Ptolomeo se encuentra en muchos libros de texto. La otra es así (figura 2.1*a*).

Para inscribir un pentágono regular $P_0P_1P_2P_3P_4$ en una circunferencia de centro O: trácese el radio OB de manera que sea perpendicular a OP_0; únanse P_0 y D, el punto medio de OB; biséquese el ángulo ODP_0 con el objeto de obtener N_1 en OP_0, y trácese la perpendicular N_1P_1 para obtener P_1 en la circunferencia. Entonces P_0P_1 es uno de los lados del pentágono que se quiere construir.

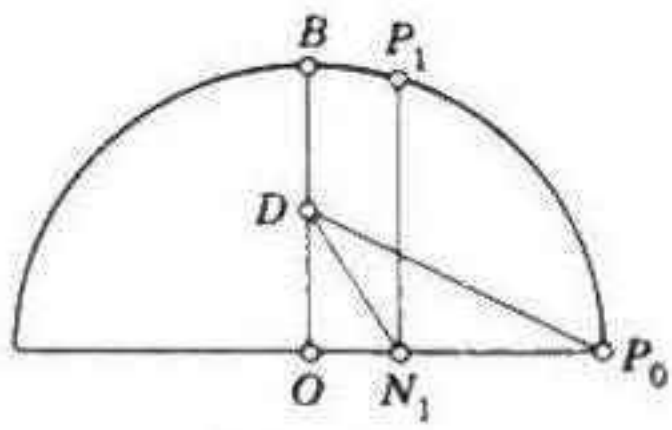


Figura 2.1a

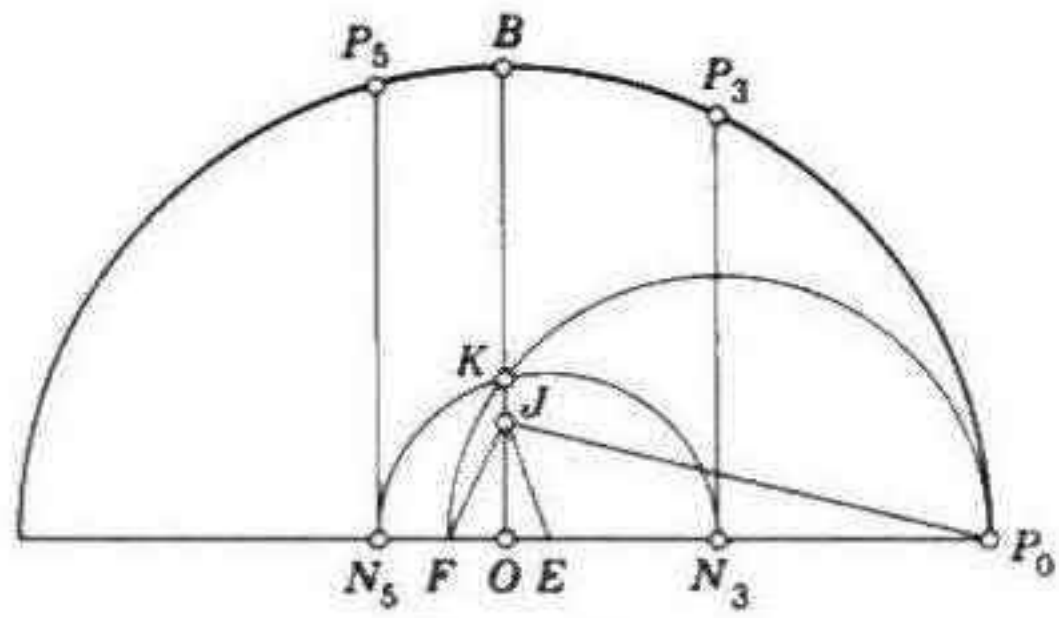


Figura 2.1b

También se debe a Richmond una construcción sencilla del {17} $P_0P_1 \ldots P_{16}$ (figura 2.1*b*). Unase P_0 con el punto J que está a la cuarta parte del camino de O a B. En el diámetro que pasa por P_0 tómense E, F tales que $\angle OJE$ mida la cuarta parte de $\angle OJP$ y $\angle FJE$ sea de 45°. Tómese ahora la circunferencia cuyo diámetro es FP_0, que cortará a OB en K, y tómese también la circunferencia cuyo centro es E y cuyo radio es EK, que cortará a OP_0 en N_3 (entre O y P_0) y en N_5. Trácense perpendiculares a OP_0 en ambos puntos, que cortarán a la circunferencia original en P_3 y P_5. Entonces el arco P_3P_5 (y lo mismo sucede con el arco P_1P_3) mide $\frac{2}{17}$ de la circunferencia. (En la demostración se aplica repetidamente el principio de que las raíces de la ecuación $x^2 + 2x \cot 2C - 1 = 0$ son $\tan C$ y $-\cot C$.)

En 1832, Richelot y Schwendenwein construyeron el polígono regular de 257 lados. J. Hermes pasó diez años trabajando en el polígono regular de

* H. W. Richmond, *Quarterly Journal of Mathematics*, 26 (1893), págs. 296-297; véase también H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics* (Londres 1917), pág. 38.

65537 lados y depositó el manuscrito en una caja grande y lo guardó en la Universidad de Gotinga, donde aún se encuentra.

El número siguiente de la forma $F_k = 2^{2^k} + 1$ es $F_5 = 4294967297$. Incorrectamente, Fermat lo supuso primo. G. T. Bennet dio la siguiente demostración* de que es compuesto [Hardy y Wright 1, pág. 14]: el número

$$641 = 5^4 + 2^4 = 5 \cdot 2^7 + 1,$$

que divide a

$5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32}$ y a $5^4 \cdot 2^{28} - 1$, también divide a su diferencia, que es F_5.

Se plantea naturalmente la pregunta acerca de que F_k sea primo para valores mayores de k. Actualmente sabemos que esto sucede sólo cuando divide a $3^{(F_k-1)/2} + 1$. Con este criterio, las computadoras electrónicas han señalado que F_k es un número compuesto cuando $5 \leqslant k \leqslant 16$. ¡Por lo tanto, no se volverá a intentar una construcción como la de Hermes!

EJERCICIOS

1. Verifíquese la construcción de Richmond del $\{5\}$ (figura 2.1*a*).
2. A partir de la construcción de Richmond del $\{17\}$, ¿cómo se inscribirá en la misma circunferencia $\{51\}$?

2.2 LA TRISECCION DE UN ANGULO

> *Al trisecar un ángulo dado, podemos proceder a encontrar el seno del ángulo –sea a– y, entonces, si x es el seno de un ángulo que mida la tercera parte del dado, tenemos* $4x^3 = 3x - a$.
>
> W. W. Rouse Ball (1850–1925)
>
> [Ball 1, pág. 327]

Es casi seguro que Gauss advirtió que su condición ciclotómica es tan necesaria como suficiente, pero nunca lo señaló de modo explícito. El paso que faltaba lo dio Wantzel,† que demostró que si los factores primos impares de n no son números primos de Fermat diferentes entre sí, $\{n\}$ no se puede construir con regla y compás. Por ejemplo, como 7 no es un primo de Fermat, los instrumentos de Euclides no bastan para el eptágono regular $\{7\}$; y como los factores de 9 no son distintos entre sí, lo mismo pasa con el eneágono $\{9\}$.

El problema de efectuar la trisección de un ángulo cualquiera con regla y compás ha estimulado la imaginación de los matemáticos tanto profesionales como amateur durante más de dos mil años [Ball 1, págs. 333-335]. Es fácil, por supuesto, trisecar determinados ángulos, como el recto. Pero si hubiera una manera de trisecar un ángulo cualquiera, se podría aplicar a un ángulo de

*Descubierta de nuevo por P. Kanagasabapathy, *Mathematical Gazette* **42** (1958) p. 310.
†P. L. Wantzel, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2 (1837), págs. 366-372.

60°, y entonces podríamos trazar el eneágono regular. Al considerar el teorema de Wantzel, podemos decir que desde 1837 se sabe que el problema clásico de la trisección carece de solución.

Por esta razón tal vez el teorema de Morley (§.1.9) no se descubrió hasta el siglo veinte: a la gente no le gustaba hablar de las trisectrices de un ángulo. Sin embargo, aunque las trisectrices no se puedan construir con regla y compás, existen otras maneras de encontrarlas [Cundy y Rollett **1**, págs. 208-211]. Aunque no se hubieran descubierto instrumentos más versátiles, el teorema seguiría teniendo significado. La mayor parte de los matemáticos acepta la existencia de cosas que no se han podido construir. Por ejemplo, se demostró en 1909 que los números de Fermat F_7 y F_8 son compuestos, pero aún no se han podido calcular sus mínimos factores primos.

EJERCICIO

El número $2^n + 1$ es compuesto cuando n no es potencia de 2.

2.3 ISOMETRIA

Una manera de describir la estructura del espacio, que preferían tanto Newton como Helmholtz, consiste en emplear la idea de congruencia. Las partes congruentes del espacio, V, V', son tales que las puede ocupar un mismo cuerpo rígido en dos de sus posiciones. Si se mueve el cuerpo de una a otra posición, la partícula del cuerpo que cubría un punto P de V cubrirá después un punto determinado de V', P', y así el resultado del movimiento es un mapeo $P \to P'$ de V en V'. Podemos extender el cuerpo rígido, ya sea de hecho o con la imaginación, de modo que cubra cualquier punto P del espacio, y en consecuencia el mapeo congruente $P \to P'$ puede extenderse a todo el espacio.

Hermann Weyl (1885-1955)

[Weyl **1**, pág. 43]

Encontraremos conveniente emplear la palabra *transformación* en el sentido especial de una correspondencia uno-a-uno $P \to P'$ entre todos los puntos del plano (o del espacio), es decir, una regla que asocia pares de puntos, donde se entiende que cada par se compone de un primer miembro P y un segundo miembro P', y que cada punto aparece como el primer miembro de un solo par y también como el segundo miembro de un solo par. Puede suceder que los miembros de un par coincidan, es decir, que P' coincida con P; en este caso, P se llama punto *invariante* (o "doble") de la transformación.

En particular, una *isometría* ("transformación congruente", o "congruencia") es una transformación que preserva la longitud, de manera que si (P, P') y (Q, Q') son dos pares de puntos correspondientes, determinarán los segmentos congruentes $PQ = P'Q'$: PQ y $P'Q'$. Por ejemplo, una *rotación* del plano en torno a P (o en torno a una recta que pase por P y sea perpendicular al plano) es una isometría en la que P es un punto

invariante, pero una *traslación* (o "desplazamiento" paralelo) carece de punto invariante: todos los puntos se mueven.

Una *reflexión* es una clase especial de isometría en la que los puntos invariantes son los de una recta (o de un plano) que se llama *espejo*.

Una clase más sencilla de transformación (tan sencilla que a primera vista puede parecer excesivamente trivial mencionarla) es la *identidad*, que deja a cada punto como estaba. El resultado de aplicar sucesivamente varias transformaciones en su *producto*. Si el producto de dos transformaciones es la identidad, cada una se llama *inversa* de la otra, y su producto en el orden inverso es también la identidad.

2.31. *Si en una isometría hay más de un punto invariante, es o bien la identidad, o bien una reflexión.*

Con el objeto de demostrar lo que acabamos de enunciar, sean A y B dos puntos invariantes y P un punto cualquiera que no esté en la recta AB (figura 1.3*b*). El punto correspondiente P', que satisface

$$AP' = AP, \qquad BP' = BP,$$

debe quedar en la circunferencia cuyo centro es A y cuyo radio es AP, y en la circunferencia cuyo centro es B y cuyo radio es BP. Como P no está en AB, las circunferencias no se tocan solamente, sino se intersectan en dos puntos, uno de los cuales es P. Por lo tanto, P es o bien P mismo, o su imagen por reflexión en AB.

2.4 SIMETRIA

¡Tigre! ¡Tigre! llama espléndida
En los bosques de la noche,
¿Qué inmortales manos o mirada
Se atrevieron a concebir tu pavorosa simetría? *

William Blake (1757–1827)

Cuando decimos que una figura es "simétrica" entendemos por ello que le podemos aplicar ciertas isometrías que se llaman *operaciones de simetría*, que dejan a la figura entera sin alteración mientras se permutan sus partes. Por ejemplo, las letras mayúsculas E y A (figura 2.4*a*) tiene simetría bilateral, y el espejo es horizontal en la primera y vertical en la segunda. La letra N (figura 2.4*b*) es simétrica por un semigiro o rotación de 180° ("reflexión en un punto" o "inversión central"), que se puede considerar como el resultado de reflejar horizontal y verticalmente, o viceversa. La svástica (figura 2.4*c*) es simétrica por rotación de ángulo recto en ángulo recto.

**Tyger! Tyger! burning bright*
In the forests of the night,
What immortal hand or eye
Dare frame thy fearful simmetry? (*T*)

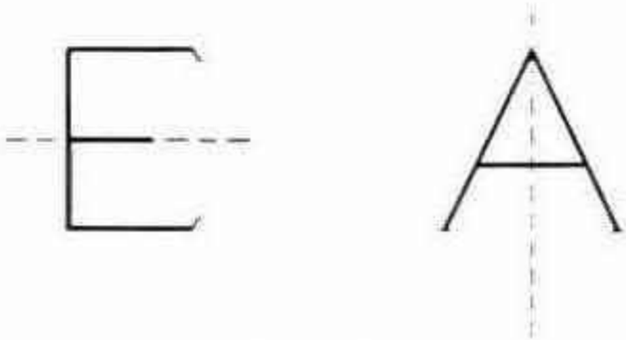


Figura 2.4a

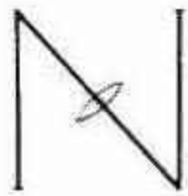


Figura 2.4b

Cuando se enumeran las operaciones de simetría que tiene una figura se acostumbra incluir a la identidad: en cualquier figura hay esta simetría trivial. Así, la svástica admite cuatro operaciones diferentes: rotaciones de 1, de 2, de 3 y de 4 ángulos rectos. La última es la identidad. La primera y la tercera son inversas entre sí, pues su producto es la identidad.

El empleo que se hace de la palabra "producto" sugiere una simbología algebraica en la que las transformaciones se denotarán por mayúsculas y la identidad por 1. (Algunos autores la denotan por E en lugar de 1.) Sea S igual a un cuarto de giro en el sentido contrario al de las manecillas del reloj; tendremos que las cuatro operaciones de simetría de la svástica son

$$S, \quad S^2, \quad S^3 = S^{-1} \quad \text{y} \quad S^4 = 1.$$

Decimos que S es de período cuatro debido a que la potencia menor a la que se ha de elevar S para obtener la identidad es la cuarta. De la misma manera, el semigiro S^2 es de período 2 [véase Coxeter **1**, pág. 39]. La única transformación de período 1 es la identidad. Una traslación es aperiódica (es decir, carece de período) pero por convenio se dice que es de período infinito.

Hay figuras que admiten simultáneamente como operaciones de simetría rotaciones y reflexiones. La letra H (figura 2.4*d*) tiene un espejo horizontal (como E) y uno vertical (como A), y, además, un centro de simetría rotacional (como N) en el punto donde los dos espejos se intersectan. Y, de esta manera, posee cuatro operaciones de simetría: la identidad, 1, la reflexión horizontal R_1, la reflexión vertical R_2 y el semigiro $R_1R_2 = R_2R_1$.

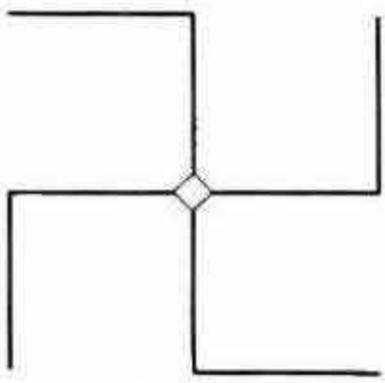


Figura 2.4c

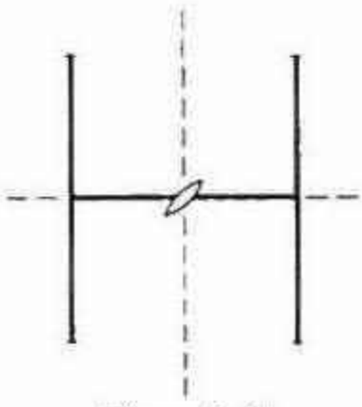


Figura 2.4d

EJERCICIOS

1. Toda isometría de período 2 es o bien una reflexión o bien un semigiro [Bachmann **1**, págs. 2–3].

2. Exprésense (*a*) un semigiro, (*b*) la cuarta parte de un giro, como transformaciones de (i) coordenadas cartesianas, (ii) coordenadas polares. (Tómese el origen como centro de rotación.)

2.5 GRUPOS

La simetría, ya sea que se defina en un sentido amplio o restringido, es una idea por medio de la que el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección.

Hermann Weyl [**1**, pág. 5]

Un conjunto de transformaciones [Birkhoff y MacLane **1**, págs. 115–118] forma un grupo cuando contiene a la inversa de cada una y al producto de dos cualquiera (incluso el producto de una consigo misma o con su inversa). El número de transformaciones diferentes entre sí se llama *orden* del grupo. (El orden puede ser finito o infinito.) Es claro que las operaciones de simetría de cualquier figura forman un grupo, que se denomina *grupo de simetría* de la figura en cuestión. En el caso extremo, cuando la figura es completamente irregular (como sucede con la numeral 6) su grupo de simetría es de orden 1, y consiste solamente en la identidad.

El grupo de simetría de las letras E y A (figura 2.4*a*) se suele llamar grupo *diedral* de orden 2, generado por una sola reflexión, que se denota por D_1. (El nombre es fácil de recordar, pues la raíz griega de "diedral" es casi equivalente a la latina de "bilateral".) El grupo de simetría de la letra N (figura 2.4*b*) es también de orden 2, pero en este caso el generador es un semigiro, y aquí hablamos del grupo *cíclico* C_2. Ambos grupos, D_1 y C_2, son, desde el punto de vista abstracto, idénticos o *isomórficos*; son diferentes representaciones geométricas de un solo grupo abstracto de orden 2, que se define por medio de la relación

2.51 $$R^2 = 1$$

o también $R = R^{-1}$ [Coxeter y Moser **1**, pág. 1].

El grupo de simetría de la svástica es C_4, el grupo cíclico de orden 4, que genera el cuarto de giro S, y se define en lo abstracto por medio de la relación $S^4 = 1$. El de la letra H (figura 2.4*d*) es D_2, el grupo diedral de orden 4 que generan las dos reflexiones R_1, R_2, y se define en lo abstracto por medio de las relaciones

2.52 $$R_1^2 = 1, \quad R_2^2 = 1, \quad R_1R_2 = R_2R_1.$$

Aunque C_4 y D_2 son ambos de orden 4, *no* son isomórficos: tienen estructuras diferentes, es decir "tablas de multiplicación" propias. Para

entender esto basta con observar que C_4 contiene dos operaciones de período 4, mientras todas las operaciones en D_2 (con la excepción de la identidad) son de período 2: los generadores de un modo evidente, pero también sus productos, puesto que

$$(R_1R_2)^2 = R_1R_2R_1R_2 = R_1R_2R_2R_1 = R_1R_2^2R_1 = R_1R_1 = R_1^2 = 1.$$

La última observación señala con claridad el significado de la afirmación de que 2.52 es una *definición abstracta* de D_2, a saber, que toda relación válida en la que intervienen los generadores R_1, R_2 es una consecuencia algebraica de estas sencillas relaciones. Una definición abstracta del mismo grupo que se presenta como alterna es

2.53 $$R_1^2 = 1, \quad R_2^2 = 1, \quad (R_1R_2)^2 = 1,$$

a partir de donde podemos deducir con facilidad $R_1R_2 = R_2R_1$.

El grupo cíclico general C_n, de orden n, se define en lo abstracto como

2.54 $$S^n = 1.$$

Su único generador S, de período n, queda representado de modo conveniente por una rotación a través de $360°/n$. Entonces tenemos que S^k es una rotación a través de k veces este ángulo, y las n operaciones de C_n se determinan por valores de k desde 1 hasta n, de 0 a $n-1$. En particular, C_5 se presenta en la naturaleza como el grupo de simetría de la margarita.

EJERCICIO

Exprésese una rotación a través del ángulo α con respecto al origen como una transformación de (i) coordenadas polares, (ii) coordenadas cartesianas. Sea $f(r, \theta) = 0$ la ecuación de una curva en coordenadas polares; ¿cuál es la ecuación de la curva transformada?

2.6 EL PRODUCTO DE DOS REFLEXIONES

Tú, en tu lago, te contemplas
A ti mismo.

J. M. Legaré (1823–1859)
(A un lirio)

En cualquier grupo de transformaciones, la ley asociativa

$$(RS)T = R(ST)$$

se cumple de manera automática, pero la ley conmutativa

$$RS = SR$$

no se satisface necesariamente, y se ha de tener cuidado al invertir un producto, como, por ejemplo,

$$(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1},$$

y no $R^{-1}S^{-1}$. (Esto se comprende con más claridad al comparar a R y S con las operaciones de ponernos los calcetines y los zapatos, respectivamente.)

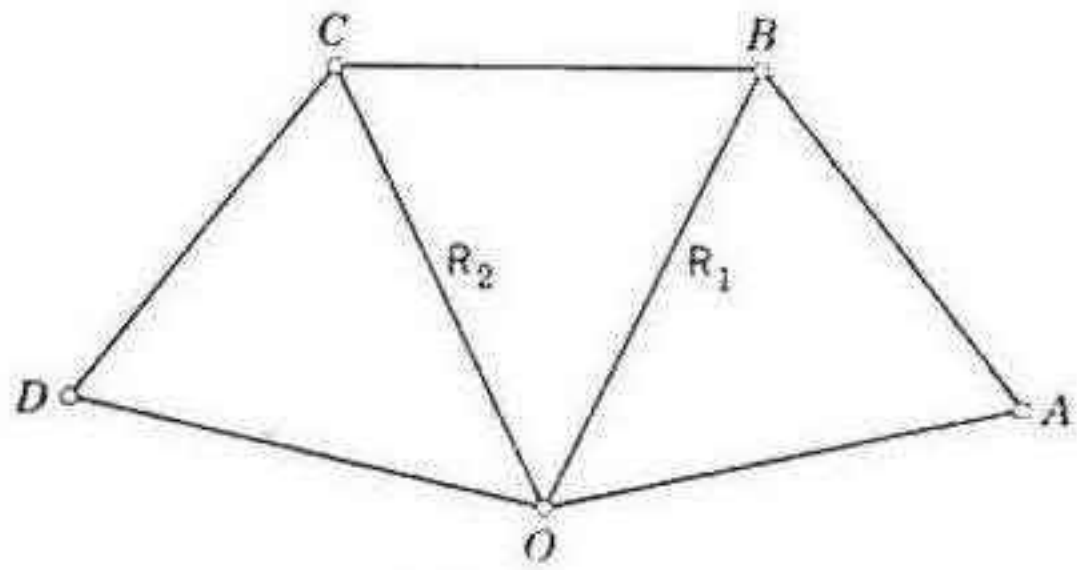


Figura 2.6a

El producto de las reflexiones en dos rectas (o planos) que se intersectan es una rotación que recorre un ángulo de una magnitud dos veces mayor que el que hay entre ellas. De hecho, si tenemos A, B, C, D... a los mismos espacios en una circunferencia cuyo centro es O, podemos designar R_1 y R_2 las reflexiones en OB y OC (figura 2.6*a*). Entonces, R_1 reflejará el triángulo OAB en el OCB, que a su vez R_2 reflejará en OCD; de esta manera, R_1R_2 es la rotación que recorre $\angle AOC$, o $\angle BOD$, es decir, el doble de $\angle BOC$. Como una rotación se determina por completo a partir de su centro y su ángulo, R_1R_2 es igual al producto de las reflexiones en dos rectas cualquiera que pasen por O al mismo ángulo que forman OB y OC. (Las reflexiones en OA y OB son en realidad $R_1R_2R_1$ y R_1, cuyo producto es $R_1R_2R_1^2 = R_1R_2$.) En particular, tenemos que el semigiro en torno a O es el producto de reflexiones en dos rectas perpendiculares cualquiera que pasen por O.

Como R_1R_2 es una rotación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, R_2R_1 será la rotación en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a la primera; de hecho, tendremos

$$R_2R_1 = R_2^{-1}R_1^{-1} = (R_1R_2)^{-1}.$$

Que es lo mismo que R_1R_2 si ambos espejos forman ángulos rectos, en cuyo caso R_1R_2 es un semigiro y $(R_1R_2)^2 = 1$.

EJERCICIOS

1. El producto de cuartos de giro (en el mismo sentido) alrededor de C y B es el semigiro alrededor del centro de un cuadrado cuyo lado es BC.

2. Sean los cuadrados $ACPQ$ y $BARS$ sobre los lados AC y BA de un triángulo ABC. Si tenemos que B y C quedan fijos mientras A varía libremente, PS pasa por un punto fijo.

2.7 EL KALEIDOSCOPIO

r D_2 es un caso especial del grupo diedral general D_n, que cuando $n > 2$, es el grupo de simetría del *en*égono regular, n. (Véase la figura 2.7*a*, que contiene los casos $n = 3, 4, 5$.) Es evidente que se trata de un grupo de orden $2n$, consistente en n rotaciones (en las que recorre los múltiplos efectivamente diferentes entre sí de $360°/n$, cuyo número es n) y n reflexiones. Cuando n es impar, por medio de cada uno de los n espejos se une un vértice con el punto medio del lado opuesto; cuando n es par, los pares de vértices opuestos quedan unidos por $\frac{1}{2}n$ espejos, y los pares de lados opuestos son bisecados por $\frac{1}{2}n$ espejos [véase Birkhoff y MacLane **1**, págs. 117-118, 135].

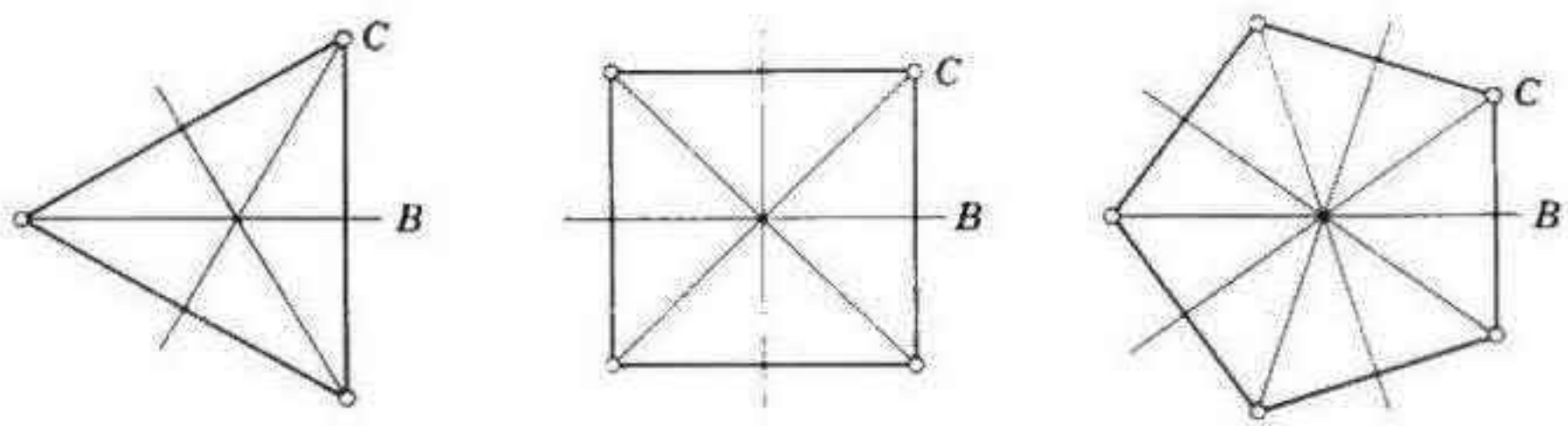


Figura 2.7a

Las n rotaciones son precisamente las operaciones del grupo cíclico C_n. Así, tenemos que las operaciones de D_n incluyen a todas las de C_n. si empleamos el lenguaje técnico, diremos que C_n es un *subgrupo* de D_n. La rotación que recorre $360°/n$ y que genera el subgrupo, puede describirse como el producto de reflexiones $S = R_1 R_2$ en dos espejos adyacentes (como OB y OC en la figura 2.7*a*) cuyo ángulo de inclinación es de $180°/n$.

Denotemos las n reflexiones en su orden natural por $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Entonces, $R_1 R_{k+1}$, que es el producto de reflexiones en dos espejos cuya inclinación es de k veces $180°/n$, es una rotación que recorre k veces el ángulo $360°/n$:

$$R_1 R_{k+1} = S^k.$$

Así, $R_{k+1} = R_1 S^k$, y las n reflexiones se pueden expresar como

$$R_1, R_1 S, R_1 S^2, \ldots, R_1 S^{n-1}.$$

En otras palabras, D_n es generado por R_1 y S. Al substituir $R_1 R_2$ en lugar de S, veremos que el mismo grupo es generado igualmente por R_1 y por R_2, que cumplen con las relaciones

2.71 $$R_1^2 = 1, \quad R_2^2 = 1, \quad (R_1 R_2)^n = 1.$$

(Las dos primeras relaciones provienen de 2.51 y la tercera de 2.54.) Se

demuestra que estas relaciones son suficientes para una definición abstracta [véase Coxeter y Moser **1**, págs. 6, 36].

Una manera práctica de construir un modelo de D_n consiste en unir por medio de una bisagra dos espejos comunes y colocarlos uno con respecto al otro como OB lo está con OC en la figura 2.7*a*, de manera que formen un ángulo de $180°/n$. Cualquier objeto que se coloque entre los espejos se reflejará en $2n$ imágenes (contando también al objeto). Si el objeto es la mano derecha, habrá n imágenes con apariencia de mano izquierda, y esto ejemplifica el principio de que el producto de cualquier número par de reflexiones lo invierte, debido a que una reflexión invierte el sentido.

Parece que fue Athanasius Kircher, en 1646, el primero que publicó una descripción de este instrumento. El nombre *kaleidoscopio* (de καλος, bello; ειδος, forma, y σκοπειν, ver) lo acuñó Sir David Brewster, que escribió un tratado de su teoría y su historia. En él desaprobaba [Brewster **1**, pág. 147] que Kircher permitiera que el ángulo entre los espejos fuera cualquier submúltiplo de 360° en lugar de restringirlo a los submúltiplos de 180°.

El caso de $n = 2$ es, por supuesto, familiar a cualquiera. De pie entre dos espejos perpendiculares (como los hay a veces en el rincón de un cuarto), podemos ver nuestra imagen en cada uno, y también la imagen de la imagen, que es la manera en que otro nos observa.

Como hemos escogido el símbolo D_n para el grupo diedral que generan las reflexiones en dos planos dispuestos a un ángulo "diedral" de $180°/n$, extenderemos nuestra notación, como es natural, de manera que abarque también el valor extremo de $n = 1$. Así, D_1 es el grupo de orden 2 que genera una sola reflexión, es decir, el grupo de simetría de las letras E o A, mientras el grupo isomórfico C_2, que genera un semigiro, es el grupo de simetría de la letra N.

Según Weyl [1, págs. 66, 69], se debe a Leonardo da Vinci el descubrimiento de que los únicos grupos finitos de isometrías en el plano son

$$C_1, C_2, C_3, \ldots,$$
$$D_1, D_2, D_3, \ldots.$$

El tema le interesaba desde el punto de vista de los planos arquitectónicos. Los grupos predominantes en la arquitectura han sido, por supuesto, siempre D_1 y D_2. Pero en las pirámides de Egipto se exhibe el grupo D_4, y la indicación de Leonardo se ha seguido en cierta medida en tiempos recientes: el edificio del Pentágono en Washington tiene el grupo de simetría D_5, y el Templo Bahai, que está cerca de Chicago, tiene el D_9. En la naturaleza, encontramos muchas flores con grupos diedrales de simetría como el D_6. El grupo de simetría de un copo de nieve suele ser el D_6 y sólo ocasionalmente el D_3. [Kepler 1, págs. 259–280.]

Si se corta una manzana de la manera en la que casi toda la gente corta una naranja, se verá que su corazón tiene el grupo de simetría D_5. Al extender la estrella de cinco puntas por medio de cortes rectos en cada mitad, se divide toda la manzana en diez trozos, y de cada uno de ellos se puede retirar el corazón en la forma de dos hojuelas muy delgadas.

EJERCICIOS

1. Descríbanse los grupos de simetría de

(a) un triángulo escaleno,
(b) un triángulo isósceles,
(c) una parábola
(d) un paralelogramo
(e) un rombo
(f) un rectángulo
(g) una elipse

2. Demuéstrese algebraicamente, por medio de la ley asociativa y el concepto de transformación inversa, la "regla de cancelación" que afirma que la relación

$$RT = ST$$

implica $R = S$.

3. Señálese la manera en la que las relaciones definitorias acostumbradas de D_3, a saber, 2.71 cuando $n = 3$, se pueden deducir algebraicamente de las relaciones más sencillas

$$R_1^2 = 1, \quad R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2.$$

4. El grupo cíclico C_m es un subgrupo de C_n si y sólo si el número m es un divisor de n. En particular, si n es primo, los únicos subgrupos de C_n son el mismo C_n y C_1.

2.8 POLIGONOS EN FORMA DE ESTRELLA

En lugar de haber derivado el grupo diedral D_n del polígono regular $\{n\}$, podríamos haber derivado el polígono del grupo: los vértices del polígono son precisamente las n imágenes de un punto P_0 (C en la figura 2.7*a*) en uno de los dos espejos del kaleidoscopio. Y ni siquiera necesitamos de la totalidad del grupo, D_n: su subgrupo C_n será suficiente. El vértice P_k del polígono $P_0P_1 \ldots P_{n-1}$ puede derivarse a partir del vértice inicial P_0 por medio de una rotación que recorra un ángulo de k veces $360°/n$.

De un modo más general, las rotaciones alrededor de un punto fijo O que recorren ángulos θ, $2\theta, 3\theta, \ldots$ transforman un punto cualquiera P_0 (distinto de O) en puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots$ en la circunferencia cuyo centro es O y cuyo radio es OP_0. En general, estos puntos se hacen más y más densos sobre la circunferencia; pero si el ángulo θ es conmensurable con un ángulo recto, serán distintos solamente un número finito de ellos. En lo particular, si $\theta = 360°/n$, donde n es un entero positivo mayor que 2, entonces habrá n puntos P_k, cuyas rectas de unión

$$P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_0$$

son sucesivamente los lados de un *enégono* regular ordinario.

Extendamos esta idea al permitir que n sea cualquier número racional mayor que 2, digamos la fracción p/d, donde p y d son primos entre sí. De acuerdo con esto, definiremos un *polígono regular* (generalizado) $\{n\}$, donde $n = p/d$. Sus p vértices se han derivado de P_0 por medio de rotaciones sucesivas que recorren $360°/n$, y sus p lados (que encierran al centro d veces) son

$$P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{p-1}P_0.$$

Como un rayo proveniente del centro que no pase por un vértice cortará d de los p lados, este denominador d será la *densidad* del polígono [Coxeter **1**, págs. 93–94]. Cuando $d = 1$, de modo que $n = p$, tenemos el *pégono* regular ordinario, $\{p\}$. Cuando $d > 1$, los lados se cruzan unos a otros, pero los puntos en los que se cruzan no cuentan como vértices. Como d puede ser cualquier entero positivo primo con respecto a p y menor que $\frac{1}{2}p$, hay un polígono regular $\{n\}$ que corresponde a cada racional $n > 2$. De hecho, a

veces resulta conveniente incluir también al *digono* $\{2\}$, aunque sus dos lados coinciden.

Cuando $p = 5$ tenemos el pentágono $\{5\}$ de densidad 1 y el *pentagrama* $\{\frac{5}{2}\}$ de densidad 2, que los babilonios y los pitagóricos usaban como símbolo de significado especial. De la misma manera, el *octagrama* $\{\frac{8}{3}\}$ y el *decagrama* $\{\frac{10}{3}\}$ tienen densidades 3, mientras el *dodecagrama* $\{\frac{12}{5}\}$ tiene densidad 5 (figura 2.8*a*). Estos polígonos, en particular, tienen nombres además de símbolos porque se presentan como caras de poliedros y mosaicos interesantes.*

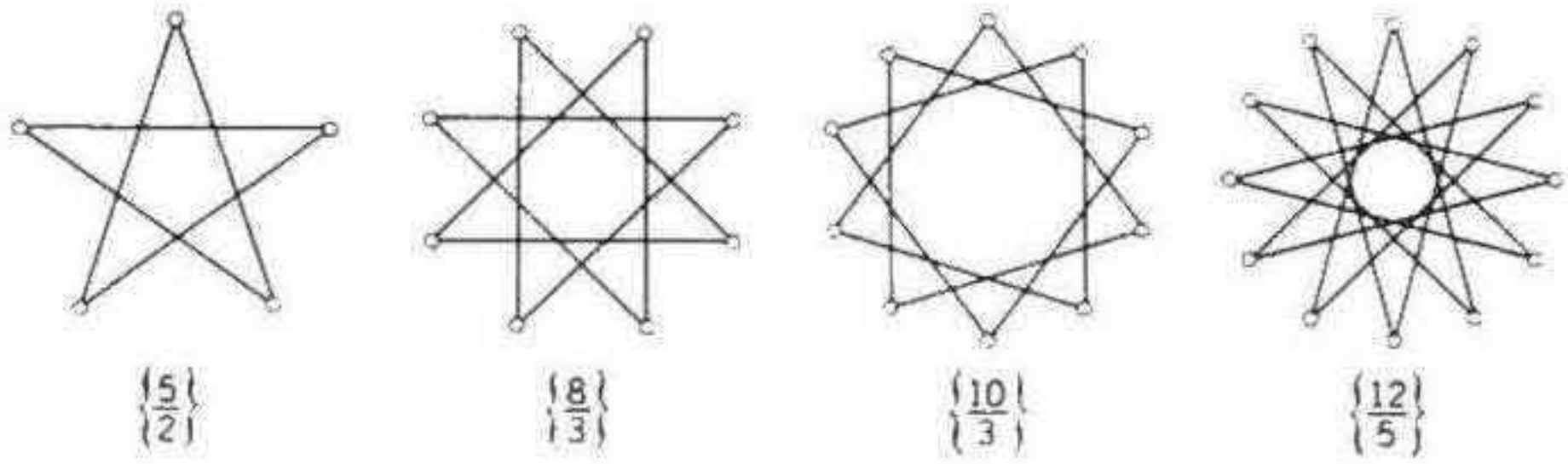


Figura 2.8a

Los polígonos en los que $d > 1$ se suelen llamar polígonos de *estrella*. Se usan mucho con fines decorativos. El estudio matemático más antiguo acerca de ellos se debe a Thomas Bradwardine (1290–1349), que durante el último mes de su vida fue arzobispo de Canterbury. El gran científico alemán Kepler (1571–1630) también los estudió [véase Coxeter **1**, pág. 114]. El primero que los simbolizó numéricamente fue el matemático suizo L. Schläfli (1814–1895), con una notación como $\{p/d\}$. La notación se justifica debido a que se presentan fórmulas que se cumplen igualmente para $\{n\}$ cuando n es entero y cuando es una fracción. Por ejemplo, cualquier lado de $\{n\}$ forma con el centro O un triángulo isósceles OP_0P_1 (figura 2.8*b*) con un ángulo en O que mide $2\pi/n$. (Hemos escrito 2π en lugar de 360°, haciendo uso de la medida en radianes, debido a que la introducción de ideas trigonométricas lo hace conveniente.) La base de este triángulo isósceles, que es el lado de un polígono, queda denotada convenientemente por $2l$. Los demás lados del triángulo son iguales al circunradio R del polígono. La altura de la mediana desde O es el inradio r del polígono. Y así tenemos

2.81 $$R = l \csc \frac{\pi}{n}, \qquad r = l \cot \frac{\pi}{n}.$$

Si $n = p/d$, el área del polígono queda naturalmente definida como la suma de las áreas de los p triángulos isósceles, a saber

2.82 $$plr = pl^2 \cot \frac{\pi}{n}.$$

*H. S. M. Coxeter, M. S. Longuet-Higgins y J. C. P. Miller, Uniform Polyhedra, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A, **246** (1954), págs. 401-450.

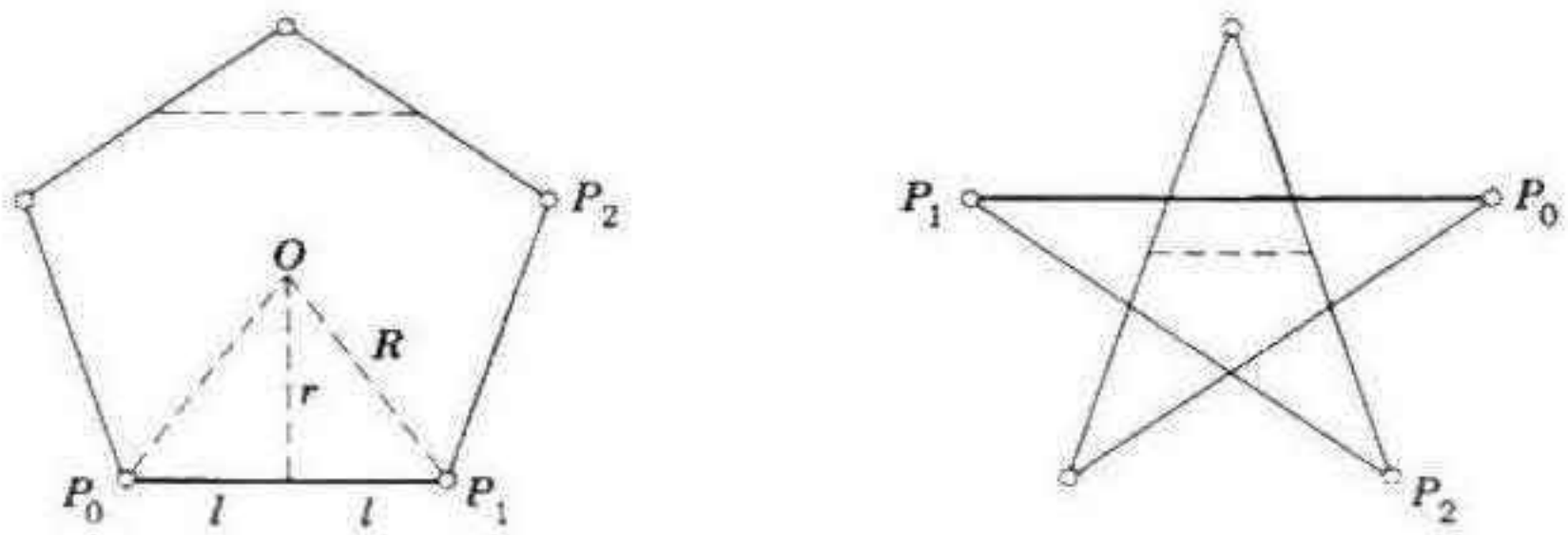


Figura 2.8b

Cuando $d = 1$, esto es simplemente $pl^2 \cot \pi/p$; en otros casos, la definición de área que hemos dado tiene como efecto que cada parte del interior es contada un número de veces igual a la "densidad local" de esa parte: por ejemplo, la región pentagonal en la mitad del pentagrama $\{\frac{5}{2}\}$ se cuenta dos veces.

El ángulo $P_0P_1P_2$ que forman dos lados adyacentes de $\{n\}$, como es la suma de los ángulos de la base del triángulo isósceles, viene a ser el suplemento de $2\pi/n$, es decir

2.83 $$\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi .$$

El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados adyacentes se llama *figura vertical* de $\{n\}$. Es claro que mide

2.84 $$2l \cos \frac{\pi}{n}$$

[Coxeter **1**, págs. 16, 94].

EJERCICIOS

1. Si son iguales los lados de un polígono inscrito en una circunferencia, el polígono es regular.

2. Si un polígono inscrito en una circunferencia tiene un número impar de vértices y sin son iguales todos sus ángulos, el polígono es regular. (Marcel Riesz.)

3. Encuéntrese el valor de los ángulos de los polígonos

$$\{5\},\quad \{\tfrac{5}{2}\},\quad \{9\},\quad \{\tfrac{9}{2}\},\quad \{\tfrac{9}{4}\}.$$

4. Encuéntrese los radios y figuras verticiales de los polígonos.

$$\{8\},\quad \{\tfrac{8}{3}\},\quad \{12\},\quad \{\tfrac{12}{5}\}.$$

5. Obténganse las coordenadas polares del $k$ésimo vértice P_k de un polígono $\{n\}$ de circunradio 1, con el centro en el polo, si se toma P_0 como $(1, 0)$.

6. ¿Se puede cortar un pastel cuadrado en nueve rebanadas de manera que cada quien tenga la misma cantidad de pastel y de cubierta?

3

Isometría en el plano euclidiano

Es natural, pues hemos estado hablando de reflexiones, rotaciones y traslaciones, que nos preguntemos por qué tenemos en la rotación y en la traslación un desplazamiento (o "movimiento") continuo, cuando así se le considera, mientras no podemos hacerlo así con una reflexión. Y también es razonable la pregunta que inquiere por alguna otra clase de isometría que se parezca en este aspecto a la reflexión. Cuando hayamos respondido a estas preguntas en términos de "sentido", la información nos servirá para demostrar un notable teorema (§3.6) y para describir las siete maneras posibles de repetir un diseño en una franja sin fin (§3.7).

3.1 ISOMETRIAS DIRECTAS Y OPUESTAS

*"Cuida del sentido, pues entonces los sonidos se cuidarán solos."**

Lewis Carroll

[Dodgson I, Capítulo 9]

Al hacer varias aplicaciones del Axioma 1.26 se puede demostrar que un punto cualquiera P que está en el plano de dos triángulos congruentes ABC, $A'B'C'$ determina un punto correspondiente P' tal que $AP = A'P'$, $BP = B'P'$, $CP = C'P'$. De la misma manera, de otro punto Q se tiene Q', y $PQ = P'Q'$. En consecuencia,

3.11 *Dos triángulos congruentes cualquiera se relacionan por medio de una isometría única.*

Vimos en §1.3 que en la demostración de Papo de *Pons asinorum*

* "Take care of the sense, and the sounds will take care of themselves."

intervenía la comparación de dos triángulos coincidentes ABC, ACB. Podemos ver de una manera intuitiva que aquí hay una distinción de *sentido*: si uno es el contrario al de las manecillas del reloj, el otro es el de las manecillas del reloj. Tenemos una propiedad "topológica" del plano euclidiano en que la distinción se puede extender de los triángulos que coinciden a los que son distintos: dos triángulos "dirigidos" cualquiera, ABC y $A'B'C'$ o bien tienen el mismo sentido, o bien tienen sentidos diferentes. (Esta idea intuitiva se puede investigar de manera más profunda en Veblen y Young [2, págs. 61–62] o en Denk y Hofmann [1, pág. 56].)

Si ABC y $A'B'C'$ son congruentes, se dice que la isometría con la que se relacionan es *directa* u *opuesta* según conserve o invierta el sentido, es decir, de acuerdo con que ABC y $A'B'C'$ tengan sentidos iguales o distintos. Se observa con facilidad que esta propiedad de la isometría no depende del triángulo ABC que se escoja: si una misma isometría relaciona a DEF con $D'E'F'$, donde DEF tiene el mismo sentido que ABC entonces $D'E'F'$ tiene el mismo sentido que $A'B'C'$. Es claro que las isometrías directas y opuestas se combinan como los números positivos y negativos (por ejemplo, el producto de dos isometrías opuestas es una directa). Como una reflexión es opuesta, una rotación (que es el producto de dos reflexiones) es directa. En particular, la identidad es directa. Algunos autores se refieren a las isometrías directas y opuestas como "desplazamientos y reversiones" o también como "congruencias propias e impropias."

El teorema 2.31 puede extenderse de la manera siguiente:

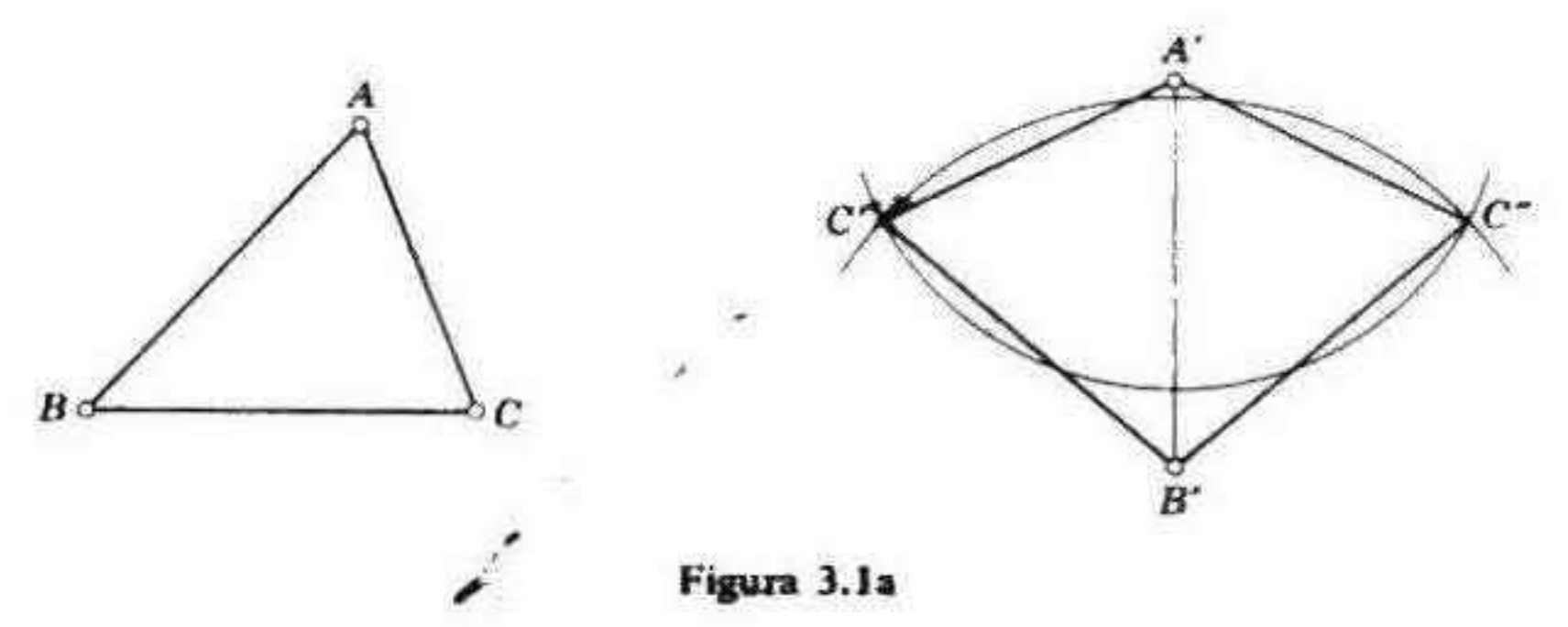


Figura 3.1a

3.12 *Si se dan dos segmentos de recta (o pares de puntos) congruentes AB, $A'B'$, se relacionan por medio de dos isometrías: una directa y una opuesta.*

Para demostrarlo, tómese un punto cualquiera C que no esté en la recta AB, y constrúyase C', de manera que el triángulo $A'B'C'$ sea congruente con ABC. Las dos posiciones posibles de C' (que en la figura 3.1*a* se han señalado como C', C'') proporcionan ambas isometrías. Puesto que cualquiera de ellas se puede derivar de la otra si se la refleja en $A'B'$, una de las isometrías es directa y la otra es opuesta.

Con el objeto de que el estudio sea completo, necesitamos el teorema siguiente [Bachmann **1**, pág. 3]:

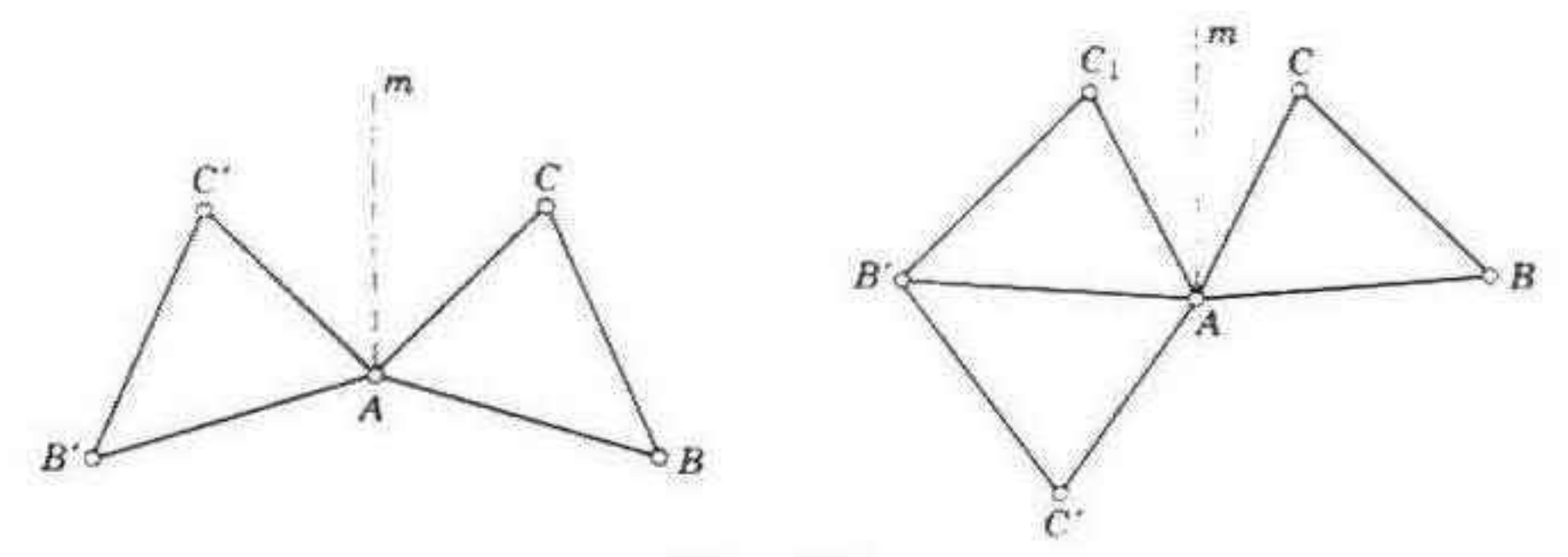


Figura 3.1b

3.13 *Cada isometría del plano es producto de no más de tres reflexiones. Cuando hay un punto invariante, el "tres" se puede reemplazar por "dos."*

Esto lo demostraremos en cuatro pasos por medio de 3.11. Si los triángulos ABC, $A'B'C'$ coinciden, la isometría es la identidad, trivialmente (la identidad es el producto de una reflexión consigo misma). Si A coincide con A', y B con B', mientras C y C' son distintos, los triángulos se relacionan por la reflexión en AB. El caso en el que solamente A coincide con A' se puede reducir a uno de los casos anteriores al reflejar ABC en m, la mediatriz de BB' (véase la figura 3.1*b*). Por último, el caso general se puede reducir a cualquiera de los tres primeros al reflejar ABC en la mediatriz de AA' [Coxeter **1**, pág. 35].

Como una reflexión invierte el sentido, una isometría es directa u opuesta de acuerdo con que sea producto de un número par o impar de reflexiones.

Como la identidad es producto de dos reflexiones (a saber, de cualquier reflexión consigo misma), podemos decir con sencillez que una isometría cualquiera es el producto de *dos* o de *tres* reflexiones, según se tenga que sea directa u opuesta. En lo particular,

3.14 *Toda isometría con un punto invariante es una rotación o una reflexión, según sea directa u opuesta.*

EJERCICIOS

1. Menciónense dos isometrías directas.
2. Menciónese una isometría opuesta. ¿Hay alguna otra clase?
3. Si AB y $A'B'$ se relacionan por medio de una rotación ¿cómo se puede construir el centro de rotación? (*Indicación*: Las mediatrices de AA' y de BB' no son necesariamente diferentes.)
4. El producto de reflexiones en tres rectas que pasan por un punto es otra recta que pasa por el mismo punto [Bachmann **1**, pág. 5].

3.2 TRASLACION

Y siguió (Enoc) caminando en pos de Dios, y desapareció, porque Dios le trasladó

Génesis V, 24

Hasta aquí hemos venido considerando ciertas isometrías, a saber, reflexiones (que son opuestas) y rotaciones (que son directas), que siempre tienen por lo menos un punto invariante. Una isometría conocida que no deja ningún punto como invariante es la *traslación* [Bachmann 1, pág. 7], que se puede describir como el producto de semigiros alrededor de dos puntos distintos O, O' (figura 3.2*a*). El primer semigiro transforma a un punto arbitrario P en P^H, y el segundo, a su vez, transforma a éste en P^T, con el resultado final de que PP^T *es paralelo a* OO' *y de doble longitud*. Así, tenemos que la longitud y la dirección de PP^T son constantes e independientes de la posición de P. Puesto que su longitud y su dirección determinan por completo a una traslación, el producto de los semigiros alrededor de O y de O' es igual al producto de semigiros alrededor de Q y de Q', donde QQ' es igual y paralelo a OO'. (Esto significa que $OO'QQ'$ es un paralelogramo que se puede derrumbar para formar cuatro puntos colineales, como se tiene en la (figura 3.2*a*.) Así, dada una traslación, se le puede asignar arbitrariamente el centro de uno de los dos semigiros.

3.21 *El producto de dos traslaciones es otra traslación.*

Veamos: podemos disponer los centros de manera que la primera traslación sea producto de semigiros alrededor de O_1 y O_2, mientras la segunda resulte del producto de semigiros alrededor de O_2 y O_3. Al combinarse, se cancelan mutuamente los semigiros alrededor de O_2, lo que nos deja solamente el producto de semigiros alrededor de O_1 y de O_3.

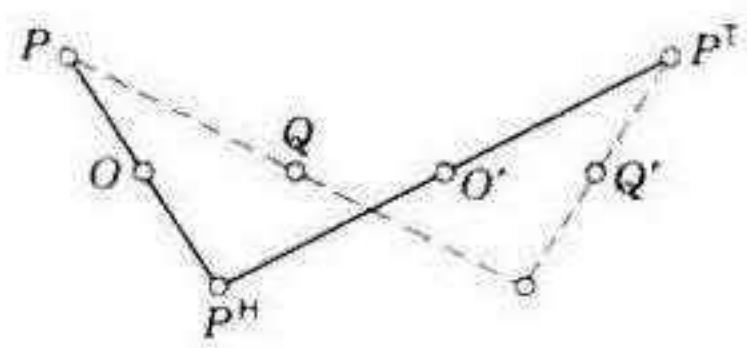


Figura 3.2a

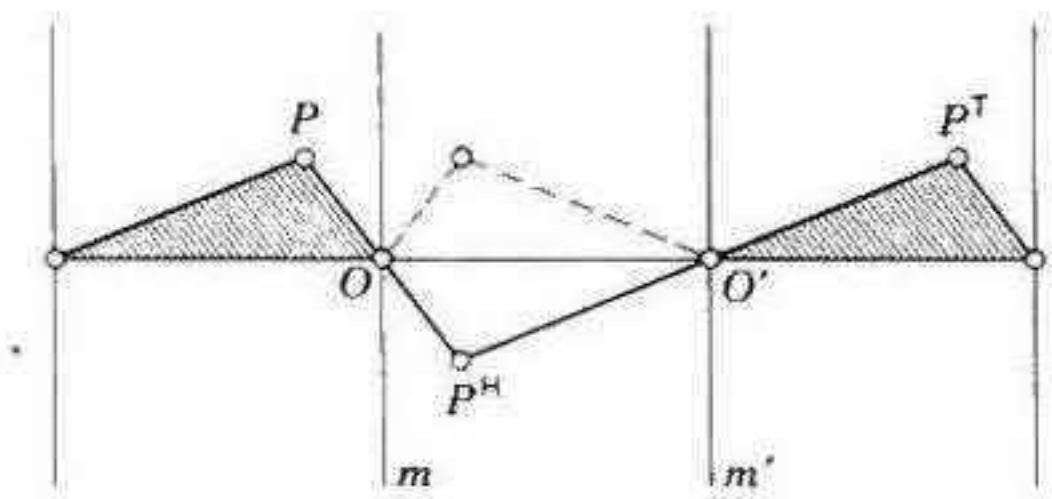


Figura 3.2b

De la misma manera, si m y m' (figura 3.2*b*) son las rectas que pasan por O y O' y son perpendiculares a OO', los semigiros alrededor de O y O' son producto de las reflexiones en m y en OO', OO' y m'. Al combinarse, las dos reflexiones en OO' se cancelan mutuamente, y no nos queda sino el producto de las reflexiones en m y en m'. En consecuencia

3.22 *El producto de reflexiones en dos espejos paralelos es una traslación que recorre el doble de la distancia entre los espejos.*

Si la traslación T lleva a P y P^T y a Q hasta Q^T, tendremos que el segmento QQ^T es igual y paralelo con respecto a PP^T; por lo tanto, PQQ^TP^T es un paralelogramo. De la misma manera, si otra traslación U coloca a P en Q, llevará también a P^T hasta Q^T; por lo tanto,

$$TU = UT.$$

(Si queremos examinarlo en detalle, veremos que si Q es P^U, Q^T será P^{UT}. Pero U traslada a P^T hasta P^{TU}. Por lo tanto, P^{TU} y P^{UT} coinciden para toda posición de P.) En otras palabras,

3.23 *Las traslaciones son conmutativas.*

El producto de un semigiro H y una traslación T es otro semigiro; pues siempre podremos expresar la traslación como producto de dos semigiros, uno de los cuales es H, por ejemplo, $T = HH'$, y entonces tendremos que

$$HT = H^2H' = H';$$

3.24 *El producto de un semigiro y una traslación es otro semigiro.*

EJERCICIOS

1. Si T es el producto de semigiros alrededor de O y O', ¿cuál será el producto de semigiros alrededor de O' y O?
2. Al expresar una traslación como producto de dos reflexiones, ¿en qué medida se puede tomar arbitrariamente uno de los dos espejos?
3. ¿Qué es el producto de rotaciones que recorren ángulos opuestos (α y $-\alpha$) alrededor de dos puntos distintos?
4. El producto de las reflexiones en tres rectas paralelas es la reflexión en otra recta que pertenece al mismo haz de paralelas.
5. Todo producto de tres semigiros es un semigiro [Bachmann 1, pág. 7].
6. Si H_1, H_2, H_3 son semigiros, $H_1H_2H_3 = H_3H_2H_1$.
7. Exprésese la traslación que recorre una distancia a a lo largo del eje de las x como una transformación de coordenadas cartesianas. Si $f(x, y) = 0$ es la ecuación de una curva ¿cuál será la ecuación de la curva transformada? Considérese, como ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

3.3 REFLEXION EN DESLIZAMIENTO

Conocemos ya tres clases de isometría: reflexión, rotación y traslación. Otra clase la constituye la *reflexión en deslizamiento* (o, con más sencillez, "deslizamiento"), que es el producto de la reflexión en una recta a y la traslación a lo largo de la misma recta. Si nos representamos la recta como un camino en la nieve, tendremos huellas consecutivas que se relacionan entre sí por medio de un deslizamiento. Una isometría como ésta queda determinada por su eje a y por la expresión de la traslación componente. Como una reflexión es opuesta mientras una traslación es directa, su producto será

una isometría opuesta. Decimos, entonces, que una reflexión en deslizamiento es una isometría opuesta que carece de punto invariante [Coxeter 1, pág. 36].

Si una reflexión en deslizamiento G transforma un punto arbitrario P en P^G (figura 3.3*a*), P y P^G equidistan del eje a desde lados opuestos. En consecuencia,

Por el punto medio del segmento de recta PP^G pasa el eje, para toda posición de P.

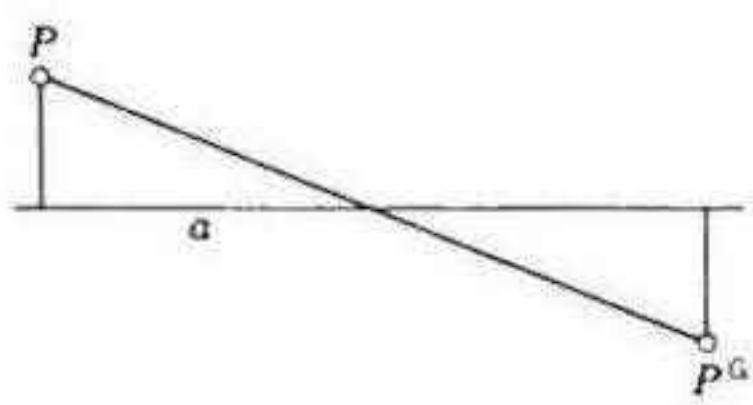


Figura 3.3a

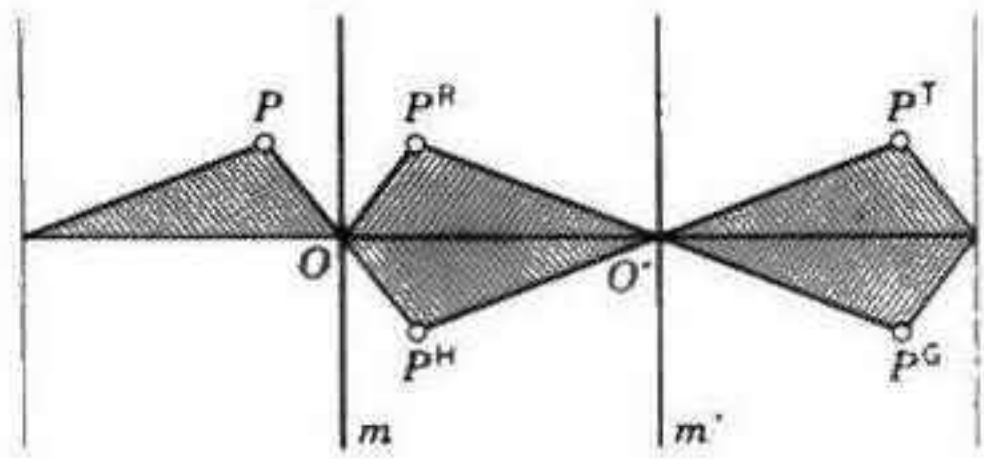


Figura 3.3b

Denotemos por R_1 y T la reflexión y traslación componentes. Es evidente que se conmutan, de manera que

$$G = R_1T = TR_1.$$

Hemos visto (figura 3.2*b*) que se puede expresar la traslación T como producto de dos semigiros o dos reflexiones paralelas. Si identificamos la recta a de la figura 3.3*a* con la recta OO' de la figura 3.3*b*, sean entonces R, R′ las reflexiones en m, m'. Tendremos que el producto de los dos semigiros

$$H = RR_1 = R_1R, \qquad H' = R'R_1 = R_1R'$$

es

$$T = HH' = RR_1R_1R' = RR',$$

y la reflexión en deslizamiento será

$$\begin{aligned} G &= R_1T = R_1RR' = HR' \\ &= TR_1 = RR'R_1 = RH'. \end{aligned}$$

Y así, una reflexión en deslizamiento se puede expresar como producto de tres reflexiones (dos de ellas perpendiculares a la tercera) o de un semigiro y una reflexión, o aun de una reflexión y un semigiro. Y, al revés, el producto de un semigiro cualquiera y una reflexión cualquiera (o viceversa) es una reflexión de deslizamiento, siempre y cuando el centro del semigiro no esté situado en el espejo. [Bachmann 1, pág. 6.]

Vimos en 3.13 que toda isometría directa es, en el plano, producto de dos reflexiones, es decir, una traslación o una rotación según los espejos fueran paralelos o intersecantes; también que cualquier isometría opuesta que tenga un punto invariante es una reflexión. Nuestro catálogo de isometrías quedará

completo al añadir una isometría opuesta en la que no hay punto invariante. Si una isometría como esta última, sea S, transforma el punto arbitrario A en A', considérese el semigiro H que intercambia ambos puntos. El producto HS, que es una isometría opuesta en la que el punto A' permanece invariante, no puede ser sino una reflexión, R. Por lo tanto, la isometría opuesta dada es la reflexión en deslizamiento

$$S = H^{-1}R = HR:$$

Toda isometría opuesta que carece de punto invariante es una reflexión en deslizamiento.

En otras palabras,

3.31 *Todo producto de tres reflexiones es o bien una sola reflexión o bien una reflexión en deslizamiento.*

En particular, el producto RT de una reflexión cualquiera y de una traslación cualquiera es una reflexión en deslizamiento, que degenera en una reflexión pura cuando el espejo de R es perpendicular a la dirección de la traslación T (y en este caso, las reflexiones R y RT se pueden tomar como dos reflexiones paralelas cuyo producto es T). Pero como la reflexión G ha de tener un eje definido (el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos PP^G), su descomposición en una reflexión y una traslación *a lo largo del espejo* es única (distinta de su descomposición en una reflexión y un semigiro, donde podemos tomar como espejo cualquier perpendicular al eje o, de manera equivalente, el centro del semigiro como un punto cualquiera del eje).

EJERCICIOS

1. Si el punto medio de AC es B, ¿qué clase de isometría transformará (i) AB en CB, (ii) AB en BC?
2. Toda isometría directa es producto de dos reflexiones. Toda isometría opuesta es producto de una reflexión y un semigiro.
3. Descríbase el producto de la reflexión en OO' y del semigiro alrededor de O.
4. Descríbase el producto de dos reflexiones en deslizamiento cuyos ejes son perpendiculares.
5. Todo producto de tres reflexiones en deslizamiento es una reflexión en deslizamiento.
6. El producto de tres reflexiones es una reflexión si y sólo si los tres espejos son o bien concurrentes o bien paralelos.
7. Si R_1, R_2, R_3 son tres reflexiones, $(R_1R_2R_3)^2$ es una traslación [Rademacher y Toeplitz 1, pág. 29].
8. Descríbase la transformación

$$(x, y) \longrightarrow (x + a, -y).$$

Justifíquese la afirmación de que, al aplicarla, se transforma la curva $f(x, y) = 0$ en $f(x - a, -y) = 0$.

3.4 REFLEXIONES Y SEMIGIROS

Thomsen* ha desarrollado una teoría de gran belleza en la que se expresan las propiedades geométricas de los puntos $O, O_1, O_2, \ldots$ y las rectas $m, m_1, m_2, \ldots$ (donde se entiende que son diferentes entre sí) como relaciones entre los semigiros $H, H_1, H_2, \ldots$ y las reflexiones $R, R_1, R_2, \ldots$ correspondientes. El lector se convencerá con prontitud de la equivalencia lógica de los pares de afirmaciones siguientes:

$RR_1 = R_1R \longleftrightarrow m$ y m_1 son perpendiculares.

$HR = RH \longleftrightarrow O$ es un punto de m.

$R_1R_2R_3 = R_3R_2R_1 \longleftrightarrow m_1, m_2, m_3$ o bien concurren o bien son paralelas.

$H_1H = HH_2 \longleftrightarrow O$ es el punto medio de O_1O_2.

$H_1R = RH_2 \longleftrightarrow m$ es la mediatriz de O_1O_2.

EJERCICIO

Interprétense estas relaciones: (a) $H_1H_2H_3H_4 = 1$; (b) $R_1R = RR_2$.

3.5 RESUMEN DE LOS RESULTADOS ACERCA DE ISOMETRIAS

Y al fin acudieron en rápido tropel
Cada vez más y más, y más.†

Lewis Carroll

[Dodgson 2, Capítulo 4]

Tal vez algunos lectores se encuentren confundidos por la profusión de términos técnicos, muchos de los que son palabras conocidas a las que se les han asignado significados de precisión desusada. Por esta razón repetiremos algunas definiciones, insistiendo en sus analogías y diferencias.

En el contexto que nos ocupa, una *transformación* es una correspondencia uno-a-uno de la totalidad del plano (o el espacio) consigo misma. Una *isometría* es una clase especial de transformación, a saber, la que preserva la longitud. Una operación de simetría se aplica a una determinada figura y no tanto a todo el plano: es una isometría que transforma la figura en otra que es ella misma.

En el plano, una isometría *directa* (que preserva el sentido) es una rotación o una traslación, pues es el producto de dos reflexiones, tenga o no

* G. Thomsen, The treatment of elementary geometry by a group-calculus, *Mathematical Gazette*, 17 (1933), pág. 232. Bachmann [1] ha dedicado todo un libro, al desarrollo de esta idea.

† And thick and fast they came at last
And more, and more, and more. (*T*)

tenga un punto invariante, es decir, según que los espejos, se intersecten o sean paralelos. En el último caso, la longitud de la traslación es el doble de la distancia entre los espejos; en el primero, el ángulo de rotación es el doble del ángulo entre los espejos. En particular, el producto de las reflexiones en dos espejos perpendiculares es un semigiro, es decir, una rotación que recorre dos ángulos rectos. Además, el producto de dos semigiros es una traslación.

Una isometría *opuesta* (que invierte el sentido) es, en general, una *reflexión en deslizamiento*, pues es el producto de tres reflexiones: el producto de una reflexión y una traslación. El caso especial en el que la traslación es la identidad (es decir, una traslación que recorre una distancia de cero), la reflexión en deslizamiento se reduce a una sola reflexión con toda una recta de puntos invariantes, a saber, los puntos del espejo.

Para resumir lo dicho:

3.51 *Una isometría directa cualquiera es o bien una traslación o bien una rotación. Una isometría opuesta cualquiera es o bien una reflexión o bien una reflexión en deslizamiento.*

EJERCICIOS

1. Si S es una isometría opuesta, S^2 es una traslación.
2. Si R_1, R_2, R_3, son tres reflexiones, $(R_2R_3R_1R_2R_3)^2$ es una traslación a lo largo del primer espejo. (*Indicación*: Como $R_1R_2R_3$ y $R_2R_3R_1$ son reflexiones en deslizamiento, sus cuadrados son conmutativos, por 3.23; así,

$$(R_1R_2R_3)^2(R_2R_3R_1)^2 = (R_2R_3R_1)^2(R_1R_2R_3)^2,$$

es decir, R_1 y $(R_2R_3R_1R_2R_3)^2$ son conmutativos [cf. Bachmann 1, pág. 13].

3.6 EL TEOREMA DE HJELMSLEV

... interviene en gran medida lo inesperado, en combinación con la inevitabilidad y la economía.

G. H. Hardy [2, pág. 53]

Ya vimos, en 3.12, que dos segmentos de recta congruentes AB, $A'B'$ se relacionan por no más de dos isometrías: una directa y otra opuesta. Ambas tienen el mismo efecto sobre cada punto que es colineal con A y B, es decir, sobre todos los puntos de la recta infinita AB (por ejemplo, el punto medio de AB se transforma en el punto medio de $A'B'$). La isometría opuesta es una reflexión o una reflexión en deslizamiento en la que el espejo o el eje contienen todos los puntos medios de los segmentos con los que se unen los pares de puntos correspondientes. Cuando coinciden dos de los puntos medios, la isometría es un semigiro, y coinciden también todos los demás. Por lo tanto,

TEOREMA DE HJELMSLEV. *Cuando todos los puntos P de una recta se relacionan por medio de una isometría con todos los puntos P' de otra*

recta, los puntos medios de los segmentos PP' son diferentes y colineales o, de no ser así, coinciden todos.

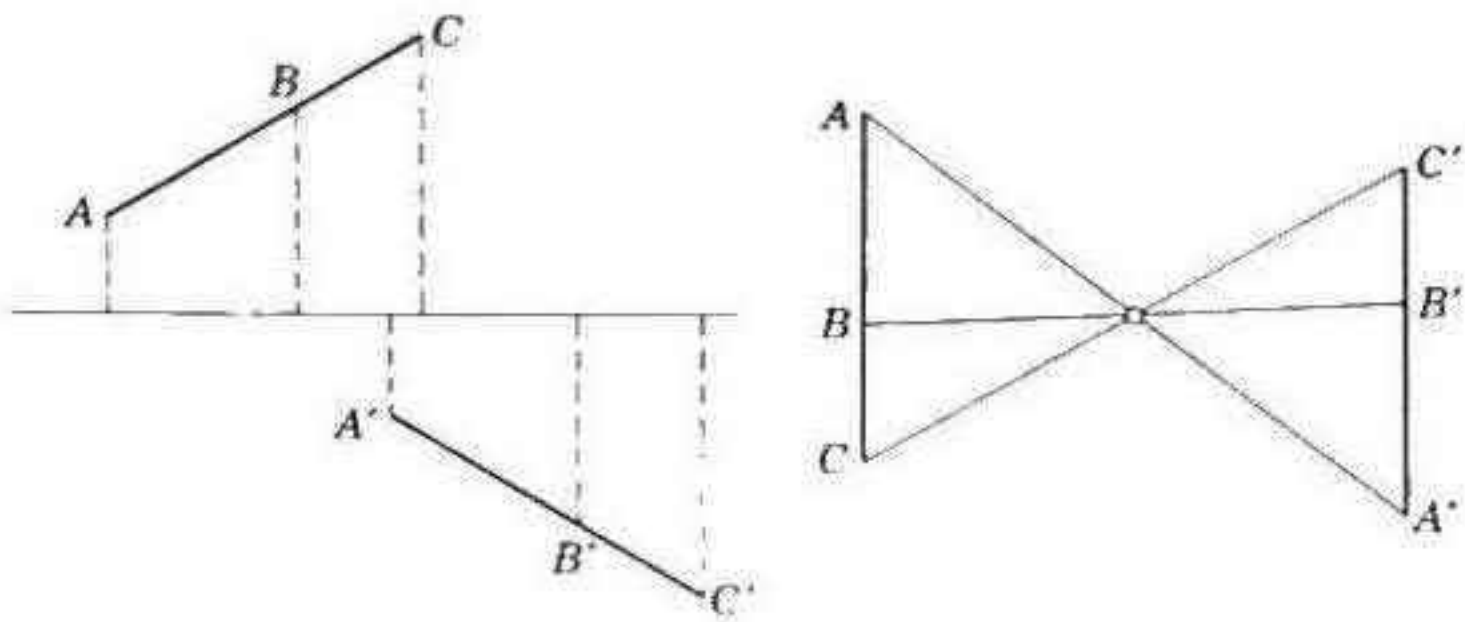


Figura 3.6a

En particular, se tiene que si A, B, C están en una recta y A', B', C' están en otra, donde

3.61 $$AB = A'B', \qquad BC = B'C'$$

(figura 3.6*a*) entonces los puntos medios de AA', BB', CC' o bien son colineales o bien coinciden en un solo punto (J. T. Hjelmslev, 1873–1950).

3.7 DISEÑOS EN UNA FRANJA

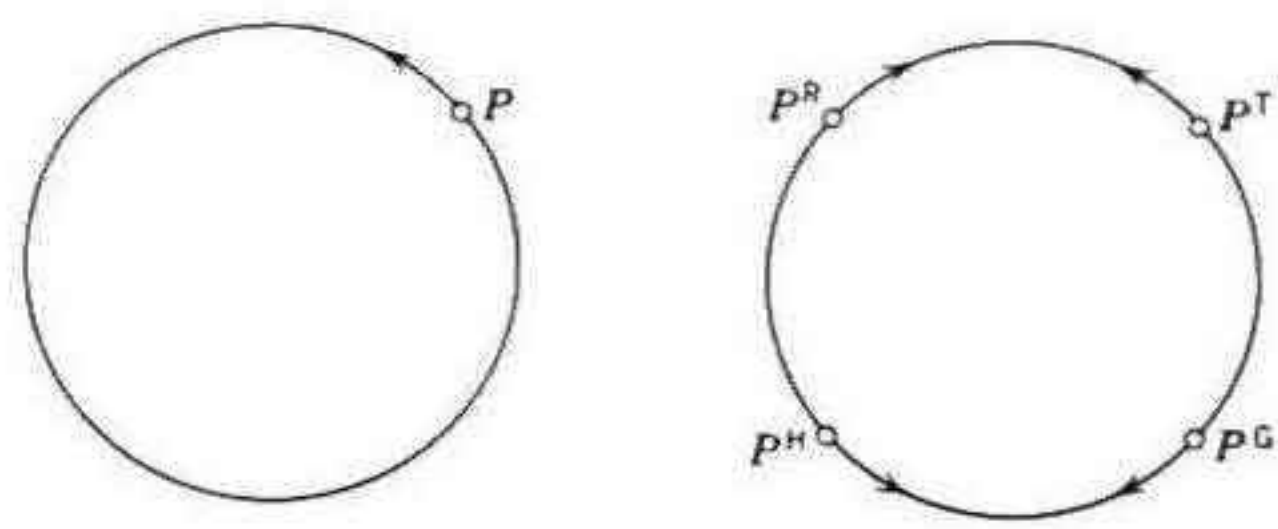


Figura 3.7a

Dos circunferencias iguales se pueden relacionar por medio de cualquier isometría. Por ejemplo, el punto P de la primera circunferencia de la figura 3.7*a* se transforma en P^T de la segunda mediante una traslación, en P^R mediante una rotación, en P^H mediante un semigiro y en P^G mediante una reflexión en deslizamiento. (Se han puesto flechas en las circunferencias para señalar lo que sucede con el sentido de rotación de la primera.) Las cuatro isometrías tienen en común una propiedad importante: conservan invariante la totalidad de una recta infinita, a saber, la que une los centros de ambas circunferencias. (En el cuarto caso, se trata de la *única* recta invariante.)

Hemos visto (figura 3.2*b*) que el producto de las reflexiones en dos

espejos paralelos m, m' es una traslación. Podemos considerarla como el caso límite de una rotación cuyo centro está muy lejos, pues los espejos paralelos son el caso límite de dos espejos que se cortan a un ángulo muy pequeño. De acuerdo con esta consideración, el grupo infinito que genera una sola traslación se denota por C_∞, y el grupo infinito que generan dos reflexiones paralelas se denota por D_∞. En un sentido abstracto, C_∞ es el "grupo libre con un generador". Si T es la traslación generatriz, el grupo consistirá en las traslaciones

$$\ldots, T^{-2},\ T^{-1},\ 1,\ T,\ T^2, \ldots.$$

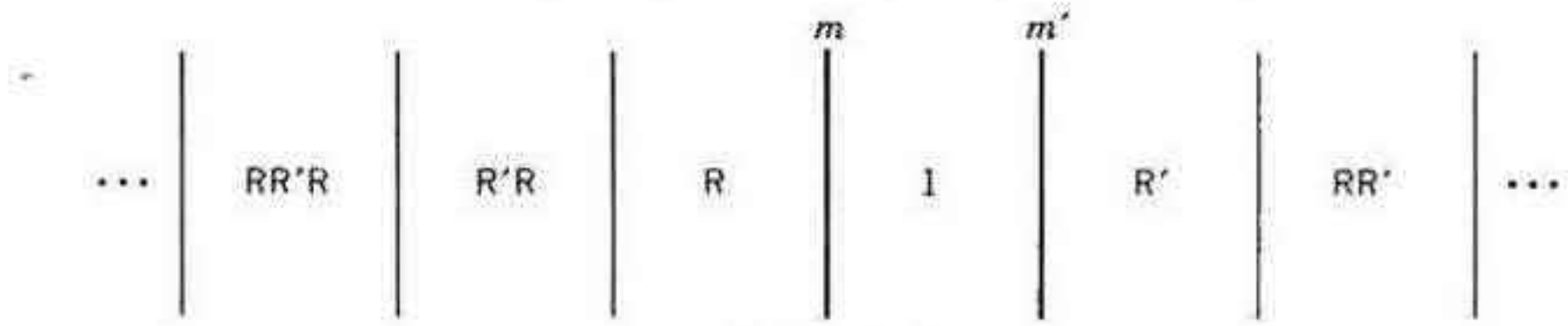


Figura 3.7b

De la misma manera, D_∞, que es generado por las reflexiones R, R′ en espejos paralelos m, m' (figura 3.7*b*), consiste en las reflexiones y traslaciones

$$\ldots, RR'R,\ R'R,\ R,\ 1,\ R',\ RR',\ R'RR', \ldots.$$

[Coxeter **1**, pág. 76]; su definición abstracta es sencillamente

$$R^2 = R'^2 = 1.$$

Este grupo se puede observar cuando nos sentamos en la silla del peluquero entre dos espejos paralelos (cf. el *New Yorker*, febrero 23 de 1957, pág. 39, donde la reflexión RR′RR′R viene a resultar en un demonio).

Una representación geométrica diferente del mismo grupo abstracto D_∞ se obtiene al interpretar los generadores R y R′ como semigiros. Hay también una representación intermedia en la que uno es una reflexión y el otro un semigiro; pero en este caso, el producto no es ya una traslación, sino una reflexión en deslizamiento.

Al continuar de esta manera, obtendremos pronto la lista completa de los siete grupos de simetría infinitos "unidimensionales": las siete maneras esencialmente distintas de repetir un diseño en una franja o en una cinta [Speiser **1**, págs. 81–82]:

Diseños típicos	*Generadores*	*Grupo Abstracto*
(i)...L L L L...	1 traslación	C_∞
(ii)...L Γ L Γ...	1 reflexión en deslizamiento	
(iii)...V V V V...	2 reflexiones	D_∞
(iv)...N N N N...	2 semigiros	
(v)...V Λ V Λ...	1 reflexión y 1 semigiro	
(vi)...D D D D...	1 traslación y 1 reflexión	$C_\infty \times D_1$
(vii)...H H H H...	3 reflexiones	$D_\infty \times D_1$

En el caso (iii), ambos espejos son verticales y uno se encuentra en el punto medio de una V, de modo que la refleja en sí misma, mientras el otro la refleja en uno de sus vecinos; así, una mitad de la V colocada entre ambos espejos, es la que origina el diseño entero. En los casos (vi) y (vii) hay un espejo horizontal, y los símbolos de la última columna indican "productos directos" [Coxeter **1**, pág. 42]. En todos estos grupos hay cierta libertad de elección de generador, con la excepción de (i) y (ii); por ejemplo, en (iii) o en (iv) se podría substituir uno de los dos generadores por una traslación.

En un sentido estricto, estos siete grupos no son "unidimensionales", sino que corresponden a una dimensión de $1\frac{1}{2}$, es decir, se trata de grupos de simetría bidimensionales en los que interviene una traslación en una dirección. En un ámbito puramente unidimensional solamente hay dos grupos infinitos de simetría: C_∞, que es generado por una traslación, y D_∞, que es generado por dos reflexiones (en espejos–puntos).

EJERCICIOS

1. Identifíquense los grupos de simetría de los diseños siguientes:

```
... b b b b ... .
... b p b p ... .
... b d b d ... .
... b q b q ... .
... b d p q b d p q
```

2. ¿Cuáles son los grupos de simetría de (*a*) una cicloide, (*b*) la curva del seno?

4

Cristalografía bidimensional

La cristalografía matemática constituye una de las aplicaciones más importantes de la geometría elemental a la física. La teoría tridimensional es complicada, pero su análoga en dos dimensiones es fácil de visualizar, sin que por ello sea trivial. Los diseños que abarcan el plano provienen de una manera natural de los diseños de franjas que se consideraron en § 3.7. Sin embargo, a pesar de la restricción a dos dimensiones, una relación completa de la enumeración de los grupos infinitos de simetría no entra en los propósitos de este libro.

4.1 LAS CELOSIAS* Y SUS REGIONES DE DIRICHLET

> *Durante varios minutos, Alicia permaneció de pie, sin hablar, mientras recorría con la mirada el campo en todas direcciones. . . "A mi parecer, esto se ha marcado como un enorme tablero de ajedrez. . . y así está todo el mundo –si acaso es mundo."*
>
> Lewis Carroll
>
> [Dodgson 2, Capítulo 2]

Los grupos infinitos bidimensionales (los grupos de simetría de diseños que se repiten, como los que se ven en el papel tapiz o en los pisos de baldosa) se distinguen de los grupos infinitos "unidimensionales" debido a la presencia de traslaciones *independientes*; es decir, traslaciones cuya dirección

* El término inglés es *lattice*. En su aceptación numérica ha sido traducido a veces como "red". (*T*)

no es ni paralela ni opuesta. El cristalógrafo E. S. Fedorov demostró que no hay sino diecisiete de esos grupos de isometrías. En nuestro siglo fueron redescubiertos por Pólya y Niggli.* Los símbolos que emplearemos para denotarlos son los de las Tablas Internacionales de Cristalografía de Rayos X.

El caso más sencillo es el del grupo **p1**, al que generan dos traslaciones

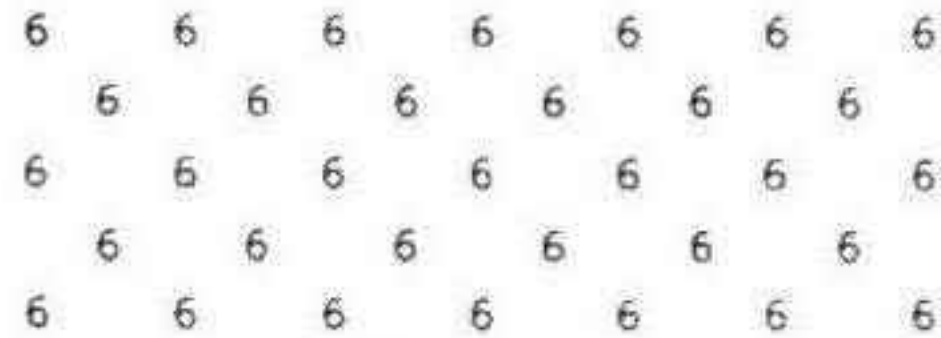


Figura 4.1a

independientes X, Y. Como la inversa de una traslación es otra traslación y el producto de dos traslaciones es también una traslación (3.21), este grupo consiste solamente de traslaciones. Como XY = YX, estas traslaciones son simplemente X^xY^y para todo par de enteros x, y. De una manera abstracta, tenemos aquí el "producto directo" $C_\infty \times C_\infty$, que tiene una sola relación que lo define:

$$XY = YX$$

[Coxeter y Moser **1**, pág. 40]. Un objeto cualquiera, como la numeral 6 de la figura 4.1*a*, es transformado por el grupo **p1** en una colección infinita de objetos, dispuestos de manera que forman un diseño. Y también **p1** es el grupo de simetría completo del diseño, puesto que el objeto carece de simetría intrínseca. Cuando el objeto es un solo punto, el diseño será una colección de puntos que se llama *celosía* bidimensional, y que puede ser visualizado como el plano de una huerta infinita. Cada punto de la celosía se asocia de manera natural con el símbolo de la traslación por medio de la que se le derivó del punto original 1 (figura 4.1*b*).

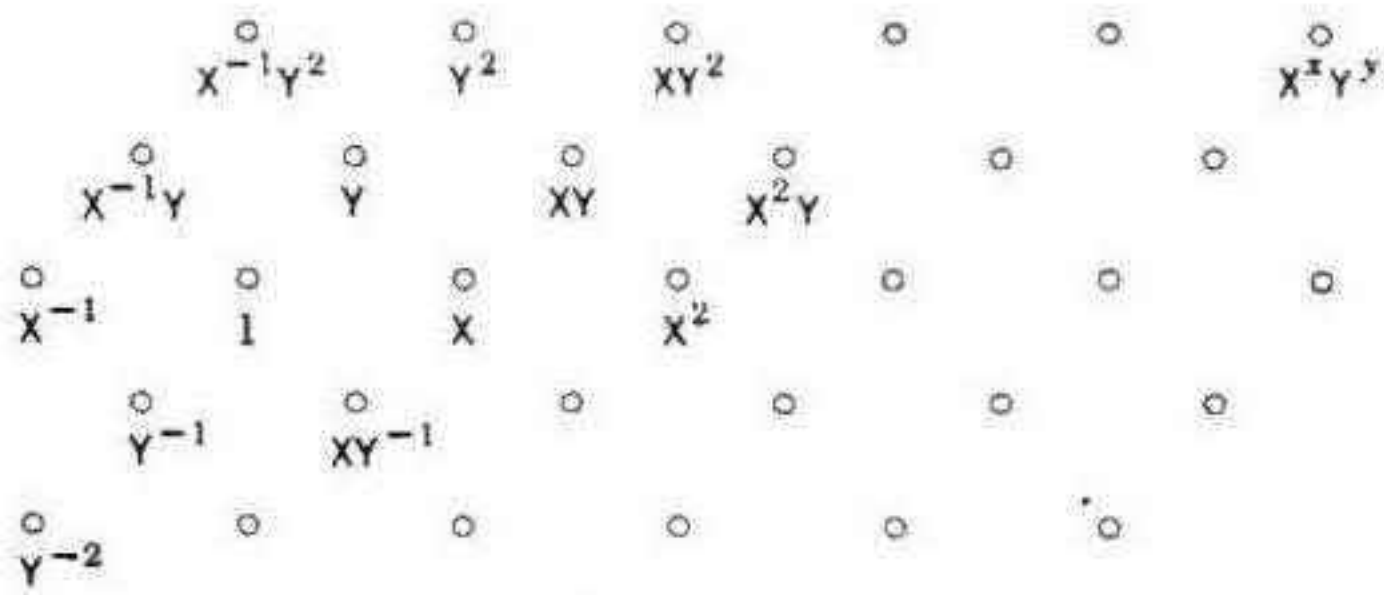


Figura 4.1b

* E. S. Fedorov, *Zapiski Imperatorskogo S. Peterburgskogo Mineralogicheskogo Obshchestva* (2), 28 (1891), págs. 345–390; G. Pólya y P. Niggli, *Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie*, 60 (1924), págs. 278–298. [Véase también Fricke y Klein **1**, págs. 227–233.] La tabla de Fedorov señala que 16 de los 17 grupos habían sido descritos por C. Jordan en 1869. El que faltaba fue reconocido por L. Sohncke en 1874; pero dejó de advertir tres de los otros.

Cualquiera que entre en una huerta puede observar la alineación de árboles en muchas direcciones; esto se parece a una propiedad típica de una celosía: la recta que una dos de sus puntos contiene también una infinidad de ellos, a espacios regulares, es decir, una "celosía unidimensional". De hecho, la recta que une los puntos 1 y X^xY^y también contiene los puntos

$$X^{nx/d}Y^{ny/d} = (X^{x/d}Y^{y/d})^n$$

donde d es el máximo común divisor de x y de y, y n puede ser cualquier entero. En particular, las potencias de X se encuentran todas sobre una recta, las de Y en otra, y las rectas que son paralelas a éstas y pasan por los demás puntos de la celosía forman un mosaico de paralelogramos congruentes que llena el plano sin dejar intersticios (figura 4.1*c*). (Empleamos el término *mosaico* para designar cualquier arreglo de polígonos que encajan entre sí de manera que cubren todo el plano sin que ninguno se traslape.)

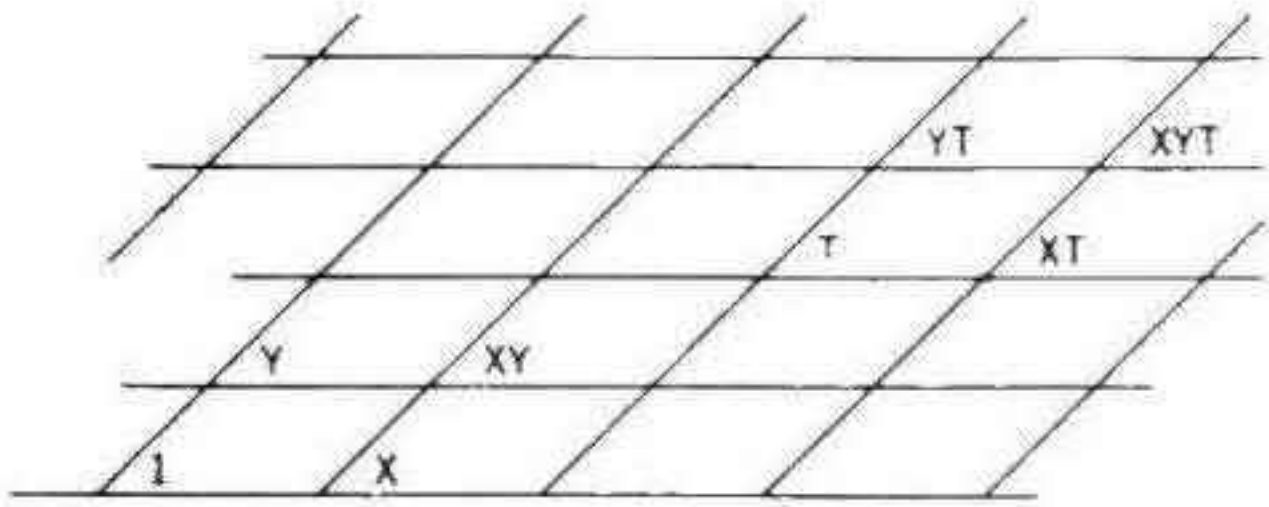


Figura 4.1c

Un paralelogramo típico es el que forman los cuatro puntos 1, X, XY, Y. La traslación $T = X^xY^y$ transforma a este paralelogramo en otro que tiene como "primera" esquina el punto T (en lugar de 1). Hay así una correspondencia uno-a-uno entre todas las celdas o piezas del mosaico y las transformaciones del grupo, con la propiedad de que cada transformación lleva un punto cualquiera del interior de la celda original a un punto situado de manera parecida en la nueva celda. Por esta razón, el paralelogramo típico se llama *región fundamental*.

La forma de la región fundamental dista mucho de ser única. Cualquier paralelogramo servirá siempre y cuando tenga por vértices cuatro puntos de la celosía y no haya ninguno dentro de él ni en sus lados [Hardy y Wright 1, pág. 28]. Esta es la contrapartida geométrica de la afirmación algebraica acerca de que el grupo que generan X, Y, se genera igualmente por X^aY^b, X^cY^d, siempre y cuando

$$ad - bc = \pm 1.$$

Para expresar los viejos generadores en términos de los nuevos, observaremos que

$$(X^aY^b)^d(X^cY^d)^{-b} = X^{ad-bc}, \quad (X^aY^b)^{-c}(X^cY^d)^a = Y^{ad-bc}.$$

Pero no es necesario que la región fundamental sea un paralelogramo; por

ejemplo, podemos reemplazar cada par de lados opuestos por un par de curvas congruentes, como se ha hecho en la figura 4.1*d*.

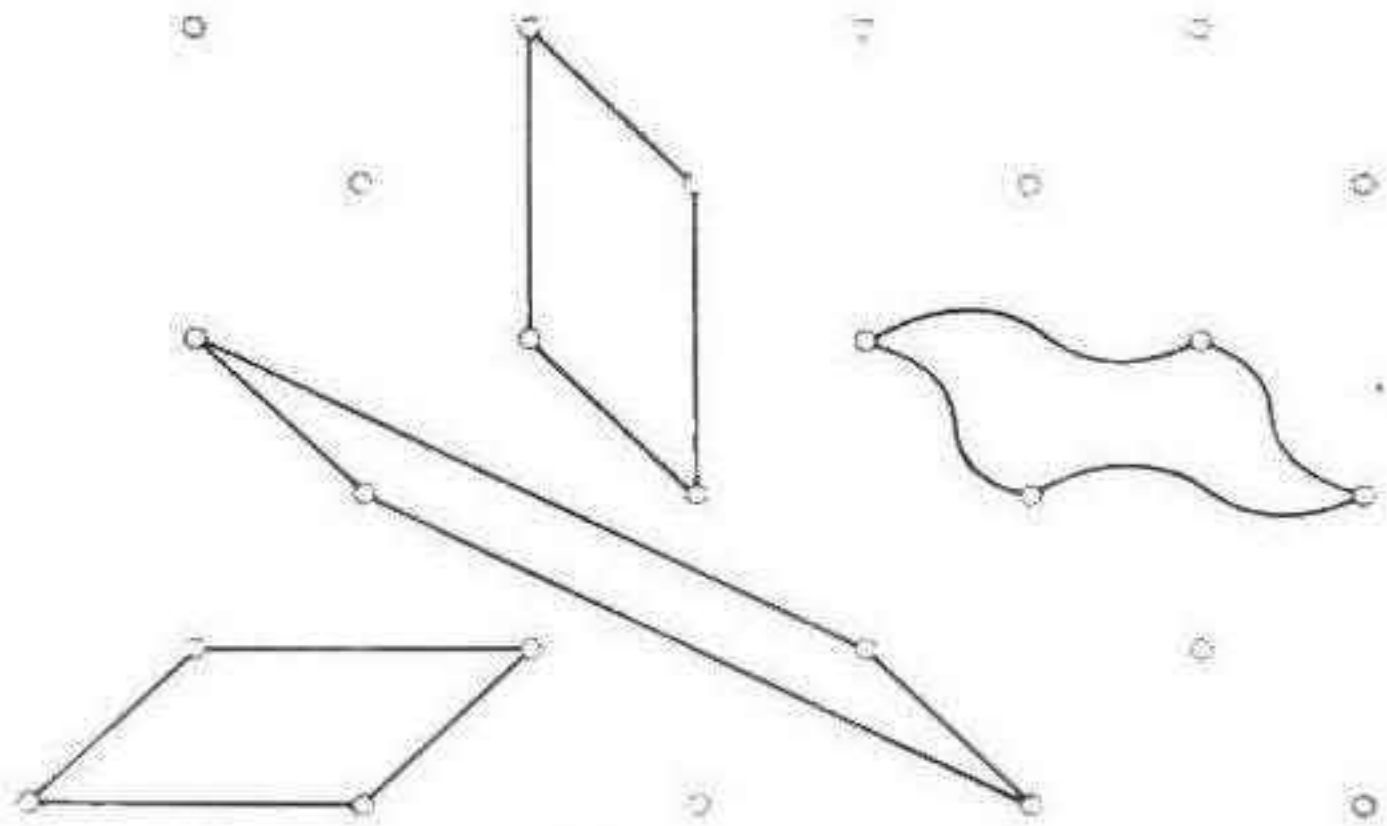


Figura 4.1d

Cualquiera de las posibles regiones fundamentales, ya sea que hayamos escogido un paralelogramo o cualquier otra forma, tendrá la misma *área* que el paralelogramo típico de la figura 4.1*c*. Esto se explica al considerar que en el interior de un círculo suficientemente grande el número de puntos de la celosía será igual al número de réplicas de cualquier región fundamental (con un error insignificante, debido a las regiones mutiladas por la circunferencia); así, cada forma tiene como área la misma fracción del área del círculo grande.* Un hecho interesante es que cualquier región fundamental *convexa*, es, en lo que se refiere al grupo de traslación, un polígono de simetría central (a saber, un paralelogramo o un exágono de simetría central).†

Entre los distintos paralelogramos posibles, podemos escoger un paralelogramo como norma, al que llamaremos *reducido*, al tomar el generador Y como la traslación más corta (o una de las más cortas) del grupo, y a X como una traslación, igual o la más cercana, en otra dirección. Si tenemos entonces que el ángulo entre X y Y es obtuso, invertimos la dirección de Y. Así, entre todos los paralelogramos susceptibles de servir como regiones fundamentales, nuestro paralelogramo tiene los lados más cortos. Las traslaciones a lo largo de estos lados se llaman, de manera natural, generadores reducidos.

Al unir los vértices X, Y del paralelogramo reducido y los pares correspondientes de vértices de sus réplicas, obtenemos un mosaico de triángulos congruentes con vértices en los puntos de la celosía, ninguno de cuyos ángulos es obtuso. Cada punto de la celosía pertenece a seis de los triángulos; por ejemplo, los triángulos que rodean al punto 1 lo unen a pares de puntos adyacentes en el ciclo

$$X,\quad Y,\quad X^{1}Y,\quad X^{1},\quad Y^{1},\quad XY^{1}$$

* Gauss se sirvió de esta idea con el objeto de determinar π [Hilbert y Cohn Vossen 1, págs. 33-34].

† A. M. Macbeath, *Canadian Journal of Mathematics*, 13 (1961), pág. 177.

(figura 4.1*e*). Al unir los circuncentros de los seis triángulos, se obtiene la *región de Dirichlet* (o "polígono de Voronoi") de la celosía: un polígono cuyos puntos interiores son todos los puntos del plano que están más cerca

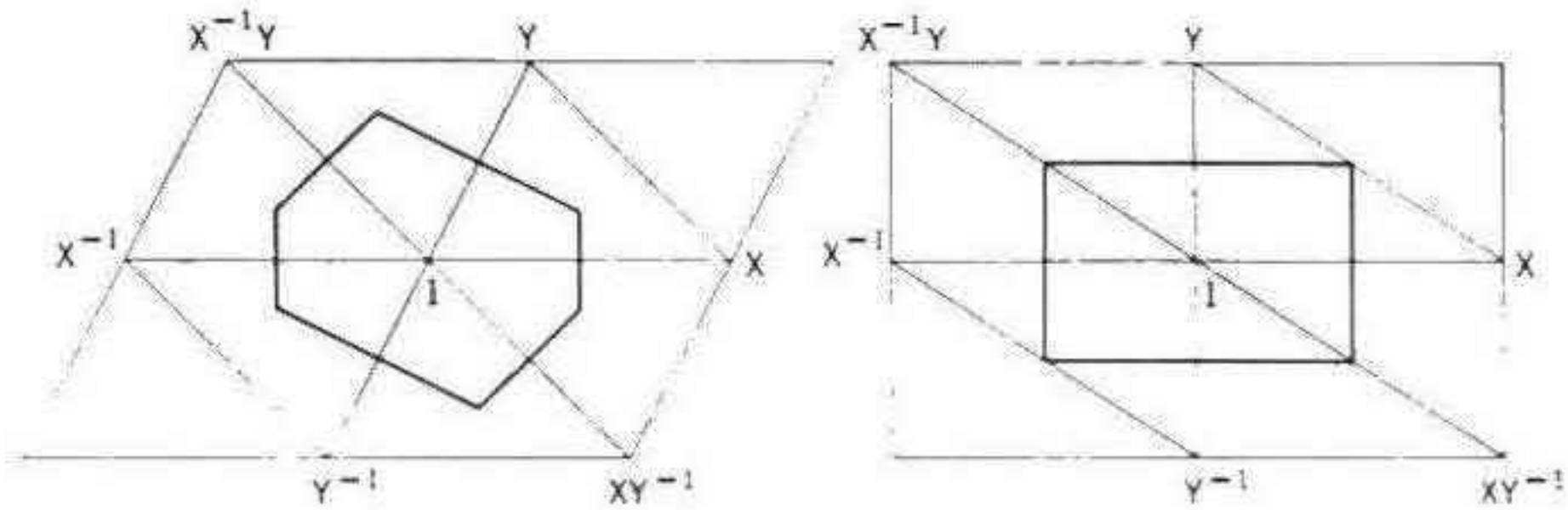


Figura 4.1e

de un punto de la celosía en particular (como el punto 1) que de cualquier otro.* Estas regiones, tales que cada una rodea a un punto de la celosía, evidentemente encajan bien y llenan todo el plano; de hecho, la región de Dirichlet es una clase particular de región fundamental.

La celosía es simétrica por medio de un semigiro alrededor del punto 1 (u otro cualquiera de la celosía), pues al aplicarlo se intercambian los pares de puntos de la celosía X^xY^y, $X^{-x}Y^{-y}$. (En el lenguaje técnico se dice que el grupo **p1** tiene un automorfismo de período 2 que reemplaza a X y a Y por sus inversos.) Por lo tanto, *la región de Dirichlet es simétrica por un semigiro*. Su forma precisa depende de las longitudes relativas de las traslaciones generatrices X, Y y del ángulo que forman. Si el ángulo es recto, la región de Dirichlet será un rectángulo (o un cuadrado), puesto que el circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa. En todos los demás casos es un exágono (no ha de ser necesariamente un exágono regular; pero como tiene simetría central, los pares de lados opuestos son iguales y paralelos).

Si se hace variar la celosía al permitir que el ángulo que forman las traslaciones X y Y aumente gradualmente hasta 90°, veremos que dos de los lados opuestos del exágono se encogen hasta convertirse en vértices, y entonces los cuatro lados restantes formarán un rectángulo (o un cuadrado).

Las reflexiones en cuatro de los seis lados de la región de Dirichlet transforman el punto central de la celosía, 1, en cuatro o seis puntos distintos de la celosía, que se llaman naturalmente *vecinos* del punto 1.

EJERCICIOS

1. Dos lados opuestos cualesquiera de una región de Dirichlet son perpendiculares a la recta que une sus puntos medios.
2. Dibújense los distintos tipos de celosías que se pueden presentar si se sujeta a X

* G. L. Dirichlet, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40 (1850), págs. 216-219.

y Y a las restricciones siguientes: pueden tener la misma longitud y el ángulo que formen puede ser de 90° o de 60°. Señálese la región de Dirichlet en cada uno de los casos y averígüese el grupo de simetría de esta región, que puede ser C_2, D_2, D_4, o D_6.

4.2 EL GRUPO DE SIMETRIA DE LA CELOSIA GENERAL

De la investigación de las simetrías de una estructura matemática dada han surgido siempre los resultados más poderosos.

E. Artin (1898–1962)

[Artin 1, pág. 54]

Es fácil observar que cualquier celosía es simétrica por el semigiro alrededor del punto medio del segmento que une dos puntos cualquiera de la celosía [Hilbert y Cohn Vossen **1**, pág. 73]. Esos puntos medios forman una nueva celosía de malla más fina, cuyas traslaciones generatrices tienen una longitud que es la mitad de la de X y Y (véanse los puntos "abiertos" de la figura 4.2*a*).

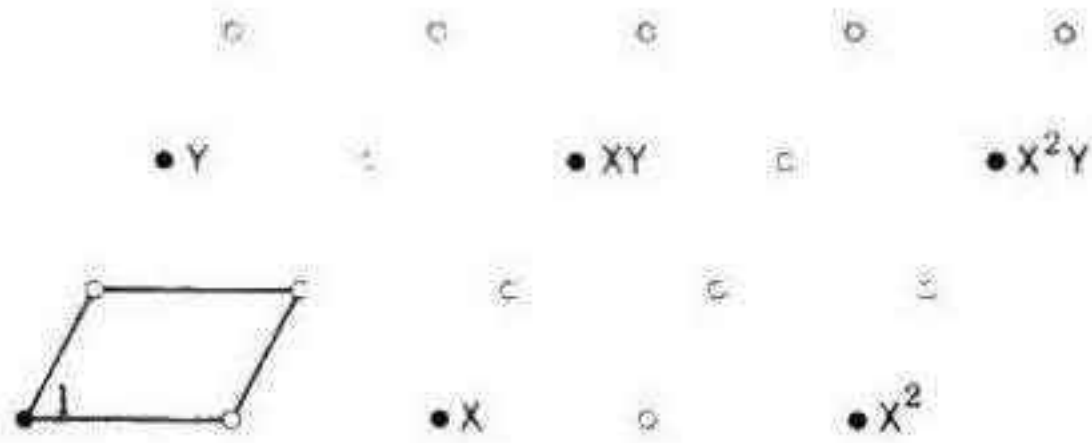


Figura 4.2a

La celosía "general" se presenta cuando los generadores reducidos son de longitudes diferentes y el ángulo que forman no es de 90° ni 60°. En un caso así, las traslaciones X^xY^y y los semigiros que hemos mencionado son sus únicas operaciones de simetría. En otras palabras, el grupo de simetría de la celosía general se deriva de **p1** al añadir una nueva transformación H, que es el semigiro alrededor del punto 1. Este grupo se denota por **p2** [Coxeter y Moser **1**, págs. 41–42]. Lo generan el semigiro H y las traslaciones X, Y, en cuyos términos el semigiro que intercambia los puntos 1 y $T = X^xY^y$ es HT. (Adviértase que la misma T es ya producto de H y HT.) El grupo se genera también por medio de los tres semigiros HX, H, HY, o (aunque es redundante) por estos tres y su producto

$$HX \cdot H \cdot HY = HXY,$$

que son semigiros alrededor de los cuatro vértices del paralelogramo de la figura 4.2*a*.

Una característica notable de cualquier triángulo o cualquier cuadrángulo simple (no necesariamente convexo) consiste en que sirven como regiones fundamentales de **p2**. Los semigiros alrededor de los puntos medios de los

tres o cuatro lados siempre se pueden identificar con HX, H, HY (figura 4.2*b*) o con HX, H, HY, HXY (figura 4.2*c*).

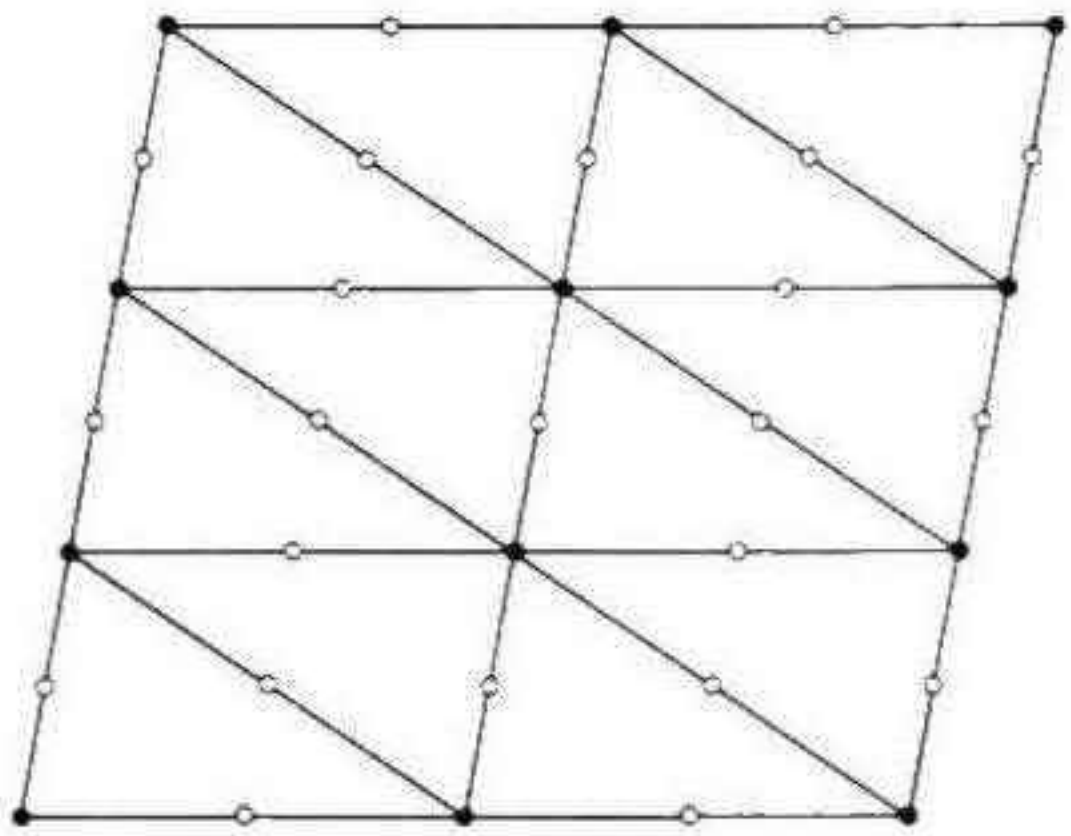


Figura 4.2b

EJERCICIOS

1. ¿Por qué razón forman los vértices de los cuadrángulos de la figura 4.2*c* dos celosías superpuestas?

2. Dibújese el mosaico de las regiones de Dirichlet que corresponden a una celosía determinada. Divídase a continuación cada región en dos mitades por medio de una diagonal. El mosaico que resulta es un caso especial del mosaico de triángulos escalenos (figura 4.2*b*) o de cuadrángulos irregulares (figura 4.2*c*), según sea la región de Dirichlet rectangular o exagonal.

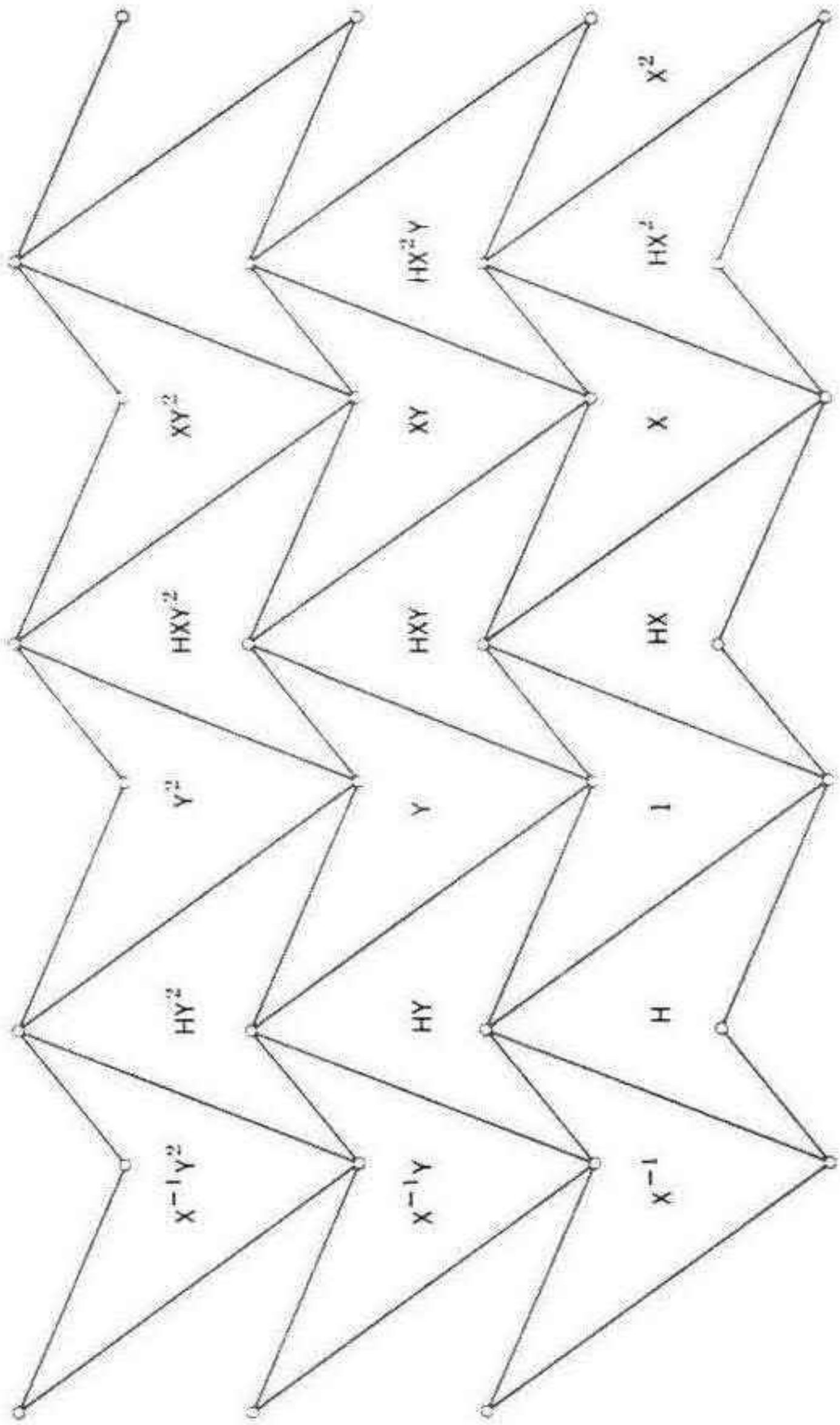


Figura 4.2c

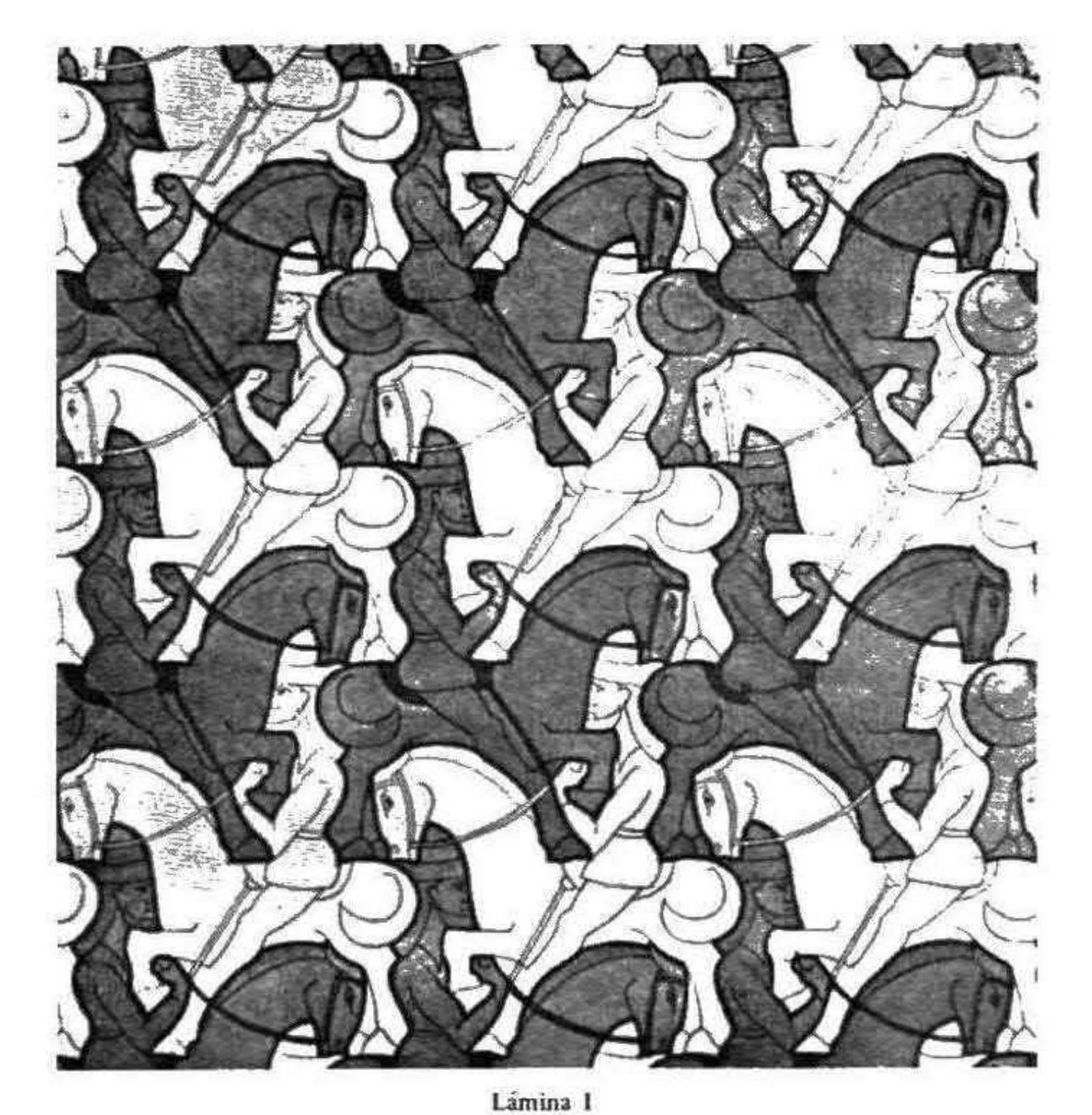


Lámina 1

4.3 EL ARTE DE M. C. ESCHER

Los grupos **p1** y **p2** son dos de los grupos discretos de isometría, más sencillos, de los diecisiete en los que intervienen dos traslaciones independientes. En esta y en la siguiente secciones mencionaremos algunos más. Los generadores adecuados de todos ellos se han enumerado en la tabla I de la página 413.

El desarrollo del arte que consiste en llenar un plano con un diseño que se repite alcanzó su clímax en la España del siglo trece, cuando los moros aplicaron los diecisiete grupos en sus intrincados diseños decorativos de la Alhambra [Jones 1]. Su inclinación hacia los diseños abstractos provino de la estricta observancia del Segundo Mandamiento. El artista holandés M. C. Escher, que carece de esos escrúpulos, aplica con gran ingenio estos grupos al

servirse de formas animales para sus regiones fundamentales. Por ejemplo, el grupo de simetría de los jinetes a caballo (lámina I) parece a primera vista **p1**, generado por una traslación horizontal y otra vertical. Pero si ignoramos la diferencia entre las áreas clara y oscura, obtenemos el grupo **pg**, que es más interesante, generado por dos reflexiones paralelas en deslizamiento, que podemos denotar por G y G′. Observemos que la traslación vertical puede quedar igualmente expresada como G^2 o G'^2. Y es notable que la relación

$$G^2 = G'^2$$

proporcione por sí sola la definición abstracta completa de este grupo [Coxeter y Moser **I**, pág. 43]. Es claro que el jinete y su montura (al considerar cualquier color) constituyen una región fundamental de **pg**. Pero debemos combinar ambas regiones, una clara con una oscura, para obtener una región fundamental de **p1**.

De la misma manera, el grupo de simetría del diseño de Escher de los escarabajos (lámina II) parece a primera vista **pm**, generado por dos reflexiones verticales y una traslación vertical. Pero al observar cuidadosamente, se advierte que hay escarabajos oscuros, además de los claros, y que los colores nuevamente se intercambian por medio de las reflexiones en deslizamiento. El grupo completo de simetría **cm**, cuya región fundamental es la mitad derecha o izquierda de un escarabajo de cualquier color, es generado por una reflexión vertical en deslizamiento junto con una reflexión vertical. Si queremos obtener una región fundamental del grupo más "pequeño" **pm**, deberemos combinar la mitad derecha de un escarabajo de un color con la mitad izquierda de un escarabajo adyacente del otro color.

Un escarabajo completo (de cualquier color) constituye una región fundamental del grupo **p1** (donde una de sus traslaciones generatrices es oblicua) o igualmente del grupo **pg**.

EJERCICIOS

1. Ubíquense los ejes de dos reflexiones en deslizamiento tales que generen **pg** en las láminas I y II.

2. Dos paralelogramos cualesquiera cuyos lados estén a lo largo de dos direcciones iguales pueden, entre ambos, llenar todo el plano si se les repite por medio de traslaciones.

4.4 SEIS DISEÑOS DE LADRILLOS

En la figura 4.4*a* se puede ver que seis de los diecisiete grupos espaciales de dos dimensiones surgen como grupos de simetría de diseños familiares de rectángulos, a los que podríamos considerar como ladrillos o baldosas. Los generadores le señalan de esta manera: una línea punteada denota un espejo, una "lente" denota un semigiro, un cuadrado pequeño denota un cuarto de giro (es decir, una rotación que recorre 90°) y una "media flecha" denota una reflexión en deslizamiento.

En cada caso, la región fundamental se ha sombreado. Esta región se elige de manera hasta cierto punto arbitraria, con la excepción de la de **pmm**, donde queda totalmente limitada por espejos.

El procedimiento para analizar un diseño así es el que daremos a continuación. Tenemos que el grupo de simetría de un solo ladrillo es D_2 (de orden 4), que contiene a los subgrupos C_2 y D_1. Si todas las operaciones de simetría del ladrillo son también operaciones de simetría de todo el diseño, como se tiene en **cmm** y **pmm**, la región fundamental es la cuarta parte de un ladrillo, dos de los generadores son las reflexiones que generan D_2, y el otro generador es el que transforma nuestro ladrillo en un ladrillo vecino. Si solamente pertenece a todo el diseño el subgrupo C_2 o el D_1 (de la manera en que C_2 pertenece a **p2** o a **pgg**, y D_1 a **pmg** o a **p4g**),la región fundamental es la mitad de un ladrillo, y los generadores ya no se determinan de una manera obvia.

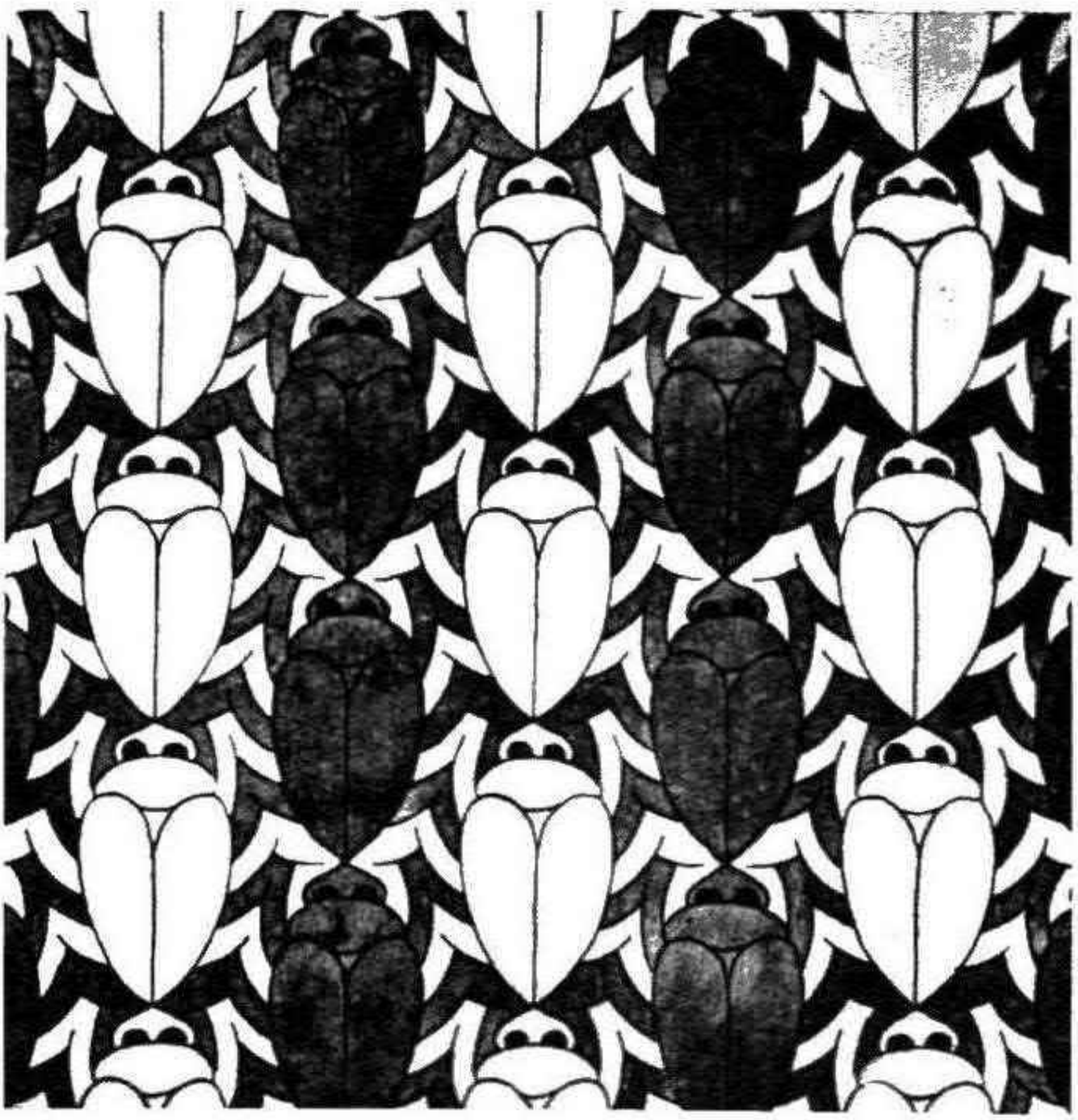


Lámina II

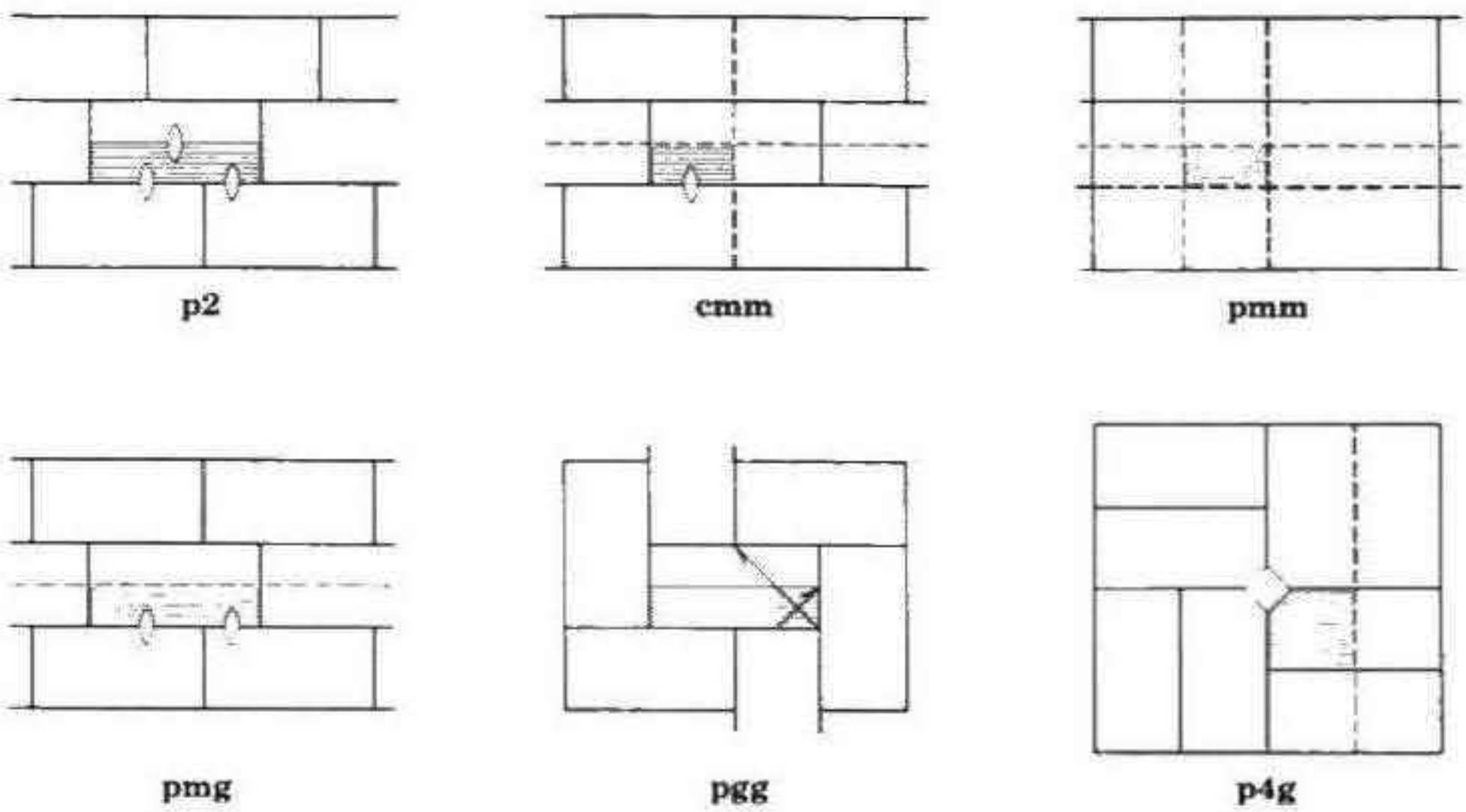


Figura 4.4a

EJERCICIO

Se entiende que en todos estos diseños un "ladrillo" es un rectángulo, uno de cuyos lados es dos veces mayor que el otro. En cada caso, todo ladrillo se relaciona con el diseño entero de la misma manera en que cualquier otro lo hace. (En lenguaje técnico, el grupo de simetría es *transitivo* en los ladrillos.) ¿Son estos seis los *únicos* diseños transitivos de ladrillos?

4.5 LA RESTRICCION CRISTALOGRAFICA

El matemático, como el pintor o el poeta, es un constructor de diseños. El hecho de que sus diseños sean más permanentes que los de los otros se debe a que están hechos con ideas.

G. H. Hardy [2, pág. 24]

La relación completa de los diecisiete grupos espaciales y bidimensionales ocuparía demasiado espacio; pero vale la pena dar aquí la elegante demostración de Barlow* de que los únicos subgrupos cíclicos posibles son C_2, C_3, C_4, y C_6. Dicho de otra manera:

Los únicos periodos posibles de una operación rotacional de simetría de una celosía son 2, 3, 4, 6.

Sea P un centro cualquiera de rotación de período n. Las demás operaciones de simetría de la celosía transforman a P en infinitos centros diferentes de rotación que tienen el mismo periodo. Sea Q uno de estos centros distintos de P (figura 4.5*a*) tal que esté a la menor distancia posible de él. Un tercer centro, P', se deriva a partir de P mediante una

* W. Barlow, *Philosophical Magazine* (6), 1 (1901), pág. 17.

rotación que recorre $2\pi/n$ alrededor de Q; y un cuarto, P', se deriva de Q por medio de una rotación de $2\pi/n$ alrededor de P'. Por supuesto, los segmentos PQ, QP', $P'Q'$ son todos iguales. Puede suceder que P y Q' coincidan; entonces se tiene que $n = 6$. En todos los demás casos, debido a que hemos tomado Q a la menor distancia posible de P, tendremos que $PQ' \geqslant PQ$; por lo tanto, $n \leqslant 4$. (Cuando $n = 4$, $PQP'Q'$ es un cuadrado. Cuando $n = 5$, PQ' es obviamente más corto que PQ. Cuando $n = 6$, PQ corta a $P'Q'$, pero no necesitamos emplear ya Q'; tenemos que $PP' < PQ$, que es un resultado suficientemente absurdo.)

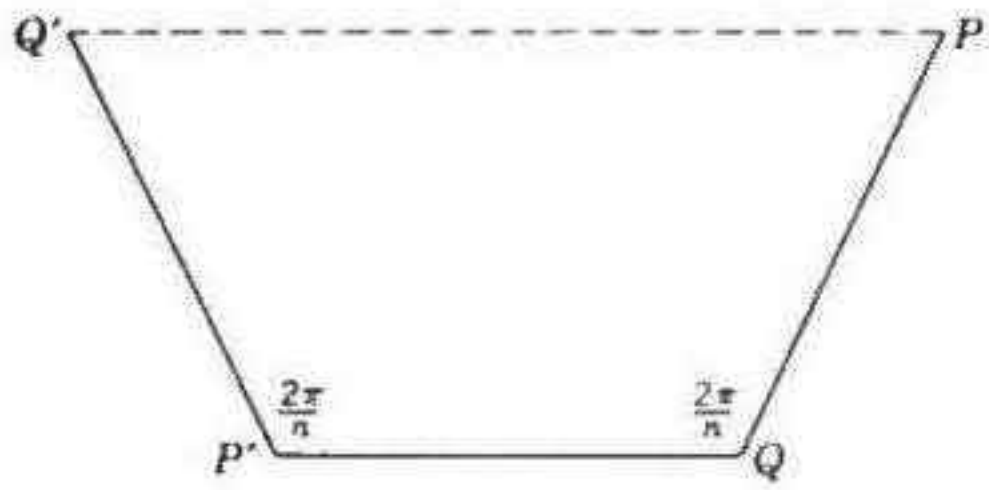


Figura 4.5a

EJERCICIOS

1. Si S y T son rotaciones que recorren $2\pi/n$ alrededor de P y Q, ¿qué es $T^{-1}ST$?
2. Si en un grupo discreto de simetría hay dos rotaciones alrededor de centros diferentes, incluye dos rotaciones de esas que tienen el mismo período, y, por lo tanto, también una traslación. Si el período es mayor que 2, incluye dos traslaciones independientes.

4.6 MOSAICOS REGULARES

> *Los diseños del matemático, como los del pintor o el poeta, han de ser bellos; las ideas, como los colores o las palabras, deben relacionarse de manera armoniosa. La belleza es la primera prueba: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas.*
>
> G. H. Hardy [2, pág. 25]

Probablemente, Kepler (1571–1630) fue el primero que investigó las maneras posibles de llenar el plano con polígonos iguales y regulares. Encontraremos que resulta conveniente usar el símbolo de Schläfli $\{p, q\}$ para describir el mosaico de *pé*gonos regulares donde q de ellos rodean a cada vértice [Schläfli 1, pág. 213]. Los casos

$$\{6, 3\}, \quad \{4, 4\}, \quad \{3, 6\}$$

se representan en la figura 4.6*a* donde en cada caso el polígono en líneas más gruesas es la *figura vertical*: el *qú*gono cuyos vértices son los puntos medios

de las q aristas que acuden a un vértice. (Como los mosaicos tienen ciertas analogías con los poliedros, es natural el empleo de la palabra *arista* al hablar de lados comunes de polígonos adyacentes, como también diremos *cara* para significar a los polígonos mismos.)

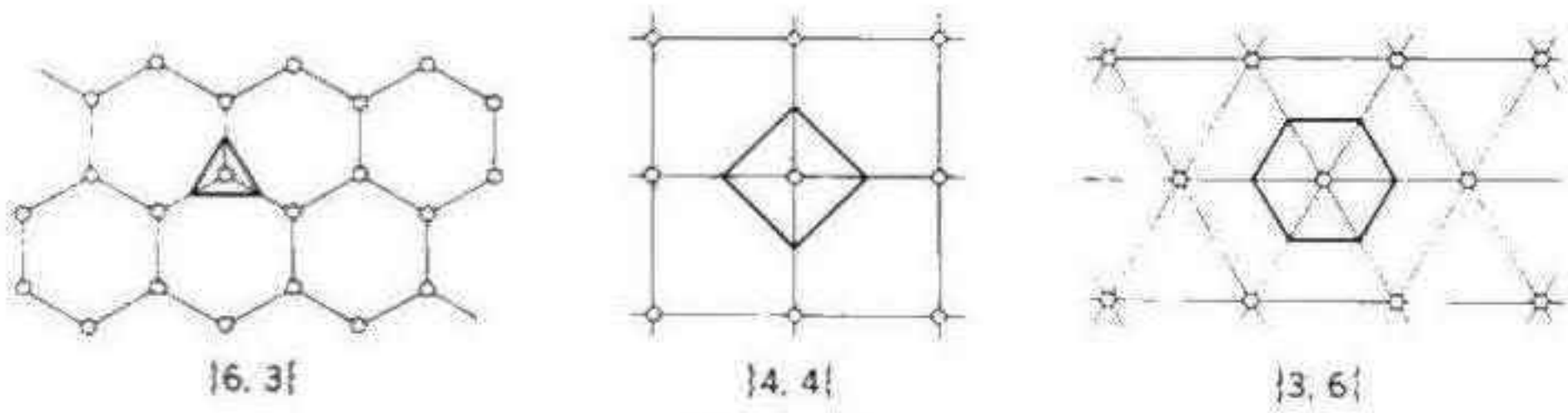


Figura 4.6a

En busca de una definición formal, diremos que un mosaico es *regular* cuando tiene caras regulares y una figura vertical regular en todos los vértices.

El mosaico $\{6, 3\}$ se ve con frecuencia en los pisos de los cuartos de baño, y también en cualquier panal. $\{4, 4\}$ nos es familiar en las formas de papel cuadriculado; en términos de coordenadas cartesianas, sus vértices son los puntos en los que x y y son enteros. $\{3, 6\}$ es el mosaico dual de $\{6, 3\}$ en el sentido siguiente: el *dual* de $\{p, q\}$ es el mosaico cuyas aristas son las mediatrices de las aristas de $\{p, q\}$ (véase la figura 4.6*b*). Así, el dual de $\{p, q\}$ es $\{q, p\}$, y viceversa; los vértices de cualquiera de ellos son los centros de las caras de otro. En particular, el dual de $\{4, 4\}$ es uno igual a él, $\{4, 4\}$.

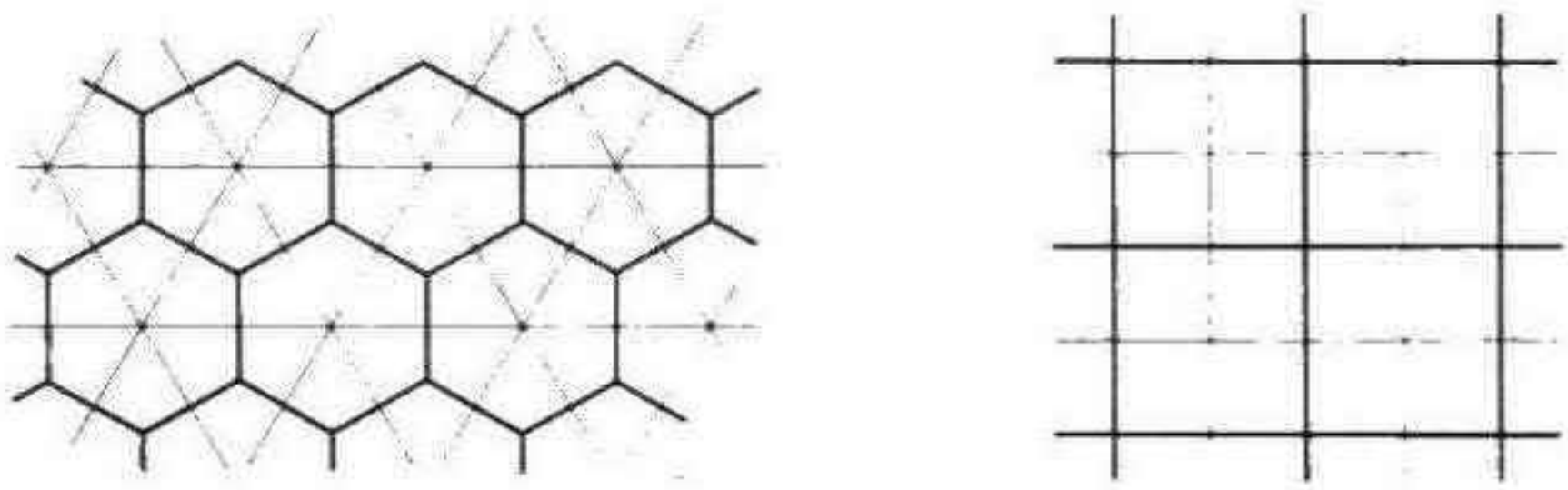


Figura 4.6b

Obtenemos con facilidad los valores posibles de p y q al igualar el ángulo de un *peágono*, a saber $(1 - 2/p)\pi$, con el valor que ha de tener cuando hay q de estos polígonos reunidos en un vértice:

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi = \frac{2\pi}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2},$$
$$(p - 2)(q - 2) = 4.$$

De las tres maneras posibles de factorizar 4, a saber

$$4 \cdot 1, \quad 2 \cdot 2, \quad 1 \cdot 4,$$

provienen los tres mosaicos que ya hemos descrito. Sin embargo, antes de afirmar que éstos son los *únicos* mosaicos regulares, debemos investigar las soluciones fraccionarias de nuestra ecuación; pues podríamos tener –es decir, podemos concebir– un mosaico de "estrella" $\{p, q\}$ en el que la cara $\{p\}$ y la figura vertical $\{q\}$ sean polígonos regulares de la clase que consideramos en § 2.8. Por ejemplo, en la figura 4.6*c* tenemos diez pentágonos que se han colocado juntos en un vértice común. Aunque se traslapan, podríamos pensar en añadir nuevos pentágonos con la esperanza de formar un mosaico $\{5, \frac{10}{3}\}$ (cuya figura vertical sea un decagrama), que cubra el plano un número determinado de veces. Pero, como veremos en seguida, este número es infinito.

Consideremos el mosaico regular general $\{p, q\}$, donde $p = n/d$. Si cubriera el plano un número finito de veces, debería haber una distancia mínima entre los centros de los pares de caras. Sean P, Q los centros de caras tales que los separa la distancia mínima. Puesto que son centros de rotación de período n, el argumento del que nos servimos en § 4.5 señala que los únicos valores posibles de n son 3, 4, 6. Por lo tanto, $d = 1$, y estos son los únicos valores posibles de p. En consecuencia, *no hay mosaicos regulares de estrella* [Coxeter **1**, pág. 112].

Es posible cubrir tres veces una *esfera* por medio de doce "pentágonos" cuyos lados son arcos de los círculos mayores [Coxeter **1**, pág. 111].

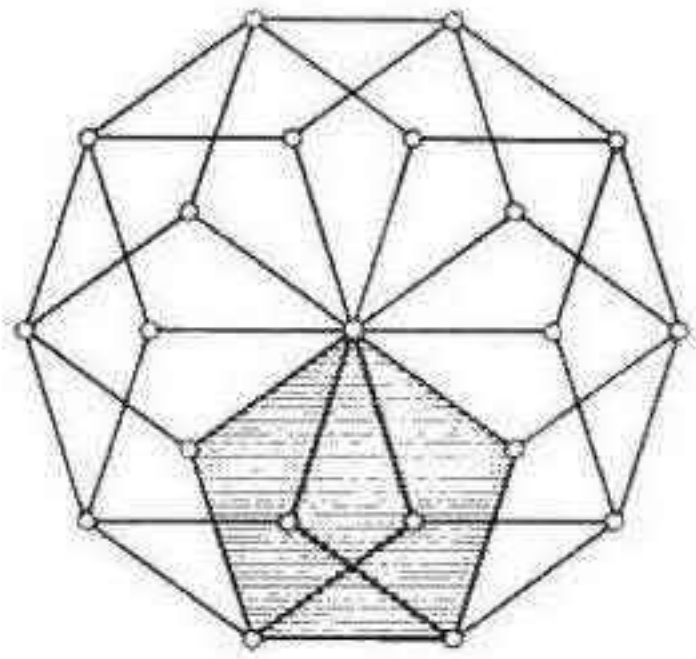
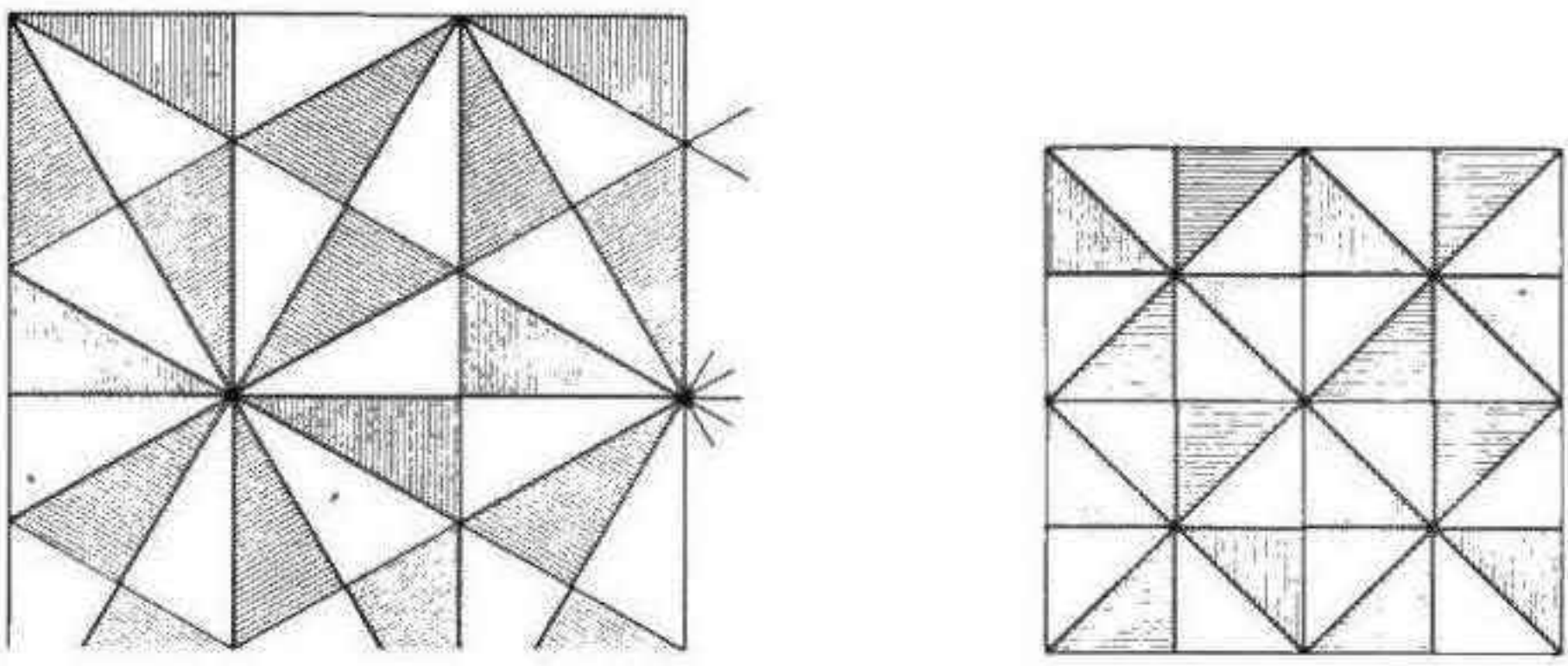


Figura 4.6c

Para encontrar el grupo de simetría de un mosaico regular, aplicamos a su cara el tratamiento que dimos a los ladrillos de § 4.4. Es claro que el grupo de simetría de $\{p, q\}$ se deriva del grupo de simetría D_p de una de sus caras al añadir la reflexión en uno de los lados de la cara. Así, queda generado por las reflexiones en los lados de un triángulo cuyos ángulos serán π/p (en el centro de la cara), $\pi/2$ (en el punto medio de una arista) y π/q (en un vértice). Este triángulo constituye una región fundamental, puesto que se transforma en triángulos vecinos por medio de las tres reflexiones generatrices. Como cada generador conserva invariantes los puntos de uno de los lados, la región fundamental es única: no se puede modificar mediante sumas y restas de la manera en que Escher modifica las regiones fundamentales de algunos grupos.

La retícula de estos triángulos, que llena el plano, es cortada por todas las rectas de simetría del mosaico regular. Las rectas de simetría incluyen las rectas de las aristas de $\{p, q\}$ y de su dual $\{q, p\}$. En el caso del $\{6, 3\}$ y el $\{3, 6\}$ (figura 4.6*b*) estas rectas de las aristas son suficientes; en el caso de los duales $\{4, 4\}$ necesitaremos considerar también las diagonales de los cuadrados. Las regiones alternas se han sombreado en la figura 4.6*d* para exhibir tanto los grupos completos de simetría **p6m**, **p4m** como los subgrupos "directos" **p6**, **p4** (que consisten en rotaciones y traslaciones) que preservan los colores y la dirección del sombreado [Brewster **1**, pág. 94; Burnside **1**, págs. 416, 417].

Pero, en lugar de derivar esta retícula de triángulos del mosaico regular, podemos proceder al revés, y derivar el mosaico de la retícula. Con este propósito, escogeremos un punto de la retícula donde los ángulos sean de π/p, es decir, donde los p triángulos sombreados y los q blancos se reúnen. Estos $2p$ triángulos se combinan para dar forma a una cara de $\{p, q\}$.



p6 y p6m **p4 y p4m**

Figura 4.6d

EJERCICIOS

1. Justifíquese la definición formal que se dio de "regular" en la página 90. (Implica que las caras son iguales entre sí y que los vértices están rodeados de la misma manera.)

2. Por medio de un argumento general, demuéstrese que los puntos medios de las aristas de un mosaico regular pertenecen a una celosía. (*Indicación*: Considérese el grupo **p2** que generan los medios giros alrededor de tres puntos como ésos.)

3. Señálense los puntos medios de las aristas de $\{6, 3\}$. Verifíquese que pertenecen a una celosía. ¿Constituyen la totalidad de la celosía?

4. Trácense porciones de celosías cuyos grupos de simetría sean **p2**, **pmm**, **cmm**, **p4m**, **p6m**.

4.7 EL PROBLEMA DE LOS PUNTOS COLINEALES DE SYLVESTER

> Reductio ad absurdum, *que tanto amaba Euclides, es una de las mejores armas del matemático. Es un gambito mucho más fino que uno cualquiera del ajedrez: un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o de otra pieza mayor, pero el matemático ofrece* el juego.
>
> G. H. Hardy [2, pág. 34]

Como vimos en § 4.1, una celosía es un conjunto discreto de puntos con la propiedad de que la recta que une a dos de ellos contiene además un número infinito de puntos de la celosía. La figura 4.6*a* nos muestra una "huerta" finita en la que nueve puntos están dispuestos en diez filas de tres cada una [Ball 1, pág. 105]. Es probable que haya sido al investigar estas configuraciones que a Sylvester* se le ocurrió el problema que propuso en 1893:

Demuéstrese que no se puede colocar ningún número finito de puntos reales de manera que una recta que pasa por cada dos de ellos pase también por un tercero a menos que estén todos sobre la misma recta.

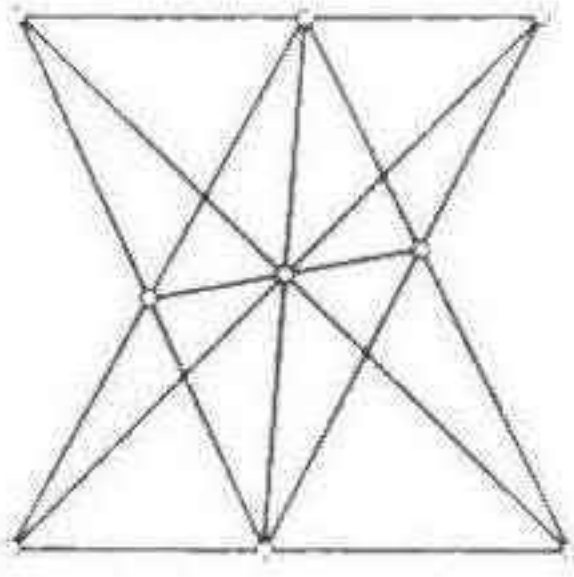


Figura 4.7a

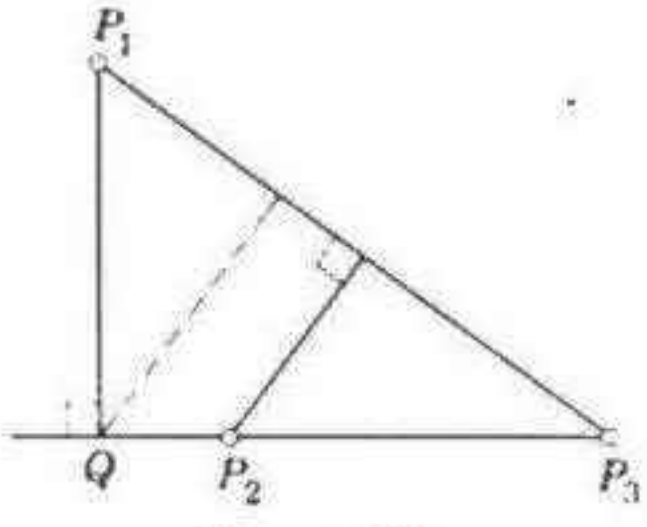


Figura 4.7b

Ni Sylvester ni ninguno de sus contemporáneos pudieron pensar en una demostración satisfactoria. El asunto fue olvidado hasta 1933, cuando Karamata y Erdös lo revivieron, y T. Gallai (*alias* Grünwald) finalmente tuvo éxito, con un argumento bastante complicado. La afirmación "negativa" de Sylvester fue redactada de nuevo y "positivamente" por Motzkin:

Si en el plano real se tiene que n puntos no están en la misma recta, existe una recta tal que contiene a dos de los puntos, exactamente.

La demostración que daremos a continuación, que se parece un poco a la demostración de Barlow de la restricción cristalográfica (§ 4.5), se debe a L. M. Kelly.

* J. J. Sylvester, *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times*, 59 (1893), pág. 98 (Pregunta 11851). Véanse también R. Steinberg, *American Mathematical Monthly*, 51 (1944), pág. 170; L. M. Kelly, *ibid.*, 55 (1948), pág. 28; T. Motzkin, *Transactions of the American Mathematical Society*, 70 (1951), pág. 452; L. M. Kelly y W. O. J. Moser, *Canadian Journal of Mathematics*, 10 (1958), pág. 213.

Los n puntos $P_1, \ldots, P_n$ están unidos por no más de $\frac{1}{2}n(n-1)$ rectas P_1P_2, P_1P_3, etc. Consideremos ahora los pares P_i, P_jP_k, que consisten en un punto y una recta de unión que no son incidentes. Como no puede haber más de $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ de estos pares, habrá por lo menos uno, digamos P_1, P_2P_3, con respecto al cual la distancia P_1Q desde el punto a la recta es la menor distancia de las que ocurren.

Entonces tenemos que la recta P_2P_3 no contiene ningún otro punto del conjunto, pues si contuviera a P_4, habría por lo menos dos de los puntos P_2, P_3, P_4 que quedaran a un lado de la perpendicular P_1Q (o también es posible que uno de los puntos P coincidiera con Q). Denominemos ahora a los puntos de manera que estos dos sean P_2, P_3, donde P_2 está más cerca de Q (o coincide con Q). Entonces P_2, P_3P_1 (figura 4.7*b*) es otro par que está a una distancia menor que P_1Q, lo que es absurdo.

Esto completa la demostración de que siempre hay una recta que contiene exactamente a dos de los puntos. Por supuesto, puede haber más de una recta: de hecho, Kelly y Moser han demostrado que el número de esas rectas no es menor que $3n/7$.

EJERCICIOS

1. La demostración anterior implica la presencia de una recta que contenga solamente dos de los puntos P. El punto Q de hecho está *entre* P_2 y P_3.
2. Si se tiene que n puntos no están en la misma recta, tienen por lo menos n rectas diferentes de unión [Coxeter **2**, pág. 31].
3. Trácese una configuración de n puntos con respecto a los que se obtiene el límite más bajo de $3n/7$ rectas "ordinarias" que los unen. (*Indicación*: $n = 7$.)

5

La semejanza en el plano euclidiano

Veremos en los últimos capítulos que la geometría euclidiana no es, en absoluto, la única geometría posible: hay otras clases que son igualmente lógicas, y casi tan útiles como ella; y, en algunos aspectos, más sencillas. De acuerdo con el famoso *programa Erlangen* (la alocución inaugural de Klein en la Universidad de Erlangen en 1872), el criterio que distingue a una geometría de otra es el grupo de transformaciones bajo el cual sus proposiciones conservan su validez. En el caso de la geometría euclidiana, podríamos esperar en principio que nuestro grupo fuera el grupo continuo de todas las isometrías. Pero como tenemos que las proposiciones se conservan válidas al alterar la escala de medida, como cuando hacemos una ampliación fotográfica, el "grupo principal" que corresponde a la geometría euclidiana [Klein 2, pág. 133] incluye también las "semejanzas" (en las que las distancias pueden cambiar, aunque, por supuesto, preservan los ángulos). En este capítulo clasificaremos estas transformaciones del plano euclidiano. Veremos que las "dilataciones", en particular, tienen un papel muy útil en la teoría del centro de los nueve puntos de un triángulo. Estas semejanzas y otras también "directas" se suelen tratar en los textos habituales, pero las semejanzas "opuestas" (§ 5.6) parecen haber sido olvidadas, por desgracia.

5.1 DILATACION

"Estoy segura de que al comer uno de estos pastelitos," pensó, "cambiaré de tamaño." . . . De manera que se tragó uno . . . y con alegría descubrió que se empezaba a encoger directamente.

Lewis Carroll

[Dodgson 1, Capítulo 4]

Resulta conveniente extender la definición habitual de *paralela* al afirmar que dos rectas (infinitas) son paralelas cuando no tienen ningún punto en común o cuando tienen dos puntos en común. (En este último caso las rectas coinciden.) Esta convención nos permite afirmar que, sin excepción,

5.11 *Para todo punto A y recta r, hay una sola recta que pasa por A y es paralela a r.*

Se dice que dos figuras son *homotéticas* cuando son semejantes y se encuentran colocadas de manera semejante, es decir, si las relaciona una dilatación, que se definirá de la manera siguiente [Artin **1**, pág. 54]:

Una *dilatación* es una transformación que preserva (o invierte) la dirección: es decir, *transforma toda recta en una paralela a ella.*

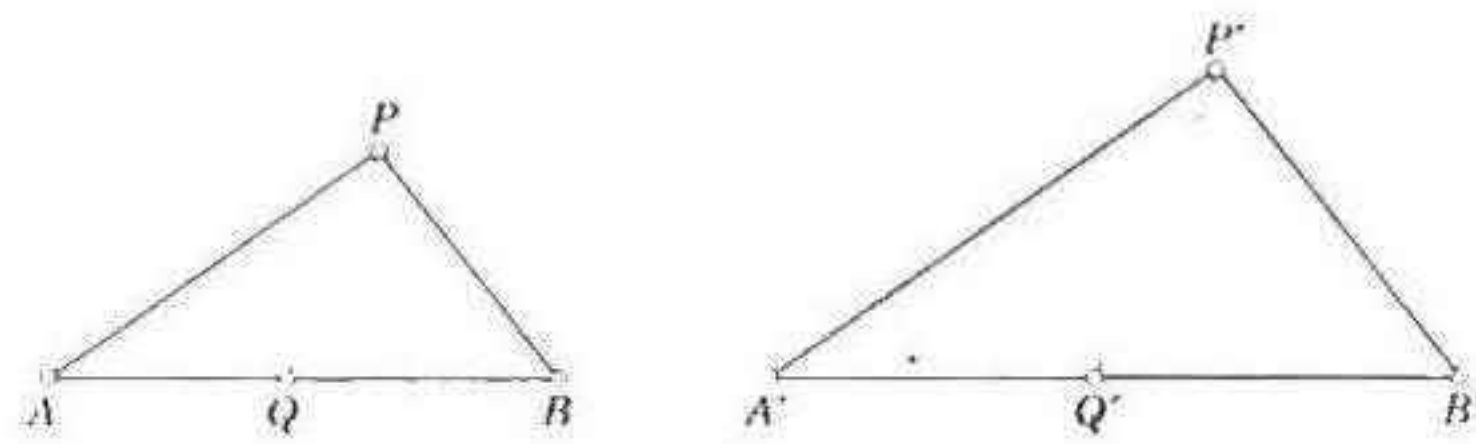


Figura 5.1a

5.12 *Dos segmentos de recta paralelos AB, $A'B'$ se relacionan por medio de una dilatación única $AB \to A'B'$.*

Pues tenemos que todo punto P que no esté en AB se transforma en el punto P', que es el punto de intersección de la recta que pasa por A' y es paralela a AP con la recta que pasa por B' y es paralela a BP (figura 1.5*a*); y todo punto Q que esté en AB se transforma en el punto Q', que es el punto de intersección de $A'B'$ con la recta que pasa por P' y es paralela a PQ.

Dicho de otra manera, una dilatación queda totalmente determinada por su efecto en dos puntos dados cualquiera [Coxeter **2**, 8.51].

Es evidente que la inversa de la dilatación $AB \to A'B'$ es la dilatación $A'B' \to AB$. También se tiene que $AB \to AB$ es la identidad, $AB \to BA$ es un semigiro (alrededor del punto medio de AB), y si $ABB'A'$ es un paralelogramo, $AB \to A'B'$ es una traslación.

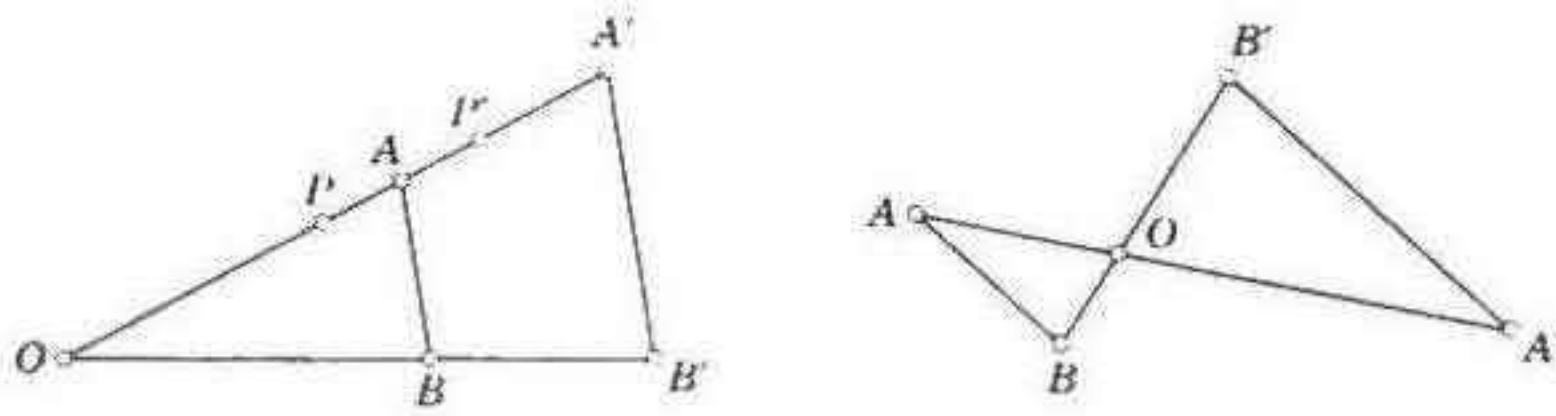


Figura 5.1b

Cuando se tiene cualquier dilatación distinta de la identidad, se pueden escoger los dos puntos A y B tales que A no sea un punto invariante y AB no sea una recta invariante. Una dilatación así $AB \to A'B'$ (figura 5.1*b*) transforma a un punto cualquiera P de AA' en un punto P' situado en la paralela que pasa por A', que es la misma AA'. Igualmente, transforma a un punto cualquiera Q de BB' en un punto Q' de BB'. Si AA' y BB' no son paralelas, estas dos rectas invariantes se intersectarán en un punto invariante O. En consecuencia,

5.13 *Toda dilatación que no sea también una traslación tiene un punto invariante.*

Este punto invariante O es *único*. Pues una dilatación que tenga dos puntos invariantes no puede ser sino la identidad, que se puede considerar de manera razonable como una traslación, a saber, la traslación que recorre una distancia de cero [Weyl **1**, pág. 69].

Es claro que un punto cualquiera P se transforma en un punto P' de OP. Escribamos

$$OP' = \lambda OP,$$

donde por convención el número λ será positivo o negativo según estén situados P y P' en el mismo lado de O o en lados opuestos. Con la ayuda de algunos triángulos homotéticos (como los de la figura 5.1*b*) podremos ver que λ es constante, es decir, independiente de la posición de P. Tenemos, incluso, que un segmento cualquiera PQ será transformado en un segmento de longitud $|\lambda|$ veces la longitud original y en dirección opuesta cuando $\lambda < 0$. Emplearemos como símbolo de la dilatación cuyo centro es O y que está en la razón λ, $O(\lambda)$. (Court [**2**, pág. 40] prefiere "(O, λ)".)

En particular, podemos afirmar que $O(1)$ denota la identidad y que $O(-1)$ denota un semigiro. Es claro que las únicas dilataciones que también son isometrías son los semigiros y las traslaciones. En el caso de una traslación, el símbolo $O(\lambda)$ pierde su utilidad.

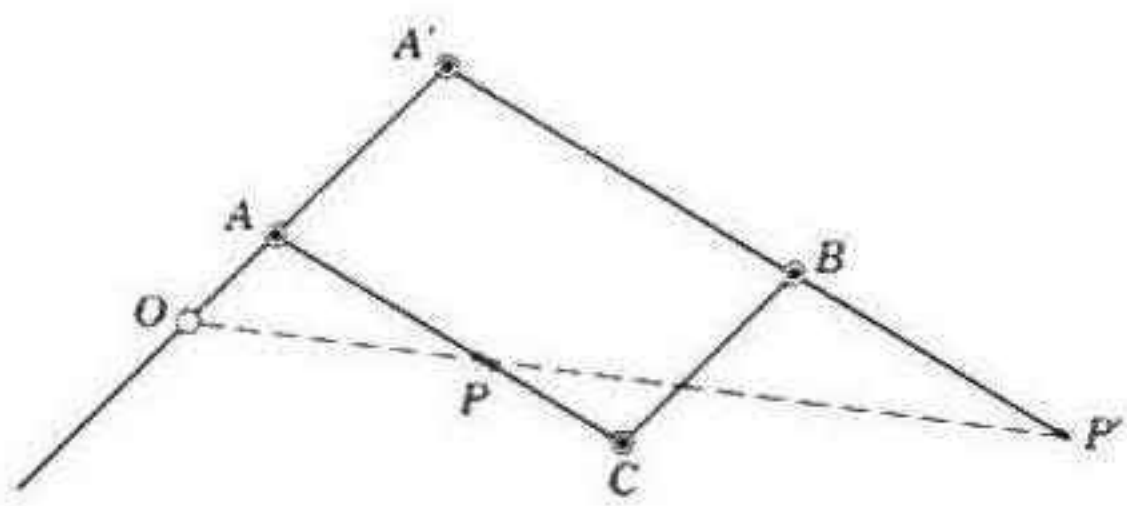


Figura 5.1c

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la inversa de la dilatación $O(\lambda)$?
2. Si el producto de $O_1(\lambda_1)$ y $O_2(\lambda_2)$ es $O(\lambda_1\lambda_2)$, ¿dónde está O?
3. Exprésese la dilatación $O(\lambda)$ en términos de (a) coordenadas polares, (b) coordenadas cartesianas.

4. Explíquese el funcionamiento del *pantógrafo* (figura 5.1c), el instrumento que inventó Christoph Scheiner hacia 1630 con el propósito de hacer copias, reducidas o aumentadas, de cualquier figura dada. Se compone de cuatro varillas rectas con bisagras en los extremos que son los vértices de un paralelogramo $AA'BC$, cuyos ángulos pueden variar. Los tres puntos colineales O, P, P' situados en las barras AA', AC, $A'B$ respectivamente conservan su colinealidad cuando se altera la forma del paralelogramo. El instrumento tiene un centro de rotación en O. Al insertar la puntilla de un lapicero en P' y una punta de trazado en P (o viceversa), y se recorre con la segunda la línea de una figura dada, la puntilla de lapicero dibuja la copia homotética. Las posiciones de O y P son ajustables en sus varillas correspondientes de manera que se puedan elegir distintas razones de las proporciones $OA : OA'$. (Se ha de tener cuidado, por supuesto, para que O y P se mantengan colinealmente con respecto a P'.)

5. ¿Cómo se ha de modificar el pantógrafo de manera que se obtenga una dilatación $O(\lambda)$, donde λ sea negativa?

5.2 CENTROS DE SIMILITUD

Me he preguntado con frecuencia cuál será la razón de haber metido la "similitud" en la geometría elemental. . . . Estoy seguro de que los muchachos se sentirían considerablemente más tranquilos frente al problema de un par de circunferencias si les habláramos sencillamente de centros de "semejanza", en lugar de hacerles imaginar que es una idea nueva la que se les insinúa.

E. H. Neville (1889–1961)

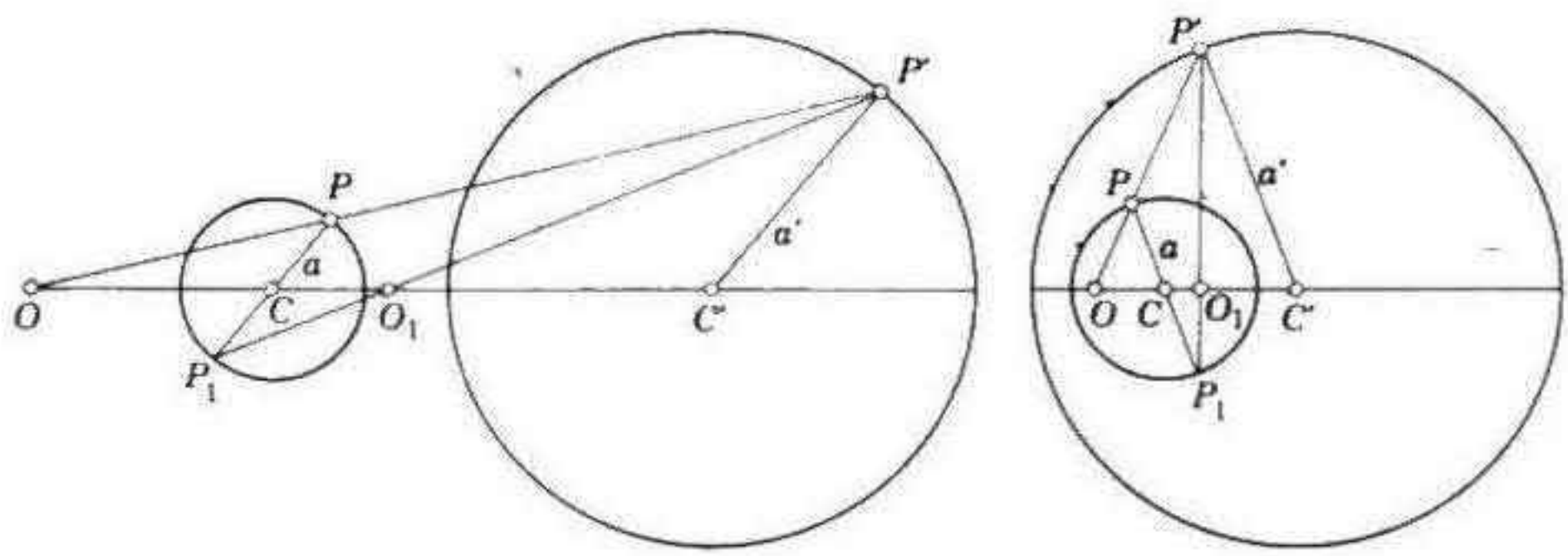


Figura 5.2a

La dilatación $O(\lambda)$, que transforma a C en C', transforma el círculo de centro C y de radio r en un círculo de centro C' y de radio $|\lambda|\ r$. Y de la manera contraria, si dos circunferencias como las que vemos en la figura 5.2*a*, tienen centros diferentes C, C' y radios desiguales a, a', se relacionan por medio de dos dilataciones, $O(a'/a)$ y $O_1(-a'/a)$, cuyos centros O y O_1 dividen al segmento CC' externa e internamente en la proporción de $a : a'$ [Court 2, pág. 184]. A estos puntos O y O_1 se les llama *centros de similitud* de las dos circunferencias. Para construirlos, tomamos un diámetro arbitrario PCP_1 del primer círculo y un radio paralelo del segundo, $C'P'$ (dónde P' está en el mismo lado de CC' que P); entonces O se encuentra en PP' y O_1 en P_1P'.

Cuando dos circunferencias son concéntricas o iguales, se siguen relacionando por dos dilataciones, pero solamente hay un centro de similitud. En el caso de las circunferencias concéntricas, se debe a que ambas dilataciones tienen el mismo centro. En el caso de las circunferencias iguales, se debe a que una de las dilataciones es una traslación, que no tiene centro (la otra es un semigiro alrededor de O_1, que es ahora el punto medio de CC'.)

A. Vandeghen y R. Veldkamp (*American Mathematical Monthly*, 71 (1964), pág. 178) descubrieron que, con respecto al triángulo que se estudió en el ejercicio 10 de § 1.5 (página 39), los centros de similitud de las dos "circunferencias de Soddy" son el incentro y el punto de *Gergonne*, que es el punto al que concurren las rectas que unen los vértices con los puntos de contacto de los lados respectivamente opuestos y la circunferencia inscrita.

EJERCICIOS

1. Si dos circunferencias iguales carecen de un punto en común, tienen dos tangentes paralelas y comunes, y otras dos tangentes comunes que pasan por O_1 (la mitad del camino entre los centros). Si las circunferencias se tocan, tienen solamente tres tangentes comunes. Si se intersectan, no tienen más que las dos tangentes paralelas comunes a ambos.
2. Una tangente común a dos circunferencias desiguales pasa por uno de los centros de similitud. Dibújense las posiciones de los centros de similitud y señálese el número de tangentes comunes en los cinco casos esencialmente diferentes de dos circunferencias como ésas. (Dos de los casos se encuentran en la figura 5.2*a*.)
3. A partir de dos dilataciones $O(\lambda)$, $O_1(\lambda_1)$, donde $\lambda \neq \lambda_1$, descríbase la posición de un punto único, C, en el cual ambas tienen el mismo efecto.

5.3 EL CENTRO DE LOS NUEVE PUNTOS

Considérese un triángulo arbitrariamente elegido ABC, cuyo circuncentro sea O, tenga centroide G y ortocentro H. Sean $A'B'C'$ los puntos medios de los lados, y $A''B''C''$ los puntos medios de los segmentos HA, HB, HC, como se tiene en la figura 1.7*a*. Es claro que los dos triángulos $A'B'C'$, $A''B''C''$ son homotéticos con respecto a ABC, pues se han derivado de ABC mediante las dilataciones respectivas $G(-\frac{1}{2})$, $H(\frac{1}{2})$. Por medio de la segunda dilatación se puede demostrar de una manera nueva que las medianas son concurrentes y se trisecan unas a otras.

Puesto que $G(-\frac{1}{2})$ y $H(\frac{1}{2})$ son las dos dilataciones por medio de las que se puede derivar la circunferencia de los nueve puntos a partir de la circunferencia circunscrita [Court 2, pág. 104], los puntos G, H son los centros de similitud de las dos circunferencias correspondientes, y la recta de Euler GH contiene los centros de ambas: no solamente el circuncentro O, como ya sabíamos, sino también el *centro de los nueve puntos*, N. Como los valores de μ con respecto a las dilataciones son $\pm\frac{1}{2}$, el radio de los nueve puntos es la mitad del circunradio, y los centros de similitud H, G dividen al segmento ON externa e internamente en la proporción de 2 : 1 (figura 5.3*a*). Así, tenemos que N es el punto medio de OH.

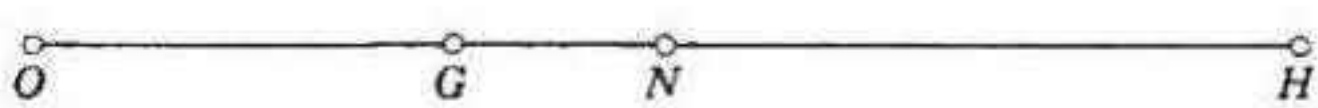


Figura 5.3a

EJERCICIOS

1. Por medio de coordenadas cartesianas, encuéntrense las ordenadas y de los centros O, G, N, H del triángulo isósceles cuyos vértices están en $(0, 10)$, $(\pm 6, -8)$.

2. Si $ABCH$ es un cuadrángulo ortocéntrico (véase 1.72), las cuatro rectas de Euler de los triángulos BCH, CAH, ABH, ABC concurren a un mismo punto.

5.4 EL PUNTO INVARIANTE DE UNA SEMAJANZA

Cuando se amplifica una figura de manera que se conserve su forma, todas sus rectas siguen siendo rectas, y sus ángulos siguen siendo congruentes consigo mismos. Todas las partes de la figura se amplifican por igual. Cuando una figura es la copia amplificada de otra, se dice que las dos son semejantes. *El grado de amplificación que interviene para que una figura sea igual a la otra se llama* razón de similitud. *La razón de dos rectas de una figura será igual a la razón de las dos rectas correspondientes de la otra.*

W. K. Clifford (1845–1879)

(*Mathematical Papers*, pág. 631)

Una *semejanza* (o "transformación semejante", o "similitud") es una transformación que lleva cada segmento AB a un segmento $A'B'$, de longitud dada por

$$\frac{A'B'}{AB} = \mu,$$

donde μ es un número constante y positivo (igual para todos los segmentos) que se llama *razón de amplificación* (la "razón de similitud" de Clifford). En consecuencia, un triángulo cualquiera se transforma en otro semejante a él, y un ángulo cualquiera en otro semejante (u opuesto). Cuando $\mu = 1$, la semejanza es una isometría. Otros casos especiales son los de las dilataciones $O(\pm\mu)$.

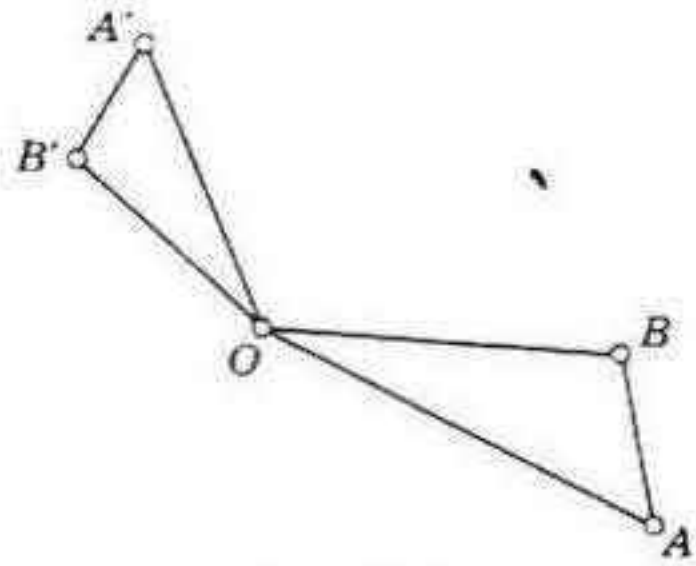


Figura 5.4a

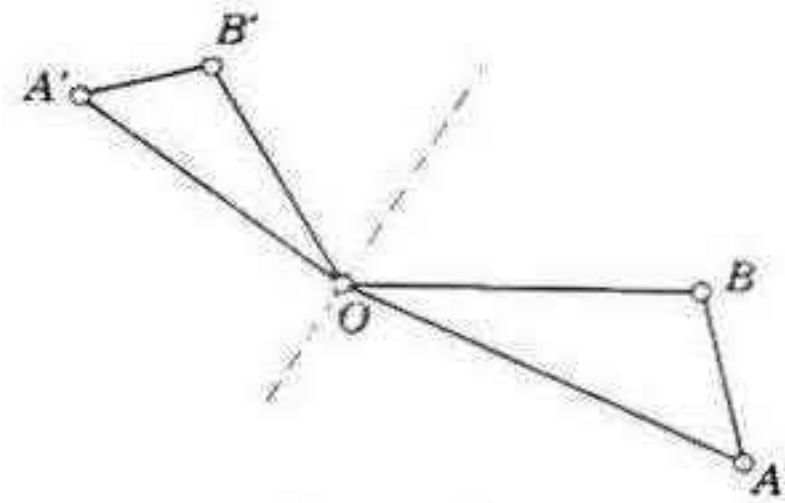


Figura 5.4b

Un caso menos conocido es el de la *rotación dilatativa* (o "semejanza de espiral", figura 5.4*a*), que es el producto de una dilatación $O(\mu)$ y de una rotación alrededor de O. Otro lo constituye la *reflexión dilatativa* (figura 5.4*b*) que es el producto de una dilatación $O(\mu)$ y la reflexión en una recta que pase

por O. No obtendremos ningún elemento nuevo (en cualquiera de los casos) al substituir esta dilatación $O(\mu)$ por $O(-\mu)$. Esto se debe a que, como $O(-\mu) = O(-1) \cdot O(\mu)$, y $O(-1)$ es un semigiro, el producto de $O(\mu)$ y una rotación que recorra un ángulo α alrededor de O es igual al producto de $O(-\mu)$ y una rotación que recorra un ángulo $\alpha + \pi$; y puesto que $O(-1)$ es el producto de dos reflexiones perpendiculares, el producto de $O(\mu)$ y la reflexión en una recta m que pase por O es igual al producto de $O(-\mu)$ y la reflexión en la recta que pase por O y es perpendicular a m. De hecho, una reflexión dilatativa tiene dos rectas perpendiculares que se conservan invariantes (sus *ejes*), que son las bisectrices interna y externa de $\angle AOA'$ (y de $\angle BOB'$).

Entonces, es evidente que (cf. 3.11)

5.41 *Dos triángulos semejantes cualesquiera ABC, $A'B'C'$ se relacionan por medio de una semejanza única $ABC \to A'B'C'$, que será directa u opuesta de acuerdo con que el sentido de $A'B'C'$ concuerde o no con el de ABC.*

Dicho de otro modo, una semejanza se determina completamente por su efecto en tres puntos no colineales cualquiera. Por ejemplo, los dos triángulos CBF, ACF que se emplearon para demostrar el teorema de Pitágoras (figura 1.3*d*) se relacionan mediante una rotación dilatativa, que es el producto de la dilatación $F(AC/CB)$ y un semigiro; y los dos triángulos ABC, ACF (de la misma figura) se relacionan mediante una reflexión dilatativa cuyos ejes son las bisectrices del ángulo A.

He aquí otra manera de expresar la misma idea:

Dos segmentos cualesquiera de recta, AB, $A'B'$, se relacionan por medio de exactamente dos semejanzas: una directa y otra opuesta.

Por ejemplo, se puede completar el segmento AB, de manera que forme un cuadrado $ABCD$ en ambos extremos de la recta AB, y hay dos maneras también de colocar un cuadrado $A'B'C'D'$ en $A'B'$. La semejanza

$$ABCD \to A'B'C'D'$$

será directa u opuesta según concuerden o no los sentidos alrededor de ambos cuadrados.

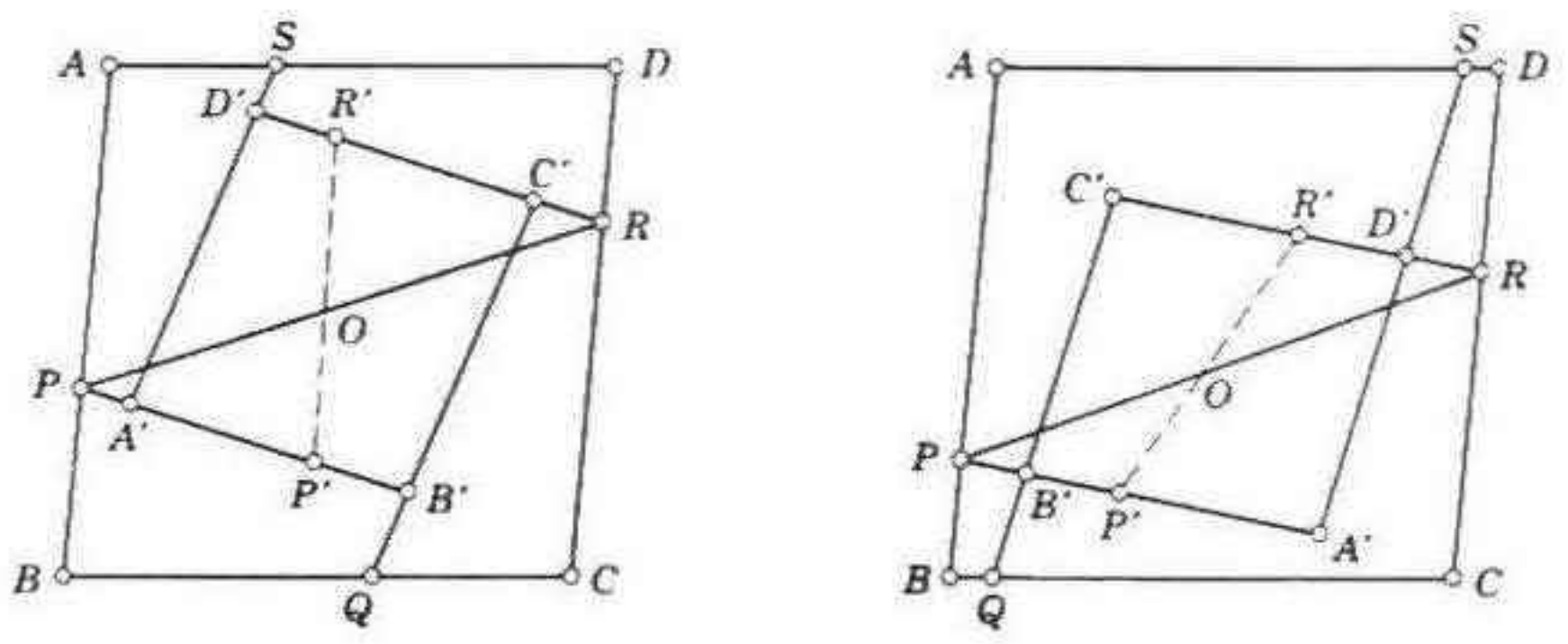


Figura 5.4c

El teorema 5.13 nos sugiere la posibilidad de que toda semejanza en la que $\mu \neq 1$ tenga un punto invariante.

Si una semejanza dada no es una dilatación, hay allí por lo menos una recta que no ha sido transformada en su paralela. Sean AB y $A'B'$ segmentos correspondientes en un par de esas rectas, y quede la semejanza existente (directa u opuesta) determinada por paralelogramos $ABCD$ y $A'B'C'D'$, semejantes, pero no congruentes (por ejemplo, por cuadrados, como se hizo anteriormente).

Denotemos por P, Q, R, S los puntos de intersección de los pares de rectas correspondientes AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, CD y $C'D'$, DA y $D'A'$, como en la figura 5.4*c*. Supongamos que la semejanza existente transforma a P (de AB) en P' (de $A'B'$) y a R (de CD) en R' (de $C'D'$). Sea O el punto común de las rectas PR, $P'R'$ (que no pueden ser paralelas, pues de lo contrario, $PRR'P'$ sería un paralelogramo y los segmentos PR, $P'R'$ serían congruentes, lo que contradice la hipótesis de que $P'R' = \mu PR$). Puesto que los pares de puntos PP' y RR' quedan en las paralelas $A'B'$ y $C'D'$, tenemos

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OP'}{OR'}.$$

Por lo tanto, la semejanza conserva invariante a O. Además, O es el *único* punto invariante. Pues si una semejanza donde $\mu \neq 1$ tuviera dos puntos invariantes O_1 y O_2, la distancia O_1O_2 quedaría sin cambio alguno, en lugar de ser multiplicada por μ. En consecuencia,

5.42 *Toda semejanza que no sea una isometría tiene un solo punto invariante.*

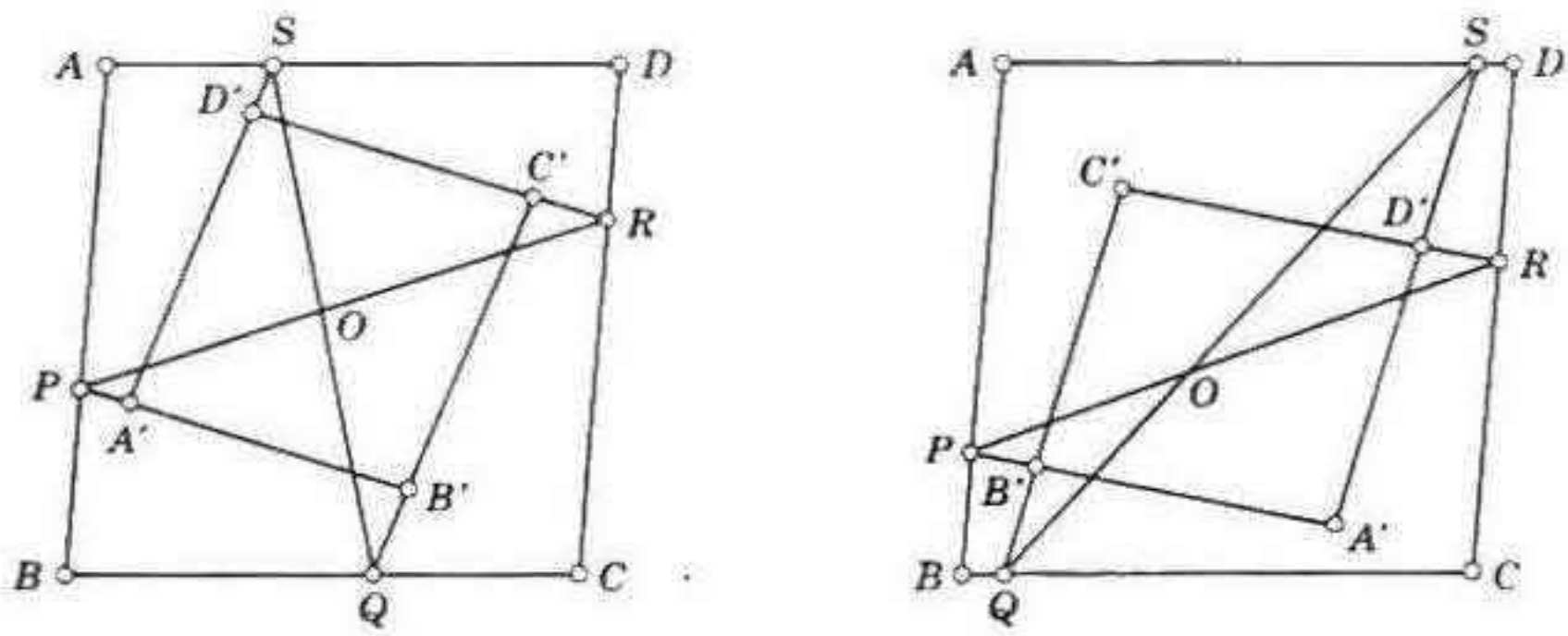


Figura 5.4d

Pero si incluso se nos dan dos paralelogramos semejantes $ABCD$ y $A'B'C'D'$, podemos emplear el método que se señala en la figura 5.4*d* para *construir* el centro de la semejanza que los relaciona. Pues una vez que se observa que O está en la recta PR, podemos aplicar el mismo proceso de

razonamiento (donde emplearemos BC y DA en lugar de AB y CD) para demostrar que O está en la recta QS. Tenemos aquí una recta diferente, pues si P, Q, R, S fueran puntos colineales tendríamos que

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PS}{PQ} = \frac{PA'}{PB'} \quad \text{y} \quad \frac{RC}{RD} = \frac{RQ}{RS} = \frac{RC'}{RD'},$$

lo cual hace tanto a P como a R invariantes. En consecuencia, *O se puede construir como el punto de intersección de las rectas PR y QS.*

EJERCICIO

¿Cómo podría emplearse la idea de continuidad para demostrar de otra manera el teorema 5.42?

5.5 SEMEJANZA DIRECTA

Considérese una semejanza directa determinada, cuya razón de ampliación μ no sea 1. Como hay un punto invariante, sea O, esta semejanza se podrá, expresar como producto de la dilatación $O(\mu)$ y una *isometría* directa tal que conserve invariante a O. Por el teorema 3.14, esa isometría no es sino una rotación alrededor de O. Por lo tanto,

5.51 *Toda semejanza directa que no es una isometría, es una rotación dilatativa.*

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el producto de dos rotaciones dilatativas?
2. ¿Cómo hay que proceder para, a partir de dos círculos, ubicar el punto invariante de la semejanza directa que relaciona a dos segmentos de recta incongruentes que se han determinado sobre rectas no paralelas? [Casey 1, pág. 186.]

5.6 SEMEJANZA OPUESTA

Considérese una determinada semejanza opuesta cuya razón de ampliación μ no sea 1. Como existe un punto invariante, sea O, nuestra semejanza podrá expresarse como producto de la dilatación $O(\mu)$ y una isometría opuesta que conserve invariante a O. Mediante el teorema 3.14, podemos afirmar que esa isometría no es sino una reflexión en una recta que pasa por O. Por lo tanto,

5.61 *Toda semejanza opuesta que no es una isometría, es una reflexión dilatativa.*

EJERCICIOS

1. Si se dibujan dos mapas del mismo país a escalas diferentes en papel de china y se superponen, habrá un solo lugar que representa el mismo punto en ambos mapas. (Se debe entender que uno de los mapas puede colocarse sobre el otro por el anverso o el reverso.) [Lachlan 1, págs. 137, 139.]
2. Cuando se tiene que todos los puntos P en una recta AB se relacionan mediante una semejanza con todos los puntos P' en $A'B'$, los puntos que dividen a los segmentos

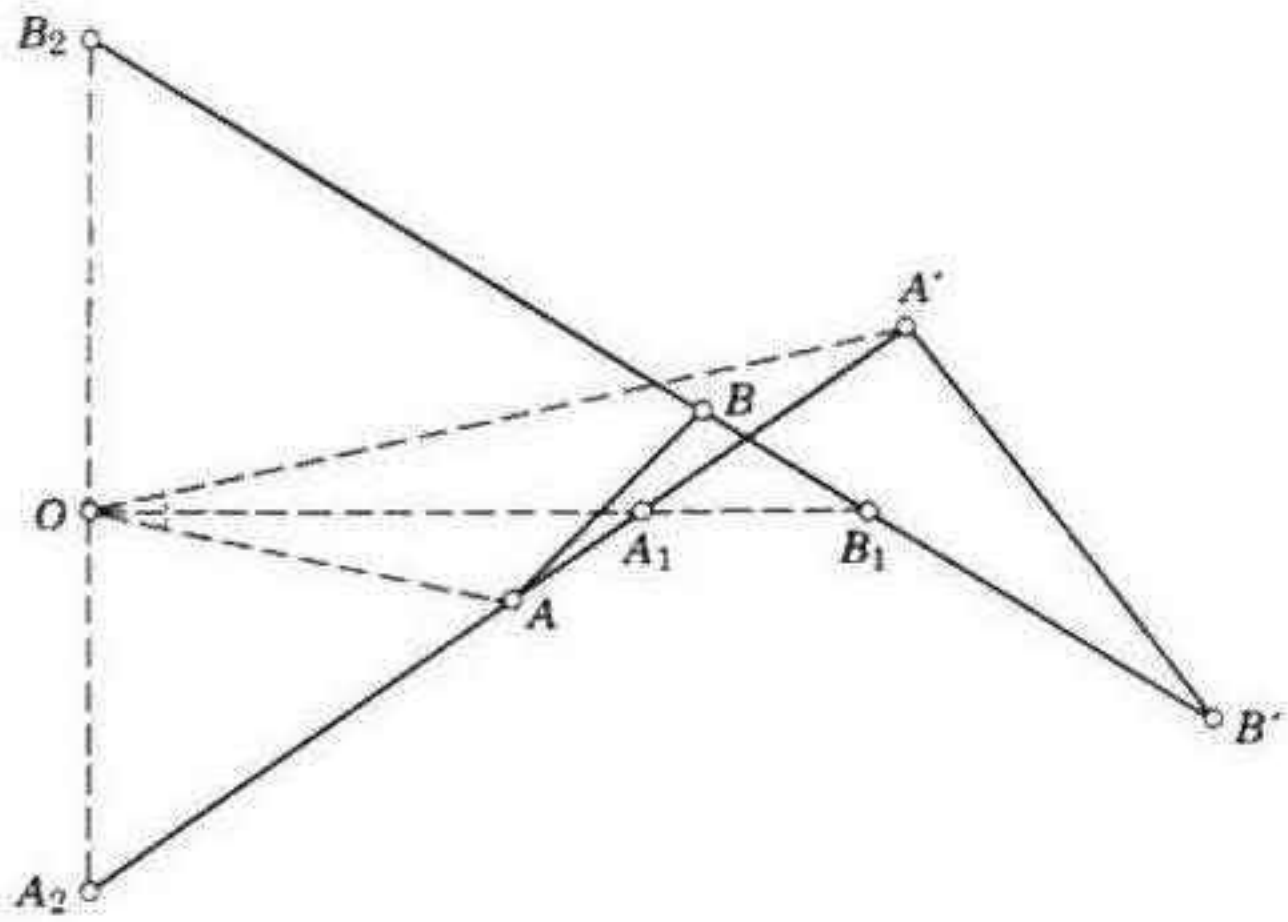


Figura 5.6a

PP' en la razón de $AB : A'B'$ (interna o externamente) son distintos y colineales o, de no ser así, coinciden todos.

3. Si S es una semejanza opuesta S^2 es una dilatación.

4. ¿Qué es el producto de (a) dos reflexiones dilatativas? (b) una rotación y una reflexión dilatativas?

5. Sean AB y $A'B'$ dos segmentos de recta de diferentes longitudes. Sean A_1 y A_2 tales que dividan a AA' en la razón de $AB : A'B'$, interna y externamente (como se tiene en la figura 5.6*a*). Sean B_1 y B_2 tales que dividan a BB' de la misma manera. Entonces, las rectas A_1B_1 y A_2B_2 forman un ángulo recto y son los ejes de la reflexión dilatativa que transforma a AB en $A'B'$. [Lachlan 1, pág. 134; Johnson 1, pág. 27.] (Se supone tácitamente que $A_1 \neq B_1$ y $A_2 \neq B_2$. Sin embargo, si A_2 y B_2 coinciden, los ejes serán A_1B_1 y la recta perpendicular que pasa por A_2.)

6. Descríbase la transformación

$$(r, \theta) \to (\mu r, \theta + \alpha)$$

de coordenadas polares, y la transformación

$$(x, y) \to (\mu x, -\mu y)$$

de coordenadas cartesianas.

6

Círculos y esferas

Este capítulo muestra la manera en la que la geometría euclidiana, en la que las rectas y los planos tienen un papel fundamental, puede extenderse a la geometría *inversiva*, en la que el mismo papel lo toman los círculos y las esferas. Y veremos también la manera de substituir la afirmación obvia, que dice que las rectas y los planos no son sino circunferencias y superficies esféricas de radios infinitos, por la más sofisticada que señala que las rectas y los planos son las circunferencias y superficies esféricas que pasan por un punto "ideal", al que se le llama "punto en el infinito". En §6.9 estudiaremos brevemente una geometría aún menos habitual, que se llama *elíptica*, y es una de las celebradas geometrías "no euclidianas".

6.1 LA INVERSION EN UN CIRCULO

> *¿Será posible que todos los grandes científicos del pasado hayan estado en realidad jugando, dentro de un juego en el que las reglas no las ha escrito el hombre sino Dios? . . . Al jugar, no se pregunta por qué se juega; se juega, sencillamente. El juego carece de código moral, aparte del extraño código que se impone misteriosamente en el juego. . . . Uno puede buscar en la literatura científica señales de motivación, pero será un esfuerzo vano. Y en lo que se refiere al extraño código moral que los científicos observan, ¿qué puede ser más raro que la consideración abstracta de la verdad en un mundo tan lleno de mentira, de cosas que se esconden y de prohibiciones? . . . Al poner a su consideración esta idea de que la mente humana alcanza un estado óptimo cuando juega, yo mismo estoy jugando, y esto me hace sentir que en lo que digo puede haber un elemento de verdad.*
>
> J. L. Synge (1897–)*

* *Hermatena*, 19 (1958), pág. 40; se cita con la autorización del editor.

Todas las transformaciones que hemos estudiado hasta el momento han consistido en semejanzas, que transforman rectas en rectas y ángulos en ángulos iguales. La transformación que se llama inversión, que inventó L. J. Magnus en 1831, es novedosa en un aspecto, pero conocida en otro: transforma a rectas en circunferencias, pero continúa transformando ángulos en ángulos iguales. Como la reflexión y el semigiro, es involutoria (es decir, de período 2). Como la reflexión, tiene una infinidad de puntos invariantes; éstos no se encuentran en una recta, sino en una circunferencia, y el centro del círculo es "singular": ¡carece de imagen!

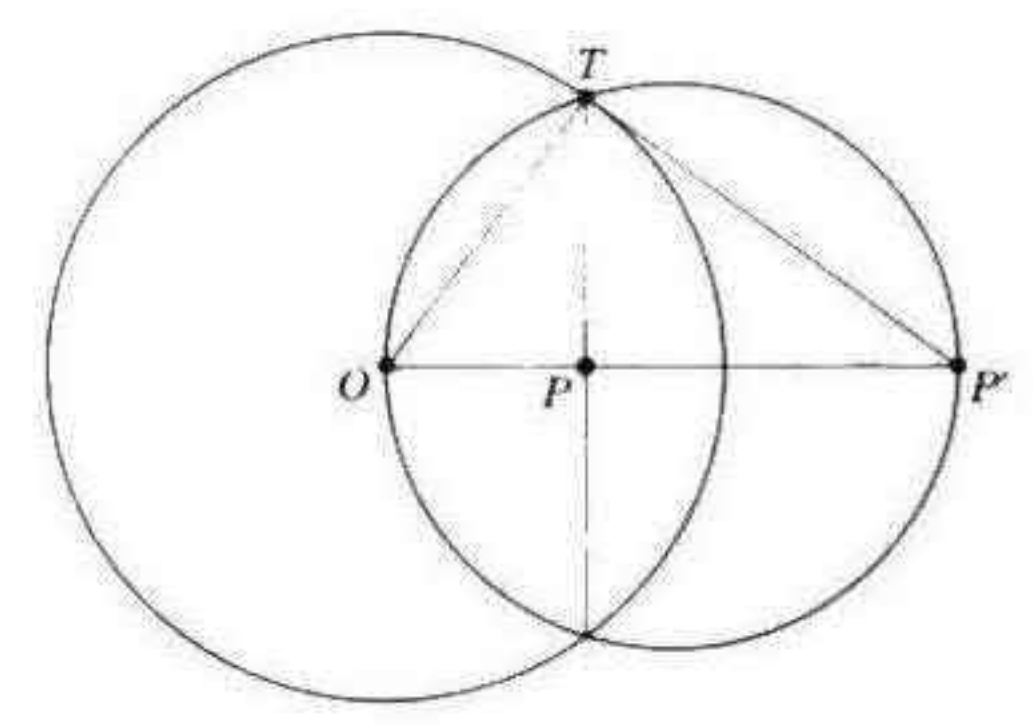


Figura 6.1a

A partir de un círculo fijo cuyo centro es O y cuyo radio es k, definimos el *inverso* de un punto cualquiera P (que no sea O) como el punto P' del rayo OP tal que su distancia a O satisface la ecuación

$$OP \times OP' = k^2.$$

La consecuencia de esta definición es que el inverso de P' será el mismo P. Además, todo punto que quede fuera del círculo de inversión se transforma en un punto del interior, y todo punto del interior (con la excepción de O, el centro) en un punto del exterior. El círculo es invariante en el sentido estricto de que todos sus puntos son invariantes. Toda recta que pase por O será invariante en su conjunto, mas no punto por punto.

El inverso de un punto dado P (distinto de O) que esté dentro del círculo de inversión, se puede construir al considerar el extremo T de la cuerda que pasa por P y es perpendicular a OP, como se tiene en la figura 6.1*a*. Entonces, la tangente en T cortará a la prolongación de OP en el punto que se busca, P'. Como tenemos que los triángulos rectángulos OPT, OTP' son semejantes y que $OT = k$,

$$\frac{OP}{k} = \frac{k}{OP'}.$$

Para construir el inverso de un punto dado P', situado en el exterior del círculo de inversión, sea T uno de los puntos de intersección de este círculo

con uno nuevo que trazamos con diámetro OP' (figura 6.1*a*). Entonces, el punto que queremos encontrar es el pie de la perpendicular desde T a OP'.

Cuando $OP > \frac{1}{2}k$, se puede construir con facilidad el inverso de P por medio del compás, sin que intervenga la regla. Con este fin, tómese la circunferencia que pasa por O y cuyo centro es P, que cortará al círculo de inversión en Q y Q'. Entonces tenemos que P' es la segunda intersección de las circunferencias que pasan por O de centros Q y Q'. (Esto se comprende con facilidad al observar los triángulos isósceles semejantes POQ, QOP'.)

Hay una relación interesante entre la dilatación y la inversión:

6.11 *El producto de las inversiones en dos círculos concéntricos cuyos radios son k y k' es la dilatación $O(\mu)$, donde $\mu = (k'/k)^2$.*

Para demostrar esta afirmación, observemos que este producto transforma a P en P'' (de OP), donde

$$OP \times OP' = k^2, \qquad OP' \times OP'' = k'^2$$

y por lo tanto,

$$\frac{OP''}{OP} = \left(\frac{k'}{k}\right)^2.$$

EJERCICIOS

1. Por medio solamente del compás, constrúyanse los vértices de un exágono regular.
2. Por medio solamente del compás, ubíquese el punto B tal que el segmento OB sea el doble de un segmento dado OA.
3. Por medio solamente del compás, constrúyase el inverso de un punto que dista $\frac{1}{3}k$ del centro O del círculo de inversión. Descríbase un procedimiento para invertir puntos que estén arbitrariamente cerca de O.
4. Por medio solamente del compás, biséquese un segmento dado.
5. Por medio solamente del compás, triséquese un segmento dado. Descríbase un procedimiento para dividir un segmento en cualquier número de partes iguales.

Nota. Los problemas anteriores pertenecen a la Geometría del Compás, que fue desarrollada de modo independiente por G. Mohr en Dinamarca (1672) y por L. Mascheroni en Italia (1797). La versión concisa de toda la historia se puede encontrar en Pedoe [1, págs. 23–25] o Courant y Robbins [1, págs. 145–151].

6.2 CIRCULOS ORTOGONALES

Como círculo soy un objeto feliz:
Considera que la dichosa perpendicular
Que se yergue en el beso de tangencia
Ha de alcanzar mi centro, mi avatar.
Soy hermoso, y no obstante
Bastan 3 puntos para determinarme. *

Christopher Morley (1890–)

* *A circle is a happy thing to be–*
Think how the joyful perpendicular
Erected at the kiss of tangency
Must meet my central point, my avatar.
And lovely as I am, yet only 3
Points are needed to determine me.

Se dice que dos círculos son *ortogonales* si se cortan en ángulos rectos, es decir, si se intersectan en dos puntos en los que el radio de cada uno es una tangente del otro (figura 6.2*a*)

De Euclides III.36 (véase la pág. 30) podemos deducir que una circunferencia cualquiera que pase por dos puntos inversos es invariante: el círculo de inversión la descompone en dos arcos que se relacionan entre sí inversamente: uno, invertido, es el otro. Además, un círculo así es ortogonal con respecto al círculo de inversión, y se puede afirmar que, en este sentido, todo círculo ortogonal al círculo de inversión es invariante. Por un par de puntos inversos podemos trazar todo un *haz* de círculos (una infinidad de ellos), tales que todos serán ortogonales al círculo de inversión. En consecuencia,

6.21 *El inverso de un punto dado P es la segunda intersección de dos círculos cualquiera que pasan por P y son ortogonales al círculo de inversión.*

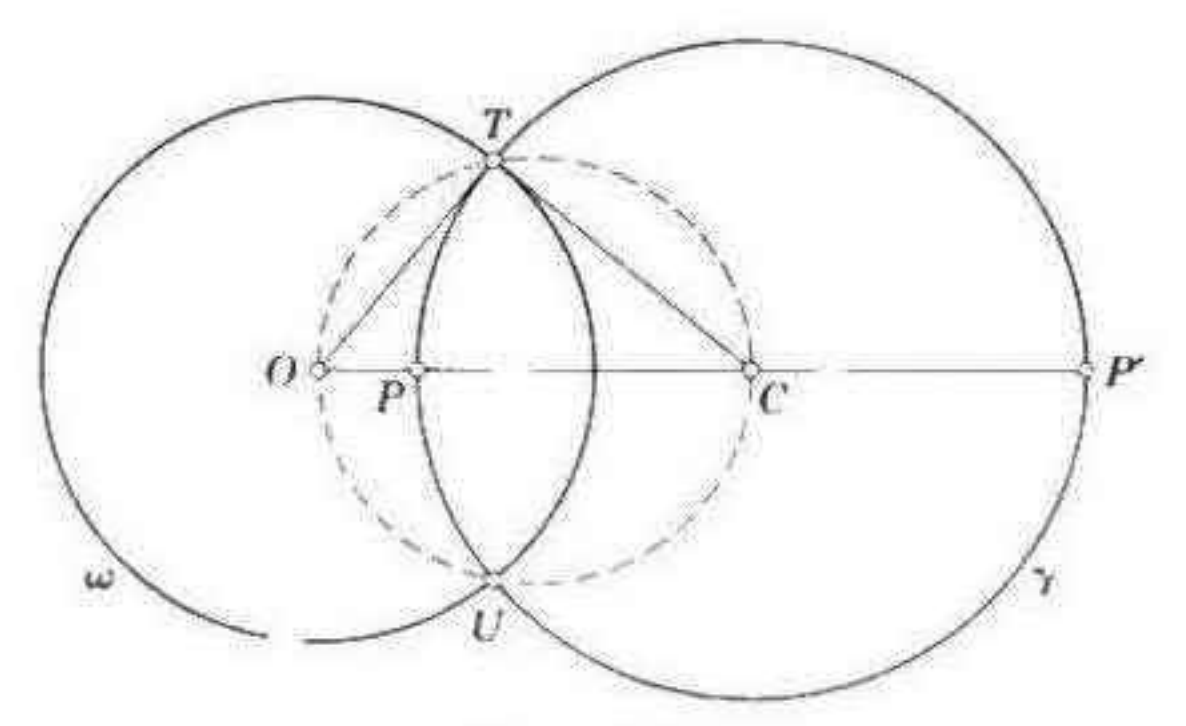


Figura 6.2a

Por medio de los comentarios anteriores se llega a una solución sencilla al problema de trazar por un punto dado P una circunferencia (o una recta) ortogonal a dos círculos dados. Sean P_1, P_2 los inversos de P en ambos círculos. Entonces la circunferencia PP_1P_2 (o la recta por los tres puntos, si se tiene que sean colineales) es ortogonal a los dos círculos dados.

Si O y C son los centros de dos círculos ortogonales ω y γ, como se tiene en la figura 6.2*a*, la circunferencia del círculo cuyo diámetro es OC pasa por los puntos de intersección T, U. Todos los demás puntos de esta circunferencia están dentro de uno de los dos círculos ortogonales y fuera del otro. Por lo tanto, si a y b son dos perpendiculares que pasan respectivamente por O y C, o bien a toca a γ y b toca a ω, o bien a corta a γ y b queda fuera de ω, o bien a queda fuera de γ y b corta a ω.

6.3 INVERSION DE RECTAS Y CIRCULOS

Hemos visto que las rectas que pasan por O se invierten en sí mismas. ¿Qué sucede con otras rectas? Sea A el pie de la perpendicular que va de O

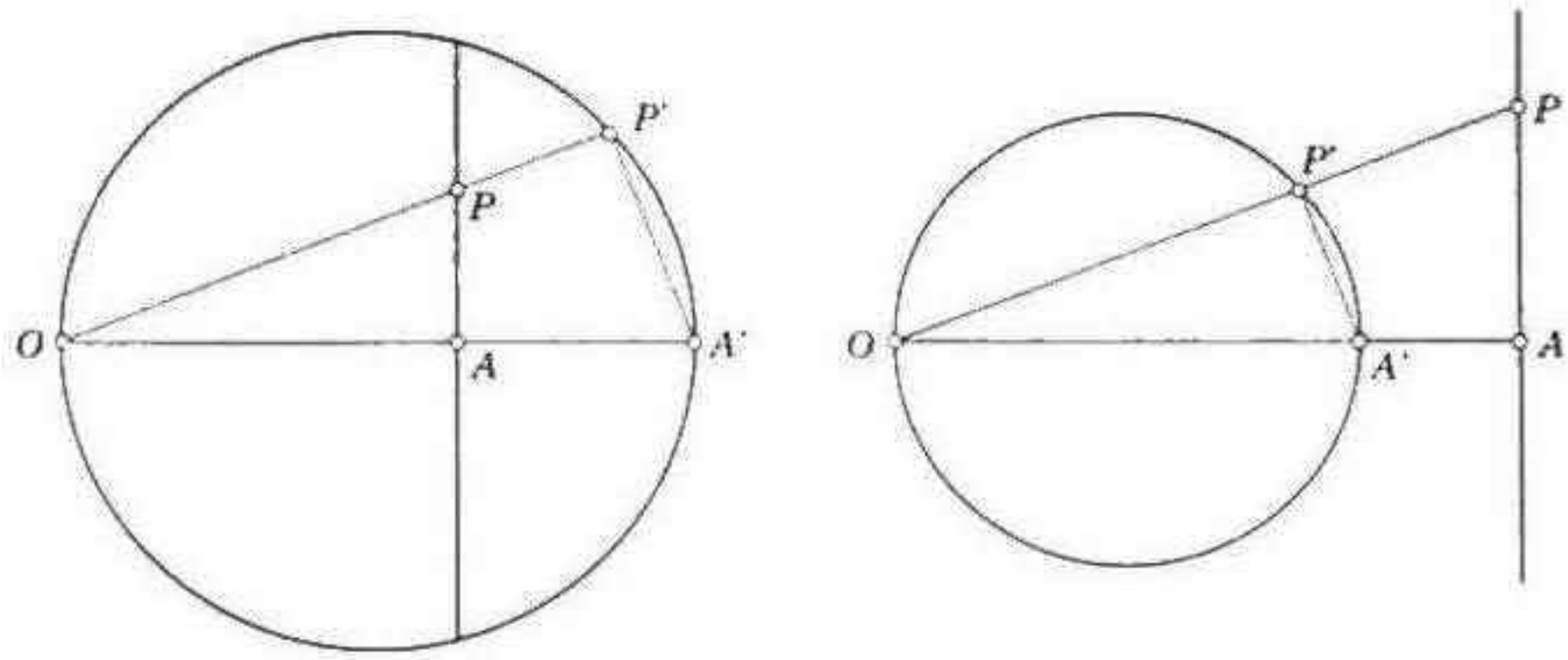


Figura 6.3a

a una recta que no pase por O. Sean A' el inverso de A y P' el inverso de otro punto cualquiera de la recta. (Véase la figura 6.3*a*, donde, con el fin de simplificar, no se ha dibujado el círculo de inversión.) Como

$$OP \times OP' = k^2 = OA \times OA',$$

los triángulos OAP, $OP'A'$ son semejantes y la recta AP se invierte en la circunferencia cuyo diámetro es OA', que es el lugar geométrico de los puntos P' desde los que OA' subtiende ángulos rectos. Así, una recta cualquiera que no pase por O se invierte en una circunferencia que pasa por O, y viceversa.

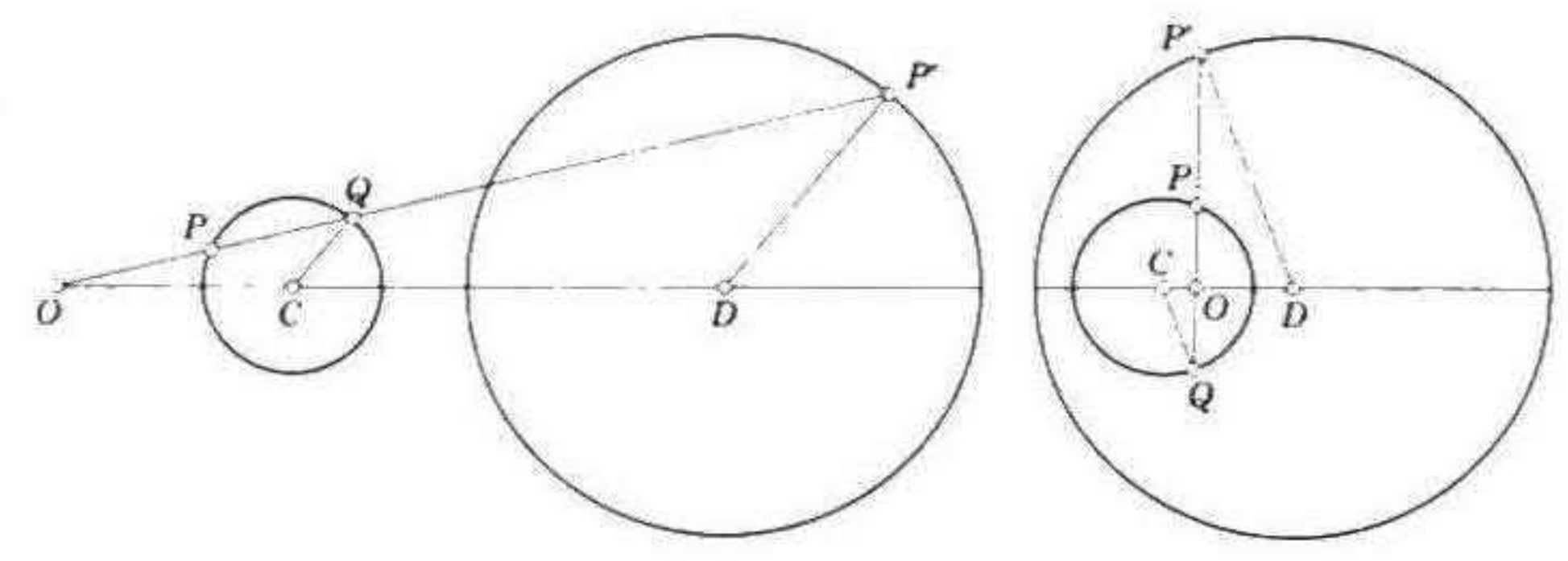


Figura 6.3b

Finalmente, ¿qué sucederá con un círculo que no pase por O? Sea P un punto cualquiera de su circunferencia, donde el centro es C y sea Q nuevamente el punto donde OP corta a la circunferencia. Por Euclides III.35 nuevamente, el producto

$$p = OP \times OQ$$

es independiente de la posición de P en la circunferencia. De acuerdo con Jacob Steiner (1796–1863), llamaremos a este producto *potencia* de O con respecto al círculo. Es positiva cuando O está afuera del círculo, cero cuando está en la circunferencia, y se le considera naturalmente negativa cuando O está dentro (de manera que OP y OQ se miden en direcciones opuestas). Sea la dilatación $O(k^2/p)$ que transforme al círculo dado y su radio CQ en otro círculo (o tal vez el mismo círculo) y su radio paralelo DP' (figura 6.3*b*, cf. figura 5.2*a*), de manera que

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OD}{OC} = \frac{k^2}{p}.$$

Como $OP \times OQ = p$, tenemos, al multiplicar,

$$OP \times OP' = k^2.$$

Así, P' es el inverso de P, y el círculo cuyo centro es D es el inverso que buscábamos del círculo de centro C. (El punto D suele no ser el inverso de C.)

Así, hemos demostrado que el inverso de un círculo que no pasa por O es otro círculo de la misma clase o tal vez el mismo círculo dado. La última posibilidad se presenta solamente en dos casos: (1) cuando el círculo dado es ortogonal al círculo de inversión, de manera que $p = k^2$ y la dilatación es la identidad; (2) cuando el círculo que se da es el mismo círculo de inversión, de manera que $p = -k^2$ y la dilatación es un semigiro.

Cuando p es positivo (véase la mitad izquierda de la figura 6.3*b*), de manera que O queda fuera del círculo cuyo centro es C, este círculo será ortogonal al círculo cuyo centro es O y cuyo radio es $\sqrt{p}$; es decir, el segundo círculo permanece invariante bajo la inversión con respecto al primero. En efecto, hemos expresado la inversión dada como producto de la nueva inversión, que lleva P a Q y la dilatación $O(k^2/p)$, que lleva Q a P'. Cuando p es negativa (como se tiene en la mitad derecha de la figura 6.3*b*), P y Q se intercambian por una "anti-inversión:" el producto de una inversión cuyo radio es $\sqrt{-p}$ y un semigiro [Forder 3, pág. 20].

Cuando estudiamos las isometrías y las demás semejanzas, señalamos las diferencias entre las transformaciones *directas* y las *opuestas* al observar sus efectos en un triángulo. Como al examinar este aspecto solamente nos preocupa el *sentido*, podríamos haber reemplazado el triángulo por su circunferencia circunscrita. Podemos continuar señalando la distinción en las inversiones (y sus productos), que transforman círculos en círculos. En lugar de un triángulo, nos serviremos de un círculo: no uno cualquiera, sino "pequeño", cuyo inverso será también "pequeño", es decir, un círculo dentro del cual no esté O. Volvamos a referirnos a la figura 6.3*b*, mitad izquierda, para observar que P y Q describen en sentidos opuestos la circunferencia del círculo de centro C, mientras Q y P' describen dos circunferencias en el mismo sentido. De esta manera, tenemos que los puntos inversos entre sí, P y P' proceden en sentidos opuestos, y

La inversión es una transformación opuesta.

Por lo tanto, tendremos que el producto de un número par de inversiones

será directo. Tenemos un caso familiar: el producto de las inversiones con respecto a dos círculos concéntricos es una dilatación.

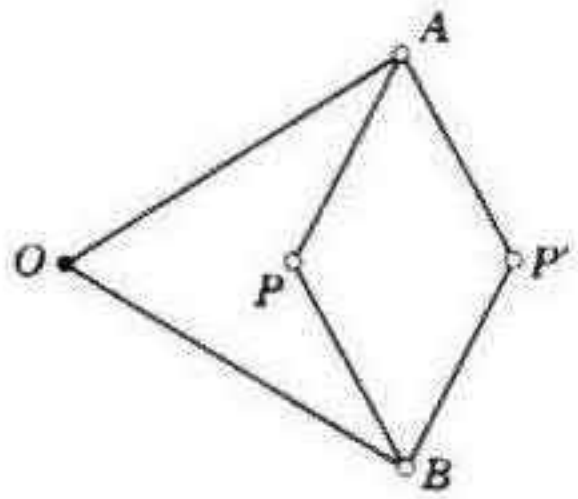


Figura 6.3c

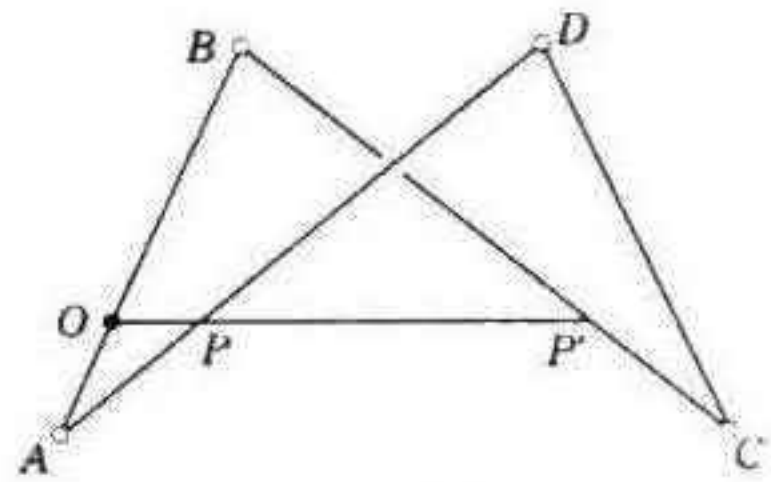


Figura 6.3d

EJERCICIOS

1. Con cualesquiera dos círculos desiguales que no se corten, se tiene que uno de los dos centros de similitud (§5.2) es el centro de un círculo que invierte a cualquiera de los círculos originales en el otro. Para dos círculos intersecantes desiguales, ambos centros de similitud tienen esta propiedad. ¿Qué sucede en el caso de círculos intersecantes iguales?

2. Explíquese el modo de acción de la *celda de Peaucellier* (figura 6.3*c*), el instrumento que inventó A. Peaucellier en 1864 con el propósito de trazar el inverso de cualquier lugar geométrico dado. Se compone por cuatro varillas iguales, todas ellas sujetas con bisagras en los vértices de un rombo $APBP'$, y dos varillas (más largas) iguales entre sí que conectan dos vértices opuestos, A y B con un punto de apoyo fijo O. Cuando se inserta una puntilla de lapicero en P' y una punta de trazado en P (o viceversa), y se lleva la segunda sobre las curvas de una figura, la primera traza la figura inversa. En particular, si se introdujeran una séptima varilla y otro punto de apoyo, de manera que P se mantenga sobre una circunferencia que pasa por O, el lugar geométrico de P' será una recta. Este eslabonamiento constituye una solución exacta al problema de convertir un movimiento circular en otro rectilíneo. [Lamb 2, pág. 314.]

3. Explíquese el funcionamiento de los *eslabones de Hart* (figura 6.3*d*), el instrumento que inventó H. Hart en 1874 con el mismo propósito que el de la celda de Peaucellier. Solamente intervienen cuatro varillas, con bisagras en los vértices de un "paralelogramo cruzado" $ABCD$ (donde $AB = CD$, $BC = DA$). Los tres puntos colineales O, P, P' en las varillas correspondientes AB, AD, BC se conservan colineales cuando la forma del paralelogramo cruzado se altera (es decir, permanecen en una recta paralela a AC y a BD). Como anteriormente, el instrumento se apoya en el punto fijo O. [Lamb 2, pág. 315.]

4. Sea p la potencia de un punto exterior O con respecto al círculo de radio r. Entonces, el círculo con centro en O y radio k invierte a Υ en un círculo de radio k^2r/p.

6.4 EL PLANO INVERSIVO

Visto lo cual dijo el Plomero con voz de fastidio: "Sugiero que nos dirijamos de inmediato al infinito."

J. L. Synge [2, pág. 131]

Hemos visto que la imagen de un punto dado P por reflexión en una recta (figura 1.3*b*) es la segunda intersección de dos circunferencias cualquiera que pasan por P y son ortogonales al espejo, y que el inverso de P en un círculo es la segunda intersección de dos circunferencias cualquiera que pasan por P

y son ortogonales al círculo de inversión. Debido a esta analogía, se dice a veces que la inversión es una "reflexión en un círculo" [Blaschke 1, pág. 47], y extendemos la definición de círculo de modo que podamos incluir su circunferencia como una línea recta en un caso especial (o "límite"): un círculo de radio infinito. Podemos decir entonces que tres puntos *cualesquiera* se encuentran en una circunferencia única y que un círculo cualquiera se invierte en un círculo.

Al proseguir con el mismo espíritu, extendamos el plano euclidiano mediante la invención de un *punto en el infinito* "ideal" O', que es simultáneamente punto común y el centro común de todas las rectas, cuando las consideramos como circunferencias de radio infinito. Dos círculos que tienen un punto común o bien se tocan o bien se vuelven a cortar. Esto conserva su obviedad cuando una de ellas se reduce a una recta. Cuando ambas son rectas, o bien son paralelas, y en ese caso se tocan en O', o bien se intersectan, y en ese caso O' es el segundo punto de intersección [Hilbert y Cohn-Vossen 1, pág. 251].

Podemos afirmar ahora que *todo* punto tiene un inverso. Todas las rectas que pasan por O, como son "circunferencias" de círculos ortogonales al círculo de inversión, se vuelven a cortar en O', el inverso de O. Cuando se tiene que el centro O es el mismo O', la "circunferencia" del círculo de inversión es una recta y la inversión se reduce a una reflexión.

Cuando se añade al plano euclidiano O', se llama *plano inversivo* (o "conforme").* En este plano se basa la inversión para alcanzar un *status* pleno como "transformación" (§2.3): una correspondencia uno-a-uno sin excepción.

En el punto en el que dos curvas se cortan, se define con naturalidad su ángulo de intersección como el ángulo que forman sus tangentes. Al trasladar el espíritu de esta definición, tendremos que dos circunferencias que se intersectan forman ángulos iguales en sus dos puntos de intersección, debido a que son simétricas por reflexión en su recta de centros. Por medio de esta consideración, podremos demostrar que

6.41 *Todo ángulo se invierte en un ángulo igual (o, más estrictamente, en un ángulo opuesto).*

Empezaremos por considerar un ángulo en un punto P que no está en la circunferencia del círculo de inversión. Como se puede describir como la dirección de un círculo apropiado que pasa por P y por su inverso P' cualquier dirección en ese punto, se tiene que dos de las direcciones mencionadas quedan determinadas por dos de esos círculos. Como los círculos se invierten sobre ellos mismos, sirven para determinar las direcciones correspondientes en P'. Para demostrar que el ángulo en P se preserva cuando P es su propio inverso, nos valdremos de 6.11 para expresar la inversión dada como producto de una dilatación y la inversión en un círculo concéntrico tal que no pasa por P. Debido a que ambas transformaciones preservan los ángulos, su producto se comporta de la misma manera.

En particular, tenemos que los ángulos rectos se invierten en ángulos rectos, y que

* M. Bôcher, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20 (1914), pág. 194

6.42 *Los círculos ortogonales se invierten en círculos ortogonales (donde incluimos también las rectas como sus casos especiales).*

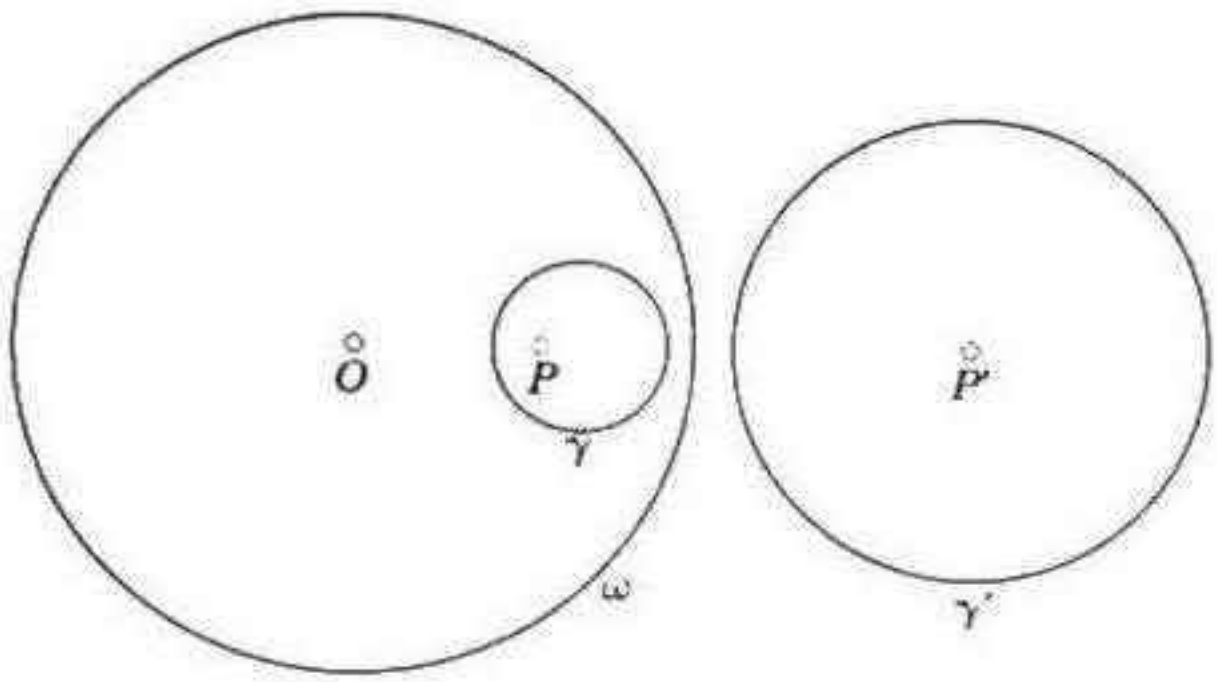


Figura 6.4a

Si se emplea 6.21, la inversión puede definirse en términos de ortogonalidad. Por lo tanto, un círculo y un par de puntos inversos se invierten (en otro círculo) en un círculo y un par de puntos inversos. Con más precisión, si se tiene que un círculo γ invierte a P en Q y que un círculo ω invierte a γ, P, Q en γ', P', Q', entonces el círculo γ' invierte a P' en Q'. Se presenta un caso especial de importancia (figura 6.4*a*) cuando Q coincide con O, el centro de ω, de modo que Q' es O', es decir, el punto en el infinito. Entonces, P es el inverso de O en γ, y P' es el centro de γ'. Dicho de otra manera, si γ invierte a O en P, mientras ω invierte a γ y P en γ' y P', entonces P' es el centro de γ'.

Dos circunferencias o bien se tocan, o bien se cortan una a otra en dos puntos, o bien carecen de un punto común. En el último caso (en el que uno de los círculos queda fuera del otro o, de no ser así, uno encierra al otro), podemos decir de manera conveniente que los círculos *no se encuentran*.

Si se tiene que dos círculos, α_1 y α_2, son ambos ortogonales a otros dos círculos β_1 y β_2, podemos efectuar la inversión de los cuatro círculos en un círculo cuyo centro sea uno de los puntos de intersección de α_1 y β_1, de manera que obtengamos dos círculos ortogonales y dos diámetros perpendiculares entre sí, como se hacía notar al final de § 6.2. Por lo tanto, se tendrá que, o bien α_1 toca a α_2 y β_1 toca a β_2, o bien α_1 corta a α_2 y β_1 no encuentra a β_2, o bien α_1 no encuentra a α_2 y β_1 corta a β_2.

6.5 CIRCULOS COAXIALES

En esta sección, nos apartaremos del plano inversivo para regresar al euclidiano, con la finalidad de hablar de distancias.

Si tenemos que P y P' son puntos inversos en la circunferencia de ω (con centro en O), como en la figura 6.5*a*, todas las rectas que pasan por P' se invierten en todas las circunferencias que pasan por O y P: un *haz*

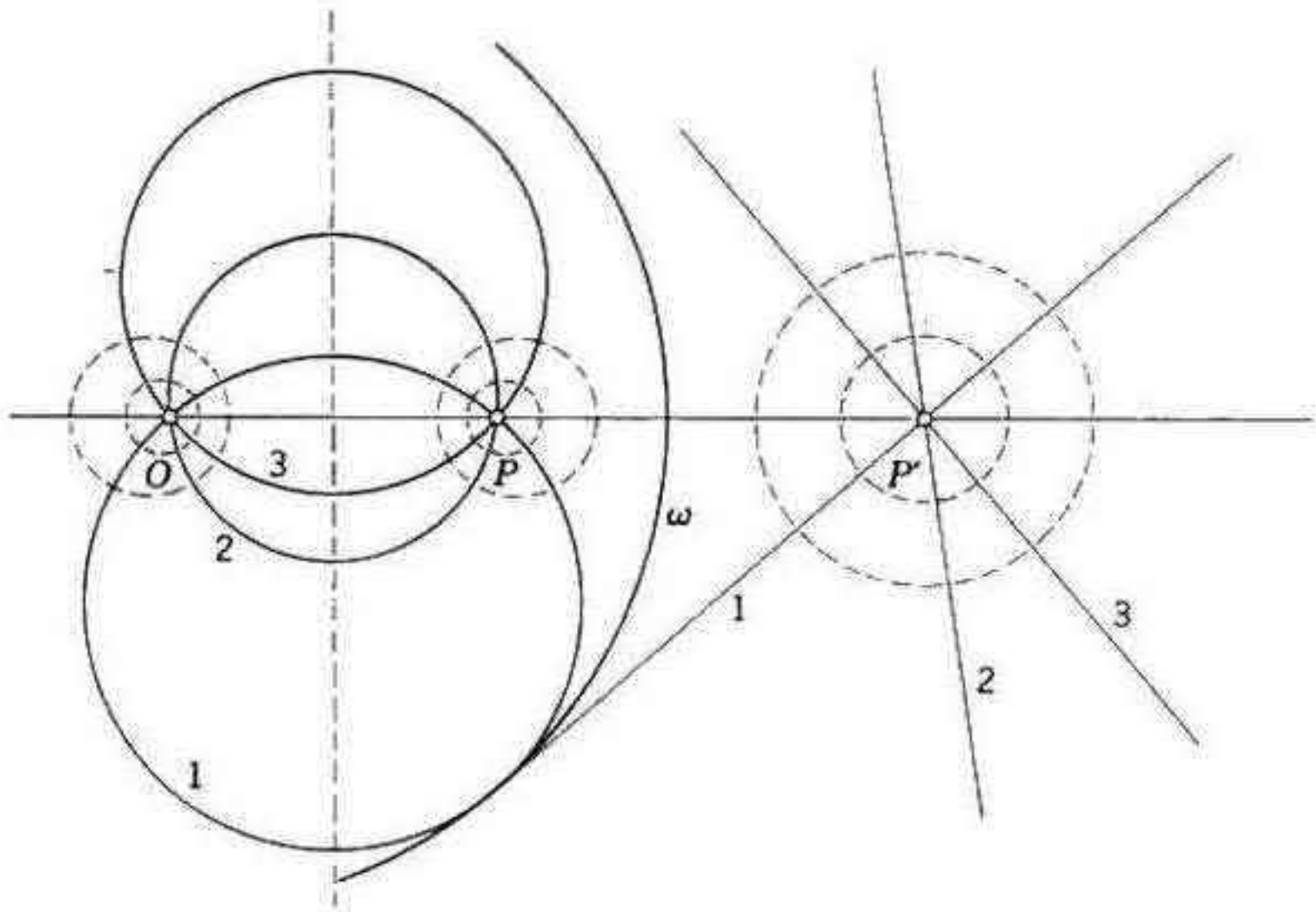


Figura 6.5a

intersecante (o "elíptico") *de círculos coaxiales*, en el que se incluye la recta OPP' como el caso degenerado. El sistema de círculos concéntricos de centro P', que consiste en los círculos ortogonales a estas rectas, se invierte en un *haz no intersecante* (o "hiperbólico") *de círculos coaxiales* (que se ha trazado con líneas punteadas). Cada uno de estos círculos no encuentra a ningún otro, y son todos ortogonales con respecto al haz intersecante. Uno de ellos degenera en una recta (vertical), cuya inversa es la circunferencia (con centro en P') que pasa por O.

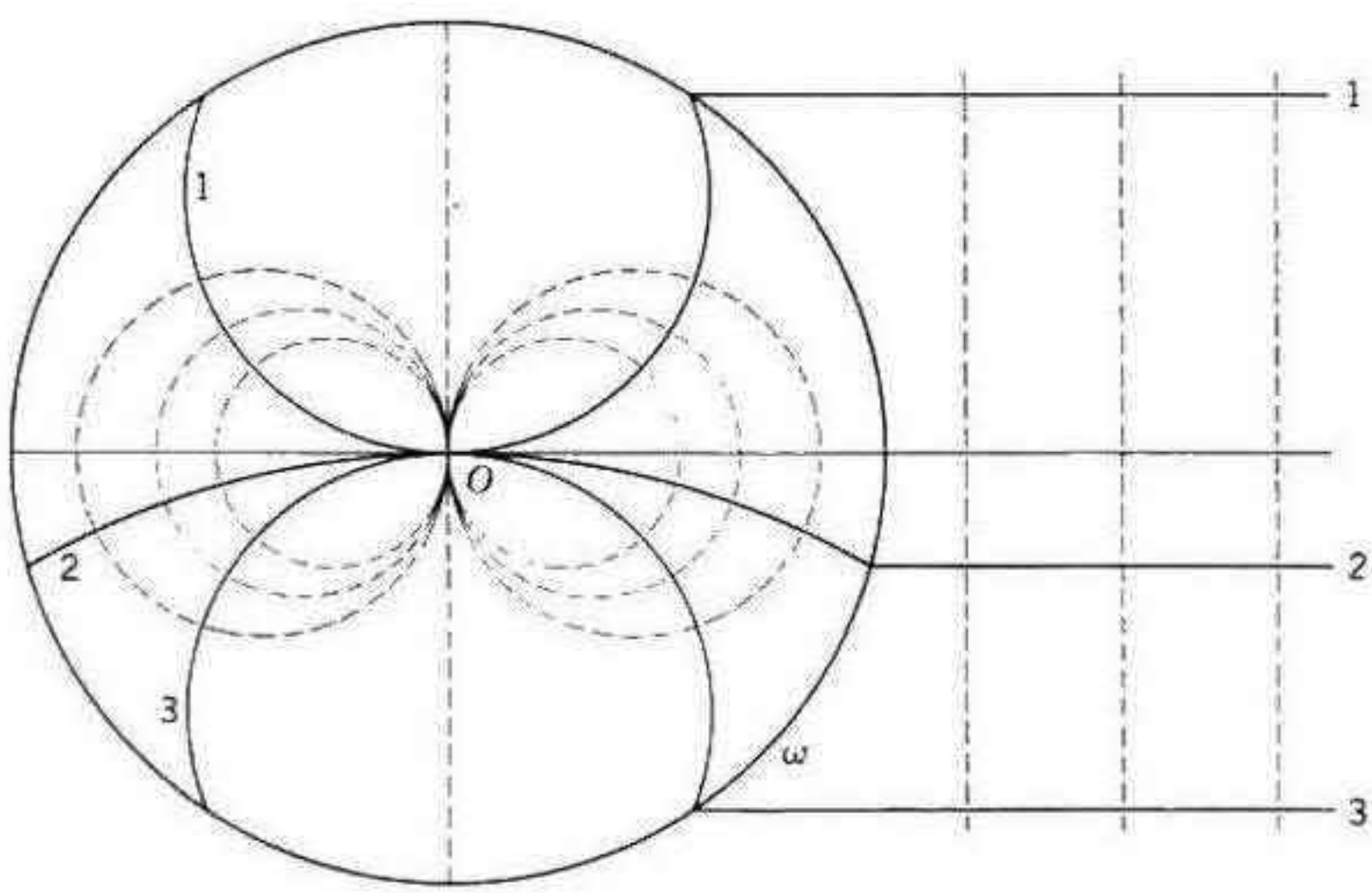


Figura 6.5b

Se presenta una especie de caso límite cuando O y P coinciden (figura 6.5*b*): los círculos que tocan una recta fija en un punto fijo O constituyen un *haz tangente* (o "parabólico") *de círculos intersecantes*. Se invierten (en un círculo cuyo centro es O) en todas las rectas paralelas a la recta fija. Tenemos un sistema de la misma especie que es ortogonal a estas rectas y se invierte en un haz tangente y ortogonal de círculos coaxiales. Y nuevamente se tiene que cada miembro de cualquiera de los haces es ortogonal a todo miembro del otro.

Dos círculos cualquiera pertenecen a un haz de círculos coaxiales de una de las tres clases que hemos descrito, y el haz estará constituido por *todos los círculos ortogonales a dos círculos cualquiera que sean a su vez ortogonales a los dos círculos dados*. (Dicho de una manera más concisa, los círculos coaxiales consisten en todos los círculos ortogonales a los círculos dados.) Dos círculos que se cortan pertenecen a un haz intersecante (y se pueden invertir en rectas intersecantes); dos círculos que se tocan pertenecen a un haz tangente (y se pueden invertir en rectas paralelas); dos círculos que no se encuentran pertenecen a un haz no intersecante (por lo dicho al final de § 6.4).

Cada haz contiene una recta (una circunferencia de radio infinito) que se llama *eje radical* (del haz entero o de dos miembros cualquiera).* En el caso del haz intersecante, se trata de la recta que une los dos puntos comunes a todas las circunferencias (OP en el caso de las circunferencias "continuas" de la figura 6.5*a*). En el caso del haz tangente, es la tangente común. Cuando el haz es no intersecante, se trata de la recta que está a mitad de camino entre los dos *puntos límite* (o círculos de radio de cero) que son los puntos comunes del haz intersecante ortogonal. Cada haz tiene su *recta de centros* correspondiente, que es el eje radical del haz ortogonal. Por lo tanto,

6.51 *Si se pueden trazar tangentes a los círculos de un haz coaxial desde un punto del eje radical, todas las tangentes tendrán la misma longitud.*

El eje radical de dos círculos dados puede definirse como el lugar geométrico de los puntos de potencias iguales (§ 6.3) con respecto a ambos círculos. Se puede medir esta potencia como el cuadrado sobre la tangente, con la excepción del caso en el que los dos círculos se intersectan en dos puntos O, P, y el punto considerado, A, se encuentra en el segmento OP; en ese caso, la potencia es el número negativo $AO \times AP$.

En consecuencia, si tenemos tres círculos tales que sus centros formen un triángulo, los tres ejes radicales (de los círculos tomados por parejas) concurren a un punto que se llama *centro radical* y que tiene la misma potencia con respecto a los tres círculos. Cuando la potencia es positiva, su raíz cuadrada es la longitud de las tangentes a uno cualquiera de los círculos, y el centro radical es centro de un círculo (de este radio) que es ortogonal a todos los círculos dados. Pero cuando la potencia es negativa, no existe tal círculo.

La posibilidad de invertir dos círculos cualquiera no intersecantes en círculos concéntricos (al tomar O en uno de los puntos límite) constituye la esencia de una demostración notablemente sencilla del porisma de

* Louis Gaultier, *Journal de l'École Polytechnique*, 16 (1813), pág. 147.

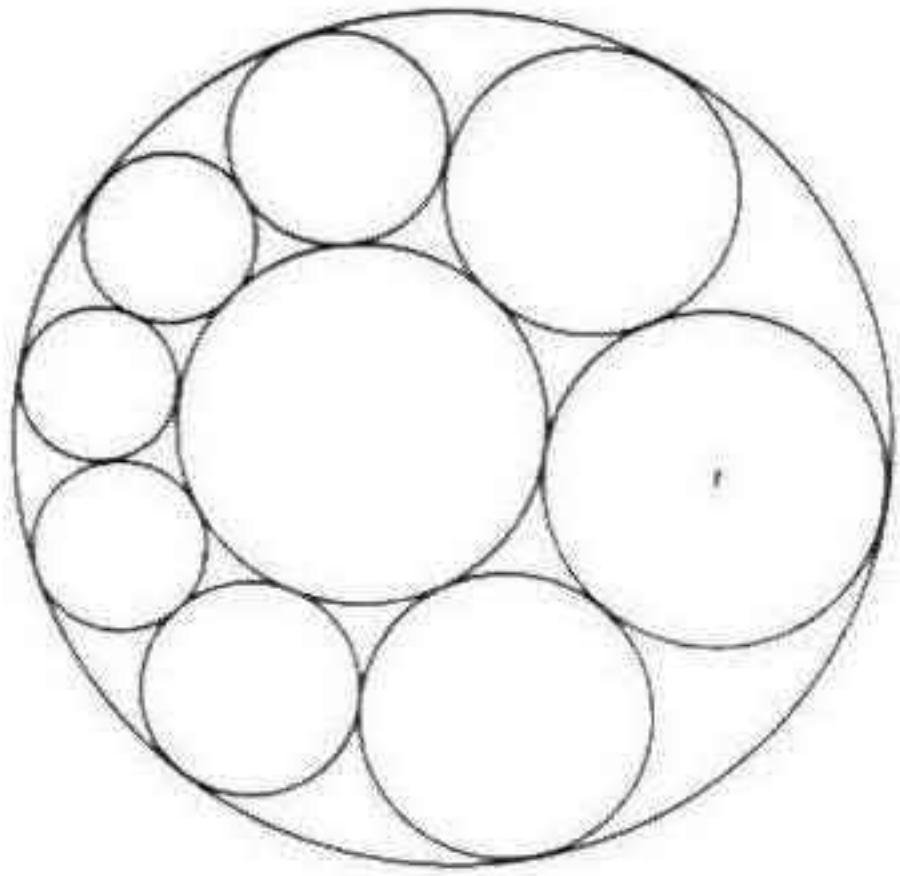


Figura 6.5c

Steiner:* si tenemos dos círculos (no concéntricos) tales que uno esté dentro de otro, y se trazan circunferencias tales que toquen a ambos y se toquen entre sí, como en la figura 6.5*c*, puede suceder que el anillo de círculos se cierre, es decir, que el último toque al primero. La afirmación que hace Steiner consiste en que si esto sucede una vez cualquiera, sucederá siempre, al margen de la posición que demos al primer círculo del anillo. Para demostrarlo, solamente necesitamos invertir los dos círculos originales en círculos concéntricos, para los cuales la afirmación resulta obvia.

EJERCICIOS

1. En un haz de círculos coaxiales, cada miembro, si se le usa como círculo de inversión, intercambia a los miembros restantes por parejas, e invierte a cada miembro del haz ortogonal en sí mismo.
2. Los dos puntos límite de un haz no intersecante son cada uno el inverso del otro en cualquier miembro del haz.
3. Si dos círculos tienen dos o cuatro tangentes comunes, el eje radical que les corresponde une los puntos medios de las tangentes comunes. ¿Cómo se puede construir el eje radical de dos círculos que no tienen tangente común (es decir, tales que uno rodea por completo al otro)?
4. Cuando un haz no intersecante de círculos coaxiales se invierte en un haz de círculos concéntricos, ¿qué pasa con los puntos límite?
5. En el porisma de Steiner, los puntos de contacto de los círculos sucesivos del anillo quedan todos sobre una circunferencia, y su círculo se empleará para invertir los dos círculos originales mutuamente. ¿Están en una circunferencia los *centros* de los círculos del anillo?
6. Con respecto al triángulo del ejercicio 10 de § 1.5 (página 39), el círculo inscrito es coaxial en relación con los "otros dos círculos" (los círculos de Soddy).

* Forder [3, pág. 23]. Véase también Coxeter, Interlocked rings of spheres, *Scripta Mathematica* 18 (1952), págs. 113-121, o Yaglom [2, pág. 199].

6.6 EL CIRCULO DE APOLONIO

La analogía entre la reflexión y la inversión resalta en el siguiente

PROBLEMA. *Encontrar el lugar geométrico de un punto P tal que sus distancias a dos puntos fijos, A, A', tienen una razón constante de $1:\mu$, de manera que*

$$A'P = \mu AP.$$

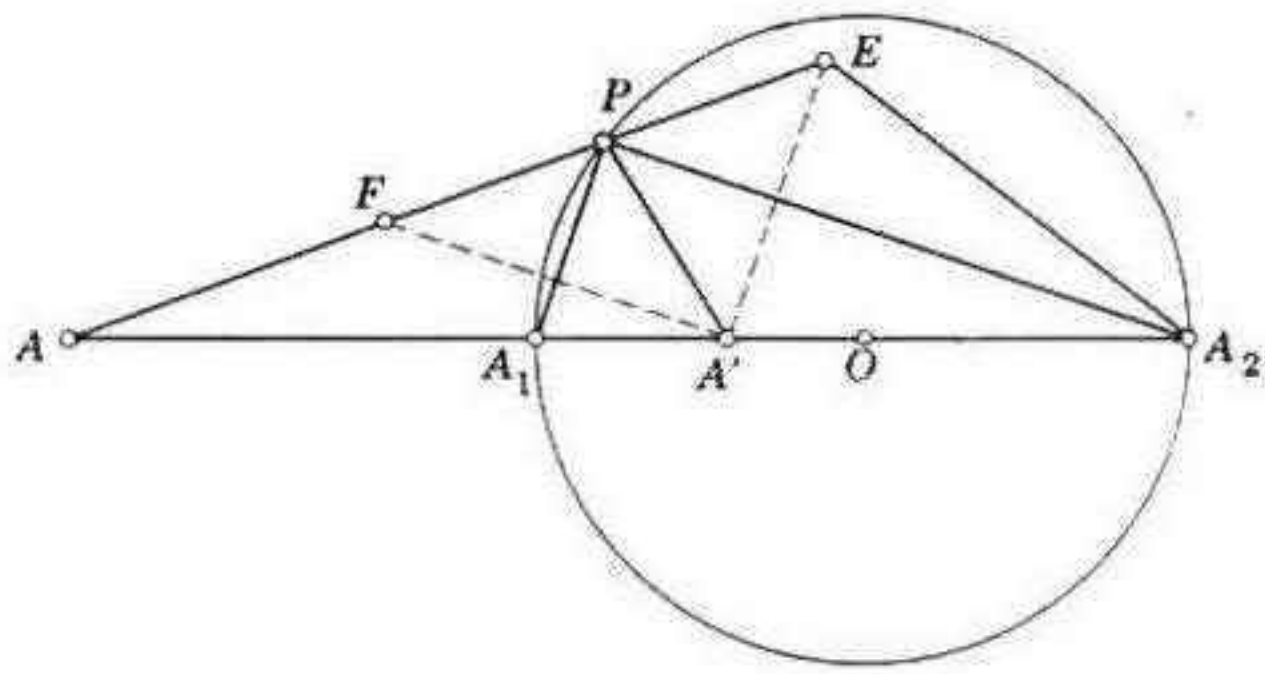


Figura 6.6a

Cuando $\mu = 1$, es evidente que el lugar geométrico consiste en la mediatriz de AA', es decir, la recta que refleja A en A'. Veremos que cuando μ toma otros valores, es un círculo que invierte A en A'. (Apolonio de Perga, hacia 260–190 a. J. C.)

Supongamos que $\mu \neq 1$, y sea P un punto cualquiera en el que se cumple la igualdad $A'P = \mu AP$. Sean A_1 y A_2 los puntos de intersección de las bisectrices interna y externa de $\angle APA'$ con AA' (como se tiene en la figura 6.6*a*, donde $\mu = \frac{1}{2}$). Tómense E y F en AP de manera que $A'E$ sea paralela a A_1P y $A'F$ sea paralela a A_2P, es decir, perpendicular a A_1P. Como $FP = PA' = PE$, tenemos que

$$\frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{AP}{PE} = \frac{AP}{PA'}, \qquad \frac{AA_2}{A'A_2} = \frac{AP}{FP} = \frac{AP}{PA'}.$$

(Este último resultado es Euclides VI.3.) De esta manera, A_1 y A_2 dividen al segmento AA' interna y externamente en la razón de $1:\mu$, y su ubicación es independiente de la posición de P. Como $\angle A_1PA_2$ es un ángulo recto, P está en la circunferencia cuyo diámetro es A_1A_2.

Y, al revés, si definimos a A_1 y A_2 por su propiedad de dividir AA' en la razón de $1:\mu$, y P es un punto cualquiera de la circunferencia cuyo diámetro es A_1A_2, tenemos que

$$\frac{AP}{PE} = \frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{1}{\mu} = \frac{AA_2}{A'A_2} = \frac{AP}{FP}.$$

De esta manera, $FP = PE$, y como P es el punto medio de FE, es también el circuncentro del triángulo rectángulo EFA'. Por lo tanto, $PA' = PE$, y

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{AP}{PE} = \frac{1}{\mu}$$

[Court 2, pág. 15].

Por último, el círculo de Apolonio A_1A_2P invierte A en A'. Pues, si O es su centro y k su radio, las distancias $a = AO$ y $a' = A'O$ cumplen las igualdades

$$\frac{a-k}{k-a'} = \frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{AA_2}{A'A_2} = \frac{a+k}{a'+k},$$

de donde

$$aa' = k^2.$$

EJERCICIOS

1. Cuando μ varía mientras A y A' permanecen fijos, los círculos de Apolonio forman un haz no intersecante cuyos puntos límite son A y A'.

2. A partir de una recta l y dos puntos A, A' (que no estén en l), ubíquense los puntos P de l para los que la razón $A'P/AP$ es máxima o mínima. (*Indicación*: Considérese el círculo cuya circunferencia pasa por A, A' y cuyo centro está en l. El problema se debe a N. S. Mendelsohn y la indicación a Richard Blum.)

3. Exprésese k/AA' en términos de μ.

4. Si nos expresamos con la notación de la figura 5.6*a* (que está incluida en la figura 6.6*b*), los círculos cuyos diámetros son A_1A_2 y B_1B_2 se cortan en dos puntos O

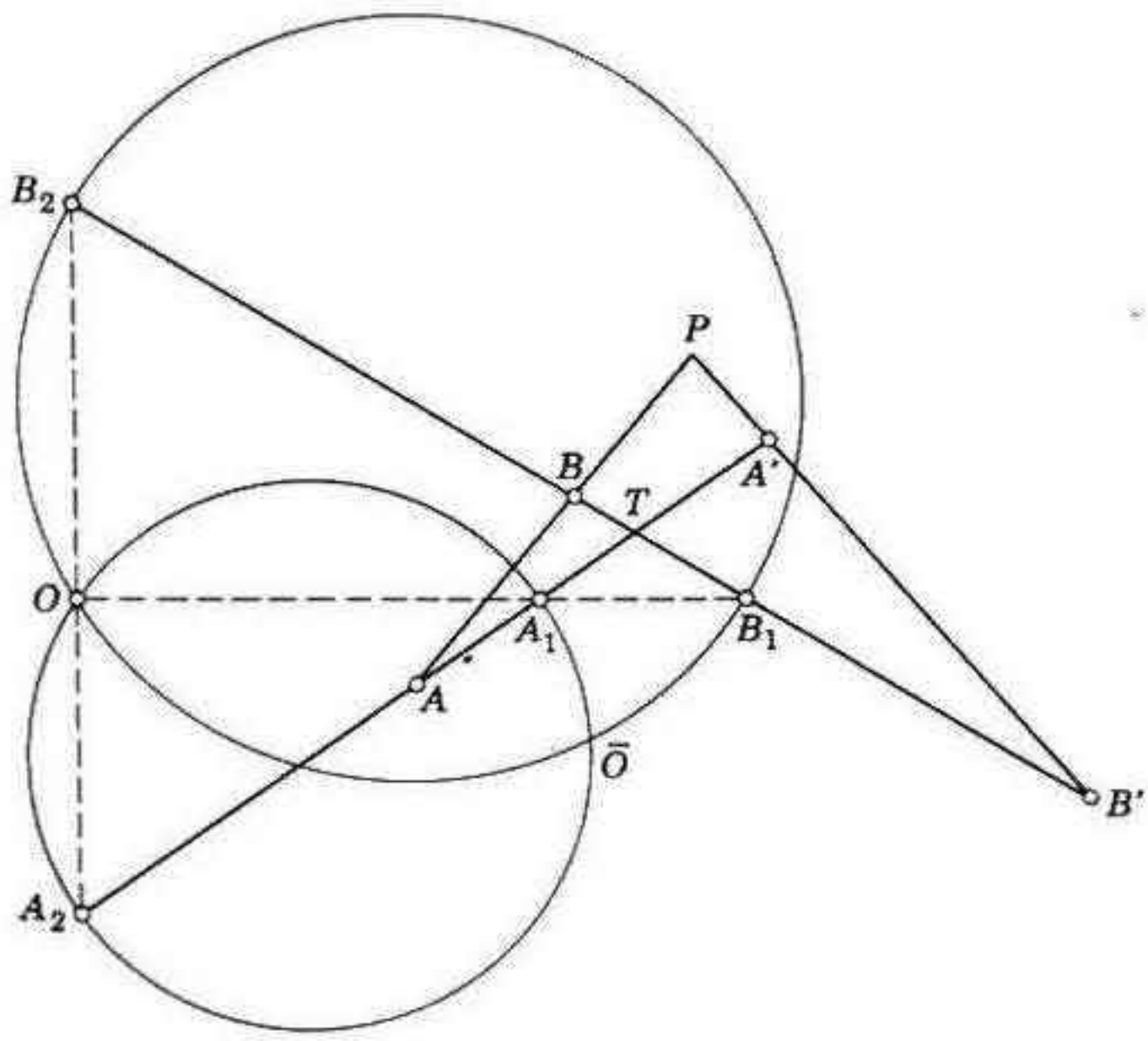


Figura 6.6b

y $\bar{O}$ tales que los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes, y lo mismo sucede con los triángulos $\bar{O}AB$ y $\bar{O}A'B'$. De las dos semejanzas

$$OAB \to OA'B' \quad \text{y} \quad \bar{O}AB \to \bar{O}A'B',$$

una es opuesta y la otra es directa. De hecho, O es el punto de intersección de A_1B_1 con A_2B_2, y $\bar{O}$ queda en los cuatro círculos $AA'P$, $BB'P$, ABT, $A'B'T$ (cf. ejercicio 2 de § 5.5). [Casey 1, pág. 185.] Cuando A' coincide con B, O está en AB'.

5. Definamos la *distancia inversiva* entre dos círculos no intersecantes como el logaritmo natural de la razón de los radios (del mayor al menor) de dos círculos concéntricos en los que se pueden invertir los círculos dados. Entonces, si un haz no intersecante de círculos coaxiales incluye a α_1, α_2, α_3 (en este orden), las tres distancias inversivas satisfacen la igualdad

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_3).$$

6. Dos círculos dados que sean desiguales se relacionan por medio de una infinidad de rotaciones dilatativas y una infinidad de reflexiones dilatativas. El lugar geométrico de los puntos invariantes (en cualquiera de los dos casos) es el círculo cuyo diámetro es el segmento que une los dos centros de similitud de los círculos dados. (Este lugar geométrico se conoce como *círculo de similitud* con respecto a los otros.) ¿Qué resultado corresponde al mismo problema cuando los círculos que se dan son *iguales*?

7. Al invertir en dos círculos determinados un punto de la circunferencia del círculo de similitud, los inversos que resultan son imagen cada uno del otro por medio de una reflexión en el eje radical de ambos círculos [Court 2, pág. 199].

6.7 TRANSFORMACIONES QUE PRESERVAN EL CIRCULO

Hemos observado que la inversión es una transformación de todo el plano inversivo (que incluye al punto en el infinito) en sí mismo, que lleva círculos a círculos; nos preguntamos ahora, naturalmente, cuál es la transformación de esta clase más general. Distinguimos dos casos, según sea invariante el punto en el infinito o no lo sea.

En el primer caso, los círculos no solamente se transforman en círculos: también las rectas se transforman en rectas. Si acudimos a Euclides III.21 (véase pág. 30), deduciremos que la igualdad de ángulos se preserva, y, en consecuencia, se preserva también la medida de ángulos, de manera que todos los triángulos se transforman en triángulos semejantes, y la transformación es una semejanza (§ 5.4).

Si, por otra parte, la transformación T lleva un punto ordinario O al punto en el infinito O', habremos de considerar el producto J_1T, donde J_1 es la inversión en el círculo unitario cuyo centro es O. Este producto J_1T, debido a que conserva invariante a O', es una semejanza. Sea su razón de amplificación k^2 y sea J_k la inversión en el círculo cuyo centro es O y cuyo radio es k. Puesto que, por 6.11, J_1J_k es la dilatación $O(k^2)$, se puede expresar la semejanza J_1T como J_1J_kS, donde S es una isometría. Así

$$T = J_kS,$$

que es el producto de una inversión y una isometría.

Podemos resumir diciendo

6.71 *Toda transformación que preserve el círculo es, en el plano*

inversivo, o bien una semejanza, o bien el producto de una inversión y una isometría.

Por consiguiente, toda transformación que preserve el círculo ha de ser el producto de no más de cuatro inversiones (siempre y cuando consideremos que una reflexión es una clase especial de inversión) [Ford 1, pág. 26]. Una transformación así se llama *homografía* o *antihomografía* según sea par o impar el número de inversiones. El producto de dos inversiones (donde cualquiera de las dos podría ser una reflexión) se llama homografía *rotaria* o *parabólica*, o *dilatativa*, según sean los dos círculos de inversión intersecantes, tangentes o no intersecantes (es decir, según sea el haz ortogonal de círculos invariantes no intersecante, tangente o intersecante). Como casos especiales, tenemos respectivamente la rotación, la traslación y la dilatación. La clase más importante de homografía rotacional es la *involución de Möbius*, que es la contrapartida inversiva del semigiro y, por lo tanto, consiste en el producto de las inversiones en dos círculos ortogonales (por ejemplo, el producto de la inversión en un círculo y la reflexión en un diámetro). Un producto cualquiera de cuatro inversiones que no se puede reducir al producto de dos se llama homografía *loxodrómica* [Ford 1, pág. 20].

EJERCICIO

Al expresar una transformación dada que preserva el círculo como JS (donde J es una inversión y S una isometría), J y S son únicos. Tenemos también una expresión igualmente válida, SJ′, en la que la isometría precede a la inversión. ¿Por qué interviene la misma S en el producto revisado? ¿Bajo qué condiciones tendremos que $J' = J$?

6.8 LA INVERSION EN UNA ESFERA

Si hacemos girar las figuras 6.1*a*, 6.2*a*, 6.3*a*, 6.3*b* y 6.4*a* alrededor de la recta de los centros (OP, OA u OC), veremos que toda la teoría de la inversión se extiende con facilidad de los círculos del plano a las esferas del espacio. A partir de una esfera cuyo centro es O y cuyo radio es k, definimos el inverso de un punto cualquiera P (que no sea O) como el punto P' del rayo OP cuya distancia a O cumple la igualdad

$$OP \times OP' = k^2.$$

Por otra parte, P' es el segundo punto de intersección de tres esferas que pasan por P y son ortogonales a la esfera de inversión. Toda esfera invertida es una esfera, siempre y cuando incluyamos como esfera de radio infinito el plano, que es el inverso de la esfera que pasa por O. Así, la inversión es una transformación del *espacio inversivo* (o "conforme"), que se deriva del espacio euclidiano mediante el postulado del *punto en el infinito*, que pertenece a todos los planos y rectas.

Al hacer girar el círculo de Apolonio (figura 6.6*a*) alrededor de la recta AA' obtenemos la *esfera de Apolonio*, que se puede describir de la manera siguiente:

6.81 *A partir de dos puntos A, A' y de un número positivo μ, sean A_1 y*

A_2 tales que dividan a AA' interna y externamente en la razón de $1:\mu$. Entonces la esfera cuyo diámetro es A_1A_2 constituye el lugar geométrico de un punto P cuyas distancias desde A y A' están en esa razón.

EJERCICIOS

1. Si una esfera con centro O invierte A en A' y B en B', los triángulos OAB y $OB'A'$ son semejantes.

2. En términos de $a = OA$ y $b = OB$, tenemos (según la notación del ejercicio 1)

$$A'B' = \frac{k^2}{ab} AB.$$

3. La "razón cruzada" de cuatro puntos cualquiera es preservada por cualquier inversión:

$$\frac{AB/BD}{AC/CD} = \frac{A'B'/B'D'}{A'C'/C'D'}.$$

[Casey 1, pág. 100.]

4. Dos esferas que se tocan en O se invierten en planos paralelos.

5. Sean α, β, γ tres esferas que se tocan unas a otras. Sea la secuencia de esferas σ_1, σ_2, . . . tales que se tocan unas a otras sucesivamente y, además, tocan todas a α, β, γ. Entonces σ_6 toca a σ_1, de manera que tenemos un anillo de seis esferas que se entrelaza con el anillo original de tres.* (*Indicación*: Inviértase en una esfera cuyo centro sea el punto de contacto de α y β.)

6.9 EL PLANO ELIPTICO

> *De una manera indescriptible, mientras* [Davidson] *iba de un lado a otro en Londres, su mirada iba de un lado a otro de manera correspondiente por aquella isla lejana. . . . Cuando yo le señalé que no se podía alterar el hecho de que ese lugar* [la isla Antípoda] *estaba a ocho mil millas de distancia, me respondió que aunque dos puntos estuvieran separados por una yarda en una hoja de papel, se les podía poner uno junto al otro al dar vuelta al papel sobre sí mismo.*
>
> H. G. Wells (1866–1946)
>
> (*The Remarkable Case of Davidson's Eyes*)

Sea S el pie de la perpendicular desde el punto N al plano σ, como en la figura 6.9*a*. Una esfera (que no se ha dibujado) de centro N y radio NS invierte el plano σ en la esfera σ' cuyo diámetro es NS [Johnson 1, pág. 108]. Hemos visto que las esferas se invierten en esferas (o planos); por lo tanto, los círculos, como son intersecciones de esferas se invierten en círculos (o en rectas). En particular, todos los círculos de σ se invierten para dar círculos (mayores o menores) de la esfera σ', y todas las rectas de σ se invierten en circunferencias que pasan por N. Cada punto P de σ tiene un punto correspondiente P' en σ', a saber, la segunda intersección de la recta NP con σ'. Y, al revés, cada punto P' de σ', con la excepción de N, corresponde a un punto P en el que NP' corta a σ. La excepción puede eliminar-

* Frederick Soddy, The Hexlet, *Nature*, **138** (1936), pág. 958; **139** (1937), pág. 77

se si hacemos de σ un plano inversivo, cuyo punto en el infinito es el inverso de N.

Esta inversión, que crea entre los puntos del plano inversivo y de los de la esfera una correspondencia uno-a-uno, se conoce como *proyección estereográfica*. Constituye una de las maneras más sencillas de trazar un mapa del globo geográfico en un plano. Como se preservan los ángulos, las islas pequeñas quedan en el mapa con su forma correcta, aunque en diferentes escalas según su latitud.

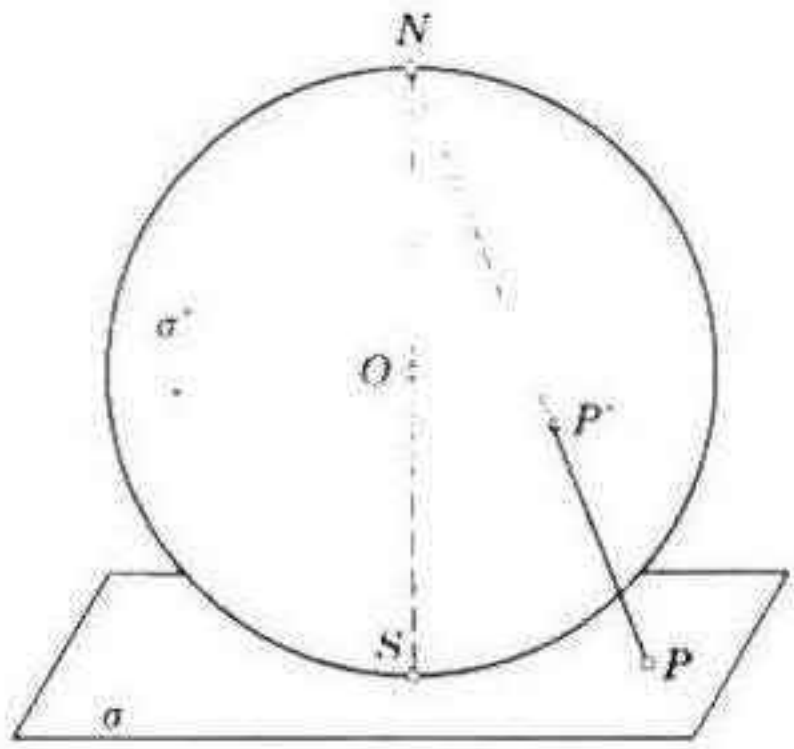


Figura 6.9a

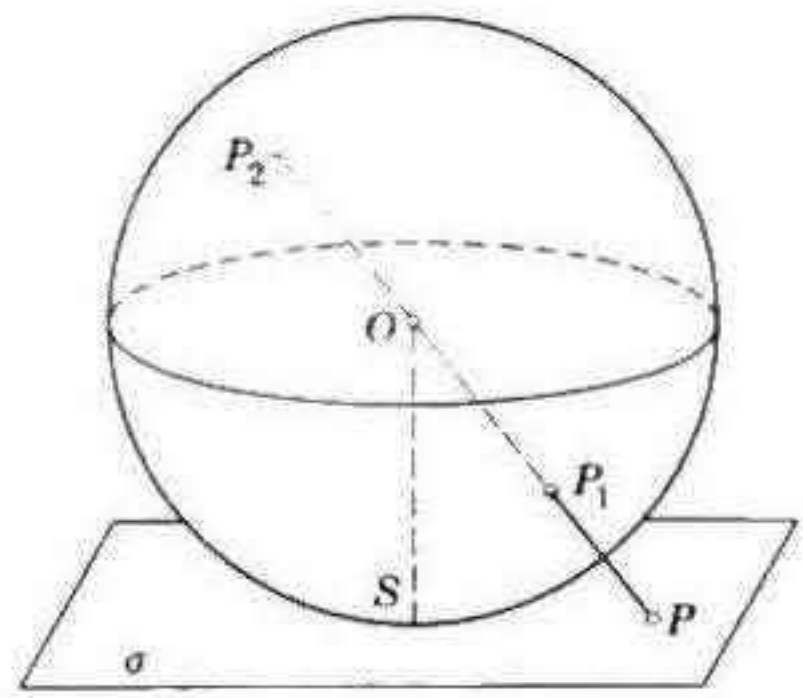


Figura 6.9b

Otra manera de hacerlo consiste en la *proyección central*, en la que se proyecta no desde N, sino desde O, el centro de la esfera, como en la figura 6.9*b*. Cada punto P de σ tiene una recta correspondiente OP, que lo une con O. Este diámetro corta a la esfera en dos puntos antípodas P_1, P_2, que son mapeados en el mismo punto P. Cada recta m tiene un plano correspondiente Om, que la une con O. Este plano diametral corta a la esfera en un *círculo mayor*. Y, al revés, cada uno de los círculos mayores de la esfera, con la excepción del "ecuador" (cuyo plano es paralelo a σ), corresponde a una recta de σ. Y aquí la excepción se elimina al añadir al plano euclidiano una *recta en el infinito* (que representa al ecuador) con todos sus *puntos en el infinito*, que representan parejas de puntos antípodas en el ecuador. Así, todas las rectas paralelas a una recta dada contienen el mismo punto en el infinito, pero las rectas que tienen direcciones diferentes contienen puntos en el infinito diferentes, todos sobre la misma recta en el infinito. (Esta idea se debe a Kepler y a Desargues.)

Cuando la recta en el infinito es tratada como cualquier otra, el plano que se ha extendido de esta manera se llama *plano proyectivo*, o, con más precisión, plano proyectivo *real* [Coxeter 2]. Dos paralelas se encuentran en un punto en el infinito, y una recta ordinaria se encuentra con la recta en el infinito en un punto en el infinito. En consecuencia

6.91 *Dos rectas cualesquiera del plano proyectivo se encuentran en un punto.*

En lugar de tomar una sección de todas las rectas y planos que pasan por O, podríamos proceder de una manera más simétrica (aunque más abstracta)

y decir que, por definición, los puntos y rectas del plano proyectivo *son* las rectas y planos que pasan por O. Así, ya no resulta tan sorprendente la afirmación de 6.91; no dice sino que dos planos cualquiera que pasan por O se encuentran en una recta que pasa por O.

Lo mismo sería decir que, por definición, las rectas del plano proyectivo son los círculos mayores de una esfera, dos cualquiera de los que se encuentran en dos puntos antípodas. Así, los puntos del plano proyectivo son los pares de puntos antípodas, que se identifican abstractamente. Esta identificación abstracta fue descrita vivamente por H. G. Wells en un cuento, *El Caso Notable de los Ojos de Davidson*. (Una catástrofe repentina distorsiona el campo de visión de Davidson, de modo que todo lo ve como si estuviera en una posición exactamente antípoda de la tierra.)

Cuando se deriva de la esfera el plano inversivo mediante la proyección estereográfica, las distancias se distorsionan inevitablemente, pero se preserva el ángulo al que se intersectan dos círculos. En este sentido, el plano inversivo tiene una métrica parcial: se miden los ángulos de la manera acostumbrada, pero nunca se habla de distancias [Graustein **1**, págs. 377, 388, 395].

Por otra parte, la proyección central nos permite, si así lo queremos, dar al plano *proyectivo* una métrica *completa*. Se define la distancia entre dos puntos P y Q de σ (figura 6.9*a*) como el ángulo POQ (medido en radianes), y se define el ángulo entre dos rectas m y n de σ como el ángulo que forman los planos Om y On. (Esto concuerda con la medida habitual de distancias y ángulos en una esfera, como se hace en la trigonometría esférica.) Hemos obtenido de esta manera el plano *elíptico** o, con más precisión, el plano proyectivo real con una métrica elíptica* [Coxeter **3**, capítulo VI; E. T. Bell **2**, págs. 302–311; Bachmann **1**, pág. 21].

Puesto que los puntos del plano elíptico están en una correspondencia de uno a dos con los puntos de la esfera unitaria, cuya área total es 4π, tenemos que el área total del plano elíptico (según la definición más natural de "área") es 2π. De la misma manera, la longitud total de una recta (que es representada por "un semicírculo máximo") es π. La simplificación que proviene de emplear el plano elíptico en lugar de la esfera se ejemplifica en el problema de calcular el área de un triángulo esférico ABC, cuyos lados son arcos de tres de los círculos mayores. La figura 6.9*c* muestra estos círculos mayores en su proyección estereográfica y en su proyección central. El plano elíptico se descompone por medio de las tres rectas BC, CA, AB en cuatro regiones triangulares. Una de ellas es el triángulo dado Δ con ángulos en A, B, C; las otras tres se han señalado con α, β, γ en la figura 6.9*c*. (En la esfera, por supuesto, no tenemos cuatro regiones, sino ocho.) Las dos rectas CA, AB descomponen el plano en dos *lúnulas*, cuyas áreas, por ser proporcionales a los ángulos suplementarios A y $\pi - A$, son exactamente $2A$

* El nombre "elíptico" tal vez sea causa de confusión. No implica ninguna relación directa con la curva llamada elipse, sino más bien una analogía lejana. Una cónica central se llama elipse o hipérbola según carezca de asíntotas o tenga dos asíntotas. De la misma manera, se dice que un plano no euclidiano es elíptico o hiperbólico (capítulo 16) según cada una de sus rectas no contenga ningún punto en el infinito o contenga a dos puntos en el infinito.

y $2(\pi - A)$. La lúnula cuyo ángulo es A está compuesta por las dos regiones Δ y α. En consecuencia

$$\Delta + \alpha = 2A.$$

De la misma manera, $\Delta + \beta = 2B$ y $\Delta + \gamma = 2C$. Al sumar las tres ecuaciones y substraer

$$\Delta + \alpha + \beta + \gamma = 2\pi,$$

deducimos la fórmula del "exceso esférico" de Girard

$$\Delta = A + B + C - \pi,$$

que también es válida en relación con la esfera y el plano elíptico. (A. Girard, *Invention Nouvelle en algèbre*, Amsterdam, 1629.)

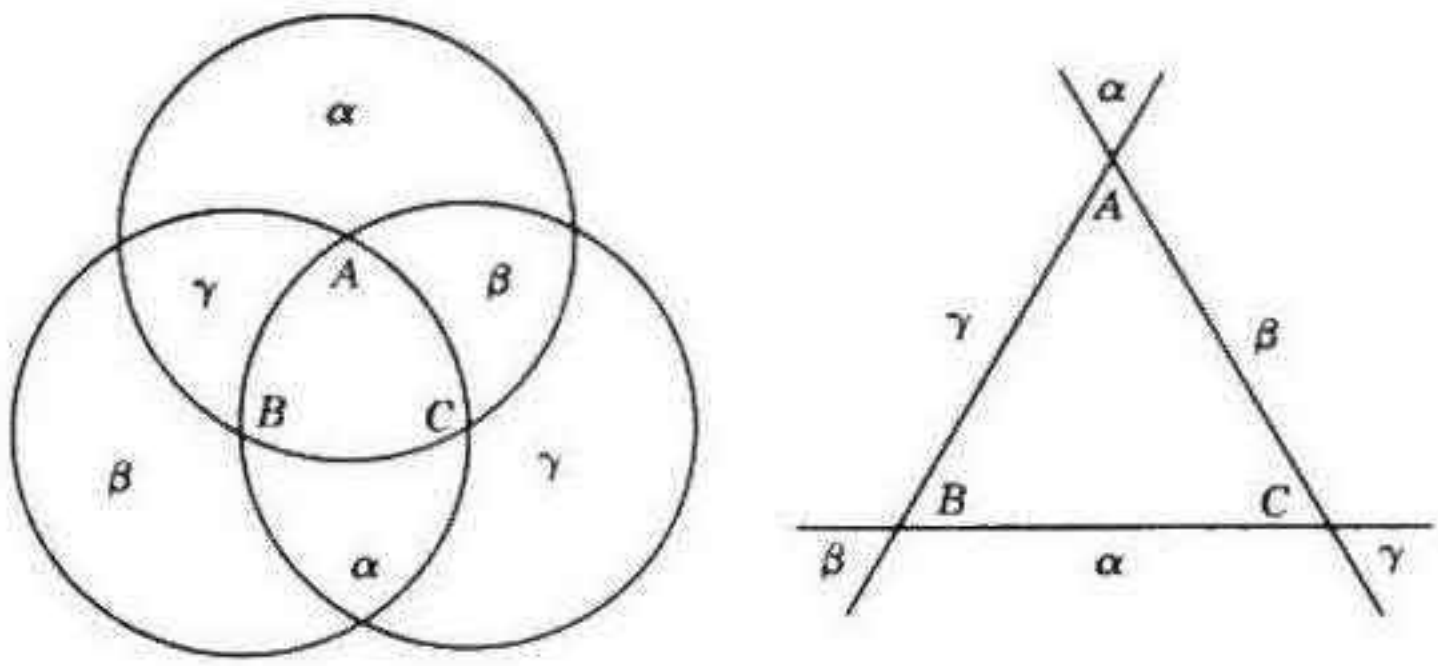


Figura 6.9c

EJERCICIOS

1. En el plano elíptico, dos círculos pueden tener hasta cuatro puntos de intersección.
2. El área de un pégono es en el plano elíptico igual al exceso de la suma de sus ángulos sobre la suma de los ángulos de un pégono en el plano euclidiano.

7

Isometría y semejanza en el espacio euclideano

Este capítulo constituye la contrapartida tridimensional de los capítulos 3 y 5. En § 7.5 encontraremos una demostración (al margen del Quinto Postulado de Euclides) del teorema (que descubrió en 1830 Michel Chasles) de que cada movimiento es una *torcedura*. En § 7.6 veremos que toda semejanza (con la excepción de la torcedura y de la reflexión en deslizamiento, que son isometrías) es una *rotación dilatativa* tridimensional.

La mayor parte de las isometrías nos son familiares en la vida cotidiana. Cuando se camina en línea recta se experimenta una traslación. Al dar vuelta a la esquina, es una rotación; al ascender por una escalera de caracol, una torcedura. La transformación que nos intercambia con nuestra imagen frente a un espejo común es una reflexión, y es fácil ver la manera de combinarla con una rotación o una traslación para obtener una reflexión rotatoria o una reflexión en deslizamiento, respectivamente.

7.1 ISOMETRIAS DIRECTAS Y OPUESTAS

> *Una congruencia es o bien propia, tal que hace de un tornillo de cuerda izquierda otro de cuerda izquierda y de un tornillo de cuerda derecha otro de cuerda derecha, o bien es impropia o reflexiva, tal que hace del tornillo de cuerda izquierda otro de cuerda derecha y viceversa. Las congruencias propias son las transformaciones que . . . relacionan las posiciones de puntos de un cuerpo rígido y después de un movimiento.*
>
> H. Weyl [1, págs. 43–44]

Los axiomas de congruencia, de los que dimos una muestra en 1.26, se pueden extender de manera natural de la geometría plana a la sólida. En el

espacio, una *isometría* (la "congruencia" de Weyl) sigue siendo una transformación que preserva la longitud, de manera que el segmento de recta PQ resulta, al ser transformado, en un segmento congruente $P'Q'$. Los ejemplos más conocidos son el de la *rotación* alrededor de una recta dada que recorre un ángulo dado y la *traslación* en una dirección dada que recorre una distancia dada. En el primer caso, el eje de rotación tiene sus puntos invariantes; en el segundo, no hay punto invariante, con la excepción del caso en el que la distancia es cero, de manera que la traslación es la identidad. Una *reflexión* es una clase especial de isometría que conserva invariante todo un plano de puntos: el espejo. Por medio de un argumento sencillo en el que intervienen tres esferas en lugar de dos círculos, podemos demostrar con facilidad el siguiente análogo del teorema 2.31:

7.11 *Si una isometría tiene tres puntos no colineales invariantes, es o bien una identidad, o bien una reflexión.*

Cuando dos tetraedros $ABCP$, $ABCP'$ son imágenes uno del otro por reflexión en una cara común, podemos considerar la "línea quebrada" que forman las tres aristas AB, BC, CP como una especie de tornillo rudimentario, y la imagen que forman AB, BC, CP' como un tornillo de orientación opuesta: si uno es de cuerda derecha, el otro será de cuerda izquierda. Se puede construir un modelo con facilidad por medio de dos trozos de alambre tieso, doblado en ángulos rectos en B y C. Extenderemos la idea de *sentido* de dos a tres dimensiones de esta manera: podemos decir que dos tetraedros concuerdan o discrepan en cuanto a su sentido sobre esta base. En el primer caso encontraremos que cualquiera de los tetraedros puede ser *movido* (como se mueve un tornillo en la tuerca que le corresponde) de manera que tome la posición que previamente ocupaba el otro; ese movimiento se llama *torcedura*.

Esta distinción surge en la geometría analítica al hacer una transformación de coordenadas. Si O es el origen y X, Y, Z están a distancias unitarias a lo largo de los ejes coordenados positivos, el sentido del tetraedro $OXYZ$ determina al sistema de ejes como dextrógiro (derecho) o levógiro (izquierdo). (Una transformación de coordenadas determina una isometría al transformar cada punto (x, y, z) en el punto que tiene las *mismas* coordenadas en el nuevo sistema.

Puesto que una isometría queda determinada por su efecto en un tetraedro,

7.12 *Dos tetraedros congruentes cualesquiera $ABCD$, $A'B'C'D'$ se relacionan por medio de una isometría única $ABCD \to A'B'C'D'$, que será directa u opuesta según concuerde o discrepe el sentido de $A'B'C'D'$ con el de $ABCD$.*

(Hay algunos autores, como Weyl, que prefieren decir "propia o impropia" en lugar de "directa u opuesta".)

El análogo espacial del teorema 3.12 se enuncia fácilmente como

7.13 *Dos triángulos congruentes dados se relacionan exactamente por dos isometrías: una directa y otra opuesta.*

La contrapartida de 3.13 será [Coxeter **1**, pág. 36]:

7.14 *Toda isometría es producto de no más de cuatro reflexiones. Cuando hay un punto invariante, podemos reemplazar el "cuatro" por un "tres".*

Como una reflexión invierte el sentido, una isometría será directa u opuesta según sea producto de un número par o impar de reflexiones: 2 ó 4 en el primer caso; 1 ó 3 en el segundo. En particular, una isometría directa con un punto invariante será producto de solamente dos reflexiones, y como los dos espejos tienen un punto común, también tienen una recta común. Por lo tanto

7.15 *Toda isometría directa con un punto invariante es una rotación.*

También, como observó Euler en 1776,

7.16 *El producto de dos rotaciones alrededor de rectas que pasan por un punto O es otra rotación como las anteriores.*

EJERCICIO

El producto de las rotaciones que recorren π alrededor de dos rectas que se intersectan a un ángulo α es una rotación que recorre 2α.

7.2 LA INVERSION CENTRAL

Una de las isometrías opuestas más importantes es la *inversión central* (o "reflexión en un punto"), que transforma cada punto P en el punto P', para el que el punto medio de PP' es un punto fijo O. Esto podemos describirlo como el producto de reflexiones en tres planos perpendiculares entre sí que pasan por O. Si tomamos los tres espejos como los planos coordenados $x = 0, y = 0, z = 0$, veremos que la inversión central en el origen transforma cada punto (x, y, z) en el punto $(-x, -y, -z)$.

El nombre de "inversión central", aunque se encuentra muy establecido en la literatura de cristalografía, tal vez sea desafortunado: hemos de tener cuidado para no confundirlo con la inversión en una esfera.

Para la mayoría de los propósitos, tenemos que la inversión central tiene en tres dimensiones un papel muy parecido al del semigiro en dos. Pero hemos de recordar que, como 3 es un número impar, la inversión central es una isometría opuesta, mientras el semigiro es directa. En el espacio, un *semigiro* suele significar la rotación que recorre π alrededor de una recta (o la "reflexión en una recta"), que sigue siendo directa [Lamb **1**, pág. 9].

EJERCICIO

¿Qué es el producto de los semigiros alrededor de tres rectas perpendiculares entre sí que pasan por el mismo punto?

7.3 ROTACION Y TRASLACION

Podemos adaptar el tratamiento que dimos a la traslación en § 3.2 de dos a tres dimensiones, al definirla como el producto de dos inversiones centrales. Pronto observaremos que se puede asignar arbitrariamente o bien el primer centro, o bien el segundo, y que las dos inversiones se pueden reemplazar por dos semigiros alrededor de ejes paralelos o por dos reflexiones en espejos paralelos.

Así, el producto de dos reflexiones es o bien una traslación, o bien una rotación. Esta última sobreviene cuando ambos espejos se cortan en una recta, el eje de rotación. En particular, tenemos que el producto de las reflexiones en dos espejos paralelos es un semigiro.

El producto de las reflexiones en dos planos que pasan por una recta l, que constituye una rotación alrededor de l, es igual al producto de las reflexiones en otros dos planos que pasan por l al mismo ángulo diedral que el de los planos dados (en el mismo sentido). De la misma manera, el producto de las reflexiones en dos planos paralelos, que constituye una traslación, es igual al producto de las reflexiones en otros dos planos paralelos a los planos dados y que se encuentran a la misma distancia uno del otro.

EJERCICIO

¿Qué es el producto de las reflexiones en tres planos paralelos?

7.4 EL PRODUCTO DE TRES REFLEXIONES

Las tres clases más sencillas de isometría, a saber, rotación, traslación y reflexión, se combinan en parejas conmutativas para formar la *torcedura* (o "desplazamiento de tornillo"), la *reflexión en deslizamiento* y la *reflexión rotatoria*. La torcedura es el producto de una rotación y una traslación a lo largo del eje. La reflexión en deslizamiento es el producto de una reflexión y una traslación a lo largo de la dirección de una recta del espejo, es decir, el producto de las reflexiones en tres planos, dos de los cuales son paralelos entre sí mientras el tercero es perpendicular a ambos. Una reflexión rotatoria es el producto de una reflexión y una rotación cuyo eje es perpendicular al espejo. Cuando la rotación es un semigiro, la reflexión rotatoria se reduce a una inversión central.

Una reflexión rotatoria cualquiera puede ser llevada por el análisis a una inversión central y una rotación residual. Pues, si la rotación que interviene en la reflexión rotatoria recorre el ángulo θ, podemos considerarla como producto de un semigiro y de una rotación que recorra $\theta + \pi$ (o $\theta - \pi$). Así, bien se puede llamar a una reflexión rotatoria *inversión rotatoria*: el producto de una inversión central y una rotación cuyo eje pasa por el centro.

Una isometría opuesta cualquiera T que tenga un punto invariante O es o bien una sola reflexión o bien producto de las reflexiones en tres planos que pasen por O. Su producto TI con la inversión central en O, que es una

isometría directa con un punto invariante, constituye sencillamente una rotación S alrededor de una recta que pasa por O. De aquí que la isometría opuesta dada sea la inversión rotatoria

$$T = SI^{-1} = SI:$$

7.41 *Toda isometría opuesta que tenga un punto invariante es una inversión rotatoria.*

Puesto que tres planos que no tienen un punto en común han de ser perpendiculares a un plano α, las reflexiones en ellos (como se aplican a un punto de α) se comportan como reflexiones en las rectas que constituyen sus secciones por α. Así podemos emplear el teorema 3.31 para concluir que

7.42 *Toda isometría opuesta que carezca de punto invariante es una reflexión en deslizamiento.*

EJERCICIOS

1. ¿Qué es el producto de las reflexiones en tres planos que pasan por una recta?
2. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos congruentes situados en planos distintos. Considérense las mediatrices de AA', BB', CC'. Si esos tres planos tienen solamente un punto común O, los dos triángulos se relacionan por medio de una inversión rotatoria cuyo centro es O. (*Indicación*: Si los relacionara una rotación, los tres planos se intersectarían en una recta.)
3. Se puede expresar toda isometría opuesta como producto de una reflexión y de un semigiro.

7.5 TORCEDURA

La única posibilidad que nos queda es la de una isometría directa que carezca de punto invariante. Sea S una isometría directa cualquiera (con punto invariante o sin él), tal que transforma un punto arbitrario A en A'. Sea R_1 la reflexión que intercambia A y A'. Entonces tenemos que el producto R_1S es una isometría opuesta en la que A' se conserva invariante. Por 7.41, ésta es una inversión rotatoria o reflexión rotatoria $R_2R_3R_4$, producto de una rotación R_2R_3 y una reflexión R_4, donde el espejo de R_4, es perpendicular al eje de R_2R_3. Puesto que podemos expresar la rotación como producto de dos reflexiones de maneras distintas (§ 7.3), ajustaremos los espejos de R_2 y R_3 de modo que el primero sea perpendicular al espejo de R_1. Como ambos planos han permanecido perpendiculares al espejo de R_4, tenemos ahora

$$S = R_1R_2R_3R_4,$$

producto de dos rotaciones, R_1R_2, R_3R_4, donde ambas son semigiros [Veblen y Young 2, pág. 318]:

7.51 *Se puede expresar toda isometría directa como producto de dos semigiros.*

Si la isometría tiene un punto invariante, es una rotación, que se puede

expresar de distintas maneras como producto de los semigiros alrededor de dos rectas que se cortan. Cuando no hay punto invariante, los ejes de los dos semigiros son o bien paralelos, en cuyo caso el producto es una traslación, o bien se cruzan sin cortarse, como las aristas opuestas de un tetraedro. Dos rectas oblicuas y cruzadas siempre pertenecen a dos planos paralelos, a saber, el plano que pasa por cada una de ellas y es paralelo a la otra.

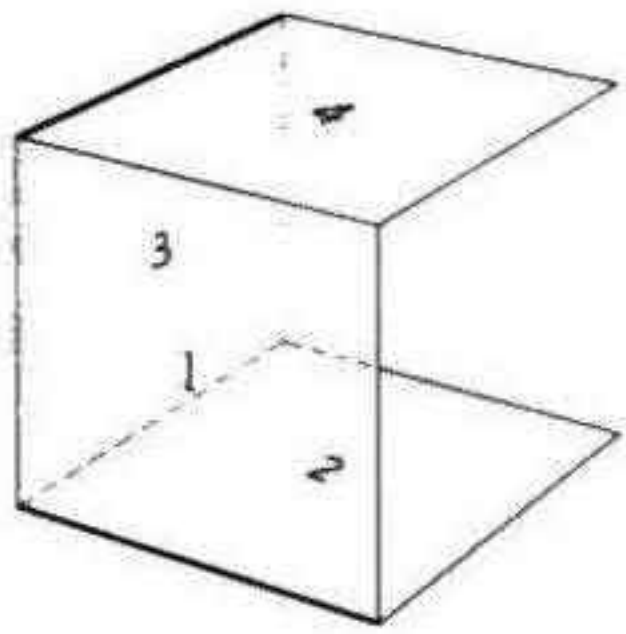


Figura 7.5a

Como un semigiro es producto de las reflexiones en dos planos perpendiculares *cualquiera* que pasan por su eje, los dos semigiros R_1R_2, R_3R_4 con ejes que se cruzan son iguales respectivamente a $R'_1R'_2$, $R'_3R'_4$, donde los espejos de R'_2 y R'_4 son paralelos mientras los otros dos son perpendiculares a ellos (figura 7.5*a*). De aquí podemos deducir que

$$R_1R_2R_3R_4 = R'_1R'_2R'_3R'_4 = R'_1R'_3R'_2R'_4,$$

donde es posible efectuar el intercambio de las reflexiones que están en medio puesto que el semigiro $R'_2R'_3$ se puede expresar también como $R'_3R'_2$. Así hemos cumplido nuestro propósito de expresar la isometría directa general como una torcedura: el producto de la rotación $R'_1R'_3$ y la traslación $R'_2R'_4$ a lo largo del eje de rotación. (Este eje corta a las dos rectas que se cruzan en ángulos rectos, y por lo tanto su medida es la de la menor distancia entre ambos.) Dicho de otra manera,

7.52 *Todo desplazamiento es o bien una rotación, o bien una traslación, o bien una torcedura.*

(Un tratamiento alterno de la cuestión se encuentra en Thomson y Tait [1, § 102].)

EJERCICIOS

1. ¿Qué clase de isometría es la que transforma los puntos (x, y, z) en

(a) $(x, y, -z)$. (b) $(-y, x, z)$. (c) $(x, y, z + 1)$.
(d) $(-y, x, z + 1)$. (e) $(-x, y, z + 1)$. (f) $(-y, x, -z)$?

2. El producto de los semigiros alrededor de dos rectas que se cruzan es una torcedura, a saber, el producto de un semigiro alrededor de la recta que constituye la menor distancia y una traslación que recorre el doble de esta distancia menor. (Veblen y Young [2, pág. 324] lo denominan *semitorcedura*.)

7.6 ROTACION DILATATIVA

Se puede demostrar con métodos elementales que toda semejanza euclidiana que no sea la del movimiento rígido tiene un punto fijo.

Hilbert y Cohn–Vossen [1, pág. 331]

En el espacio euclidiano se define la *dilatación* exactamente de la misma manera en que se definió para el plano. De hecho, podemos aplicar § 5.1, palabra por palabra, a las tres dimensiones, con la excepción de que la dilatación especial $AB \to BA$ u $O(-1)$ no es un semigiro, sino una inversión central (§ 7.2). De la misma manera, § 5.2 se aplica tanto a esferas como a círculos: podemos considerar la figura 5.2*a* como la sección plana de dos esferas desiguales de centros en C, C' y centros de similitud en O, O_1. Dos esferas iguales se relacionan por medio de una traslación y por medio de una inversión central.

Sin embargo, se presenta una diferencia importante al considerar cuestiones de sentido. En el plano, todas las dilataciones son directas, pero en el espacio la dilatación $O(\lambda)$ es directa u opuesta según sea λ positiva o negativa; por ejemplo, la inversión central $O(-1)$ es opuesta, como ya hemos visto.

En el espacio, como sucedía en el plano, dos figuras semejantes se relacionan por medio de una *semejanza*, que en casos especiales puede ser una isometría o una dilatación. Al extender naturalmente la terminología, diremos que una *rotación dilatativa* es el producto de una rotación alrededor de una recta l (el *eje*) y una dilatación cuyo centro O está en l. El plano que pasa por O y es perpendicular a l es invariante, pues se transforma según la "rotación dilatativa" bidimensional de § 5.5. El caso especial en el que la rotación es un semigiro posee una infinidad de planos invariantes, a saber, todos los que pasan por l. Cualquier plano que cumpla con las condiciones anteriores se transforma según una reflexión dilatativa.

Supongamos que una rotación dilatativa sea producto de una rotación que recorra un ángulo α y una dilatación $O(\lambda)$ (donde O está en el eje). Los valores siguientes de α y λ dan lugar a casos que nos son familiares:

α	λ	Semejanza
0	1	Identidad
π	1	Semigiro
α	1	Rotación
π	-1	Reflexión
0	-1	Inversión central
α	-1	Inversión rotatoria
0	λ	Dilatación

Observemos que esta tabla incluye a todas las clases de isometría, tanto las directas como las opuestas, con la excepción de la traslación, la torcedura y la reflexión en deslizamiento (que carecen de puntos invariantes). Resulta más sorprendente encontrar que, con las mismas tres excepciones, *toda semejanza es una rotación dilatativa.*

El papel de los triángulos semejantes lo tienen ahora los tetraedros semejantes. Es evidente que

7.61 *Dos tetraedros semejantes dados, $ABCD$, $A'B'C'D'$ se relacionan por medio de una única semejanza $ABCD \to A'B'C'D'$, que será directa u opuesta según concuerde o discrepe el sentido de $A'B'C'D'$ con el de $ABCD$.*

Dicho de otra manera, una semejanza queda totalmente determinada a partir de su efecto en cuatro puntos coplanares cualquiera que se den, y así tenemos la siguiente generalización del teorema 7.13:

7.62 *Dos triángulos semejantes ABC, $A'B'C'$ se relacionan por exactamente dos semejanzas: una directa y otra opuesta.*

Como un primer paso en la demostración de que toda semejanza que no sea una isometría será una rotación dilatativa, demostremos antes que

7.63 *Toda semejanza que no sea una isometría tiene sólo un punto invariante.*

Consideremos una semejanza cualquiera dada S cuya razón de amplificación sea $\mu \neq 1$. Sea S tal que transforme un punto arbitrario A en A'. Si A' coincide con A tenemos el punto invariante que buscábamos. Si no coincide, sea Q el punto que divide al segmento AA' en la razón de $1 : \mu$, interna o externamente según se tenga que S sea directa u opuesta: es decir, constrúyase Q de manera que $QA' = \pm \mu QA$. Denotemos por D la dilatación directa u opuesta $Q(\pm \mu^{-1})$. Entonces, como su razón de amplificación es 1, SD es una isometría directa que conserva A invariante. Por el teorema 7.15, SD es una rotación alrededor de una recta l que pasa por A. El plano que pasa por Q y es perpendicular a l se transforma en sí mismo tanto por SD como por D^{-1} y, por lo tanto, también por el producto de ambas, S. En este plano invariante, S induce una semejanza bidimensional que, de acuerdo con el teorema 5.42, tendrá un punto invariante. Por último, el punto invariante es único, pues si hubiera dos puntos invariantes diferentes, el segmento del cual fueran extremos sería invariante, en lugar de multiplicarse por μ.

Puesto que ya hemos encontrado el punto (o centro) invariante O, podemos aplicar el procedimiento anterior en una versión simplificada, donde O substituya a A. Como A' y Q coinciden con O, S es el producto de una rotación alrededor de una recta que pasa por O, y la dilatación $O(\pm\mu)$, es decir, S es una rotación dilatativa:

7.64 *Toda semejanza es o bien una isometría o bien una rotación dilatativa.*

En otras palabras, toda semejanza puede ser una traslación, una torcedura,

una reflexión en deslizamiento o una rotación dilatativa, siempre y cuando consideremos que la última posibilidad incluye todos los casos especiales que se han tabulado en la parte media de la página 131.

El teorema 7.62 nos dice que hay dos rotaciones dilatativas, una directa y otra opuesta, que transformarán un triángulo dado ABC en otro triángulo semejante (pero no congruente) $A'B'C'$. La razón de amplificación $\mu \neq 1$ queda dada por la ecuación $A'B' = \mu AB$. Sean A_1 y A_2 tales que dividan a AA' interna y externamente en la razón de $1 : \mu$. Sean B_1 y B_2, C_1 y C_2 tales que dividan BB', CC', de la misma manera. Consideremos a continuación las tres esferas cuyos diámetros son A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Estas esferas son "esferas de Apolonio" (teorema 6.81); la primera, por ejemplo, es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias desde A y A' están en la razón de $1 : \mu$. Un punto cualquiera O para el que se cumpla

$$OA' = \mu OA, \qquad OB' = \mu OB, \qquad OC' = \mu OC$$

debe quedar en las tres esferas. Ya hemos establecido la existencia de dos de esos puntos. Por lo tanto, los centros de las dos rotaciones dilatativas se pueden construir como los puntos de intersección de estas tres esferas.

En § 3.7 empleamos una traslación para generar la representación geométrica del grupo cíclico infinito C_∞ (que es el grupo libre con un generador). Podemos ver ahora que el mismo grupo abstracto tiene una representación más interesante, cuyo generador es una rotación dilatativa. Se pueden ver aproximadamente treinta elementos de este grupo en la concha del nautilo [Thompson 2, pág. 843, figura 418].

EJERCICIOS

1. ¿Cómo se transforma el punto (x, y, z) por la rotación dilatativa general cuyo centro es el origen y cuyo eje es el eje de las z?
2. Encuéntrese el eje y el ángulo que corresponden a la rotación dilatativa

$$(x, y, z) \to (\mu z, \mu x, \mu y).$$

3. Tenemos que la "reflexión dilatativa" tridimensional es producto de una dilatación $O(\lambda)$ y la reflexión en un plano que pase por O. ¿Cómo queda dentro de la clasificación anterior de semejanzas?
4. ¿Se podría demostrar, de la manera que señala el ejercicio que está al final de § 5.4 (pág. 100), el teorema 7.63?

7.7 TRANSFORMACIONES QUE PRESERVAN LA ESFERA

El razonamiento que empleamos en § 6.7 se extiende con facilidad de dos a tres dimensiones, de manera que obtenemos el teorema siguiente,* análogo del 6.71:

7.71 *Toda transformación que preserve la esfera en el espacio inversivo*

* René Lagrange, *Produits d'inversions et métrique conforme*, Cahiers scientifiques, 23 (Gauthier-Villars, París, 1957), pág. 7. Véase también Coxeter, *Annali di Matematica pura ed applicata* 53 (1961), págs. 165-172.

es o bien una semejanza, o bien el producto de la inversión (en una esfera) y una isometría.

EJERCICIO

Se puede expresar toda transformación que preserve la esfera como producto de r reflexiones y s inversiones, donde

$$r \leqslant 4, \quad s \leqslant 2, \quad r + s \leqslant 5.$$

Parte II

8

Coordenadas

En los capítulos precedentes se incluyeron algunos ejercicios de coordenadas, dirigidos a los lectores que ya tenían conocimientos de geometría analítica. Otros lectores, que habrán omitido esos ejercicios, esperan ser iluminados en esta sección. Además de las coordenadas cartesianas habituales, consideraremos coordenadas oblicuas y polares. (La ecuación polar de una elipse es importante debido a que se emplea en la teoría de las órbitas.) Después de mencionar con brevedad unas cuantas curvas especiales, señalaremos los puntos esenciales de la aplicación que hacía Newton del cálculo a los problemas de longitudes y áreas de arcos. La sección dedicada al espacio tridimensional culmina en una propiedad sorprendente del *toro* con forma de dona.

8.1 COORDENADAS CARTESIANAS

> *Aunque la idea en la que se basa es de una sencillez infantil, el método de la geometría analítica es tan potente que un muchacho ordinario de diecisiete años puede servirse de él para demostrar resultados que hubieran dejado atónitos a los más grandes geómetras griegos: Euclides, Arquímedes y Apolonio.*
>
> E. T. Bell (1883–1960)
>
> [E. T. Bell 1, pág. 21]

Se puede describir la geometría analítica como la representación de los puntos del espacio enedimensional por medio de conjuntos ordenados de n (o más) números que se llaman *coordenadas*. Por ejemplo, se puede determi-

nar cualquier posición sobre la tierra mediante su latitud, su longitud y su altura sobre el nivel del mar.

El caso unidimensional queda adecuadamente ejemplificado por un termómetro. Hay un punto de la recta al que se asocia en número cero; los enteros positivos 1, 2, 3, . . . están a espacios iguales en una dirección a partir de 0, los enteros negativos, −1, −2, −3, . . . en la otra dirección, y los números fraccionarios se encuentran interpolados de la manera natural. El *desplazamiento* de un punto x a otro x' es el número positivo o negativo $x' - x$.

En el caso bidimensional, se puede determinar la posición de un punto en el plano por medio de sus distancias desde dos rectas perpendiculares fijas, los *ejes*. La idea se encuentra ya en Arquímedes de Siracusa y Apolonio de Perga, o incluso en los primeros egipcios, pero debe su desarrollo sistemático a dos franceses: Pierre Fermat (cuyo problema acerca de un triángulo resolvimos en § 1.8) y René Descartes (1596–1650). En la formulación de ambos, las dos distancias se tomaban como positivas o cero. La idea importante de permitir que una o ambas fueran negativas provino de Sir Isaac Newton (1642–1727), y el primero que las llamó "coordenadas" fue G. W. Leibniz (1646–1716). (Los alemanes escriben *Koordinaten* y los franceses *coordonnées*.)

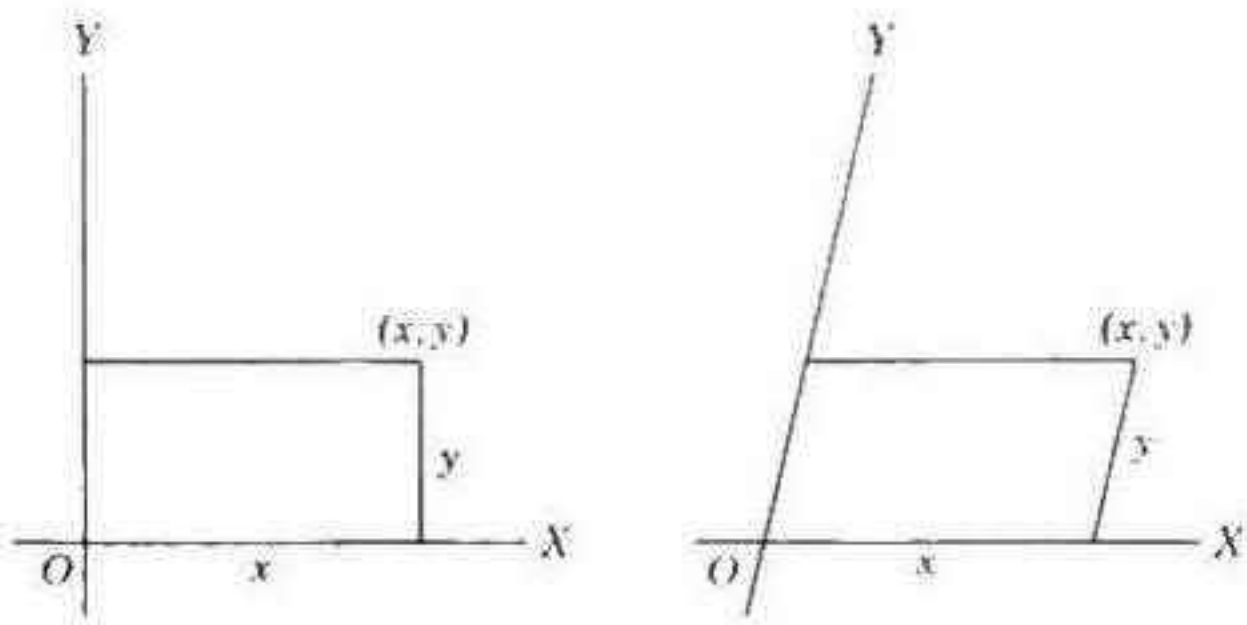


Figura 8.1a

En algunos casos, resulta igualmente fácil el empleo de ejes oblicuos, como se ve en la segunda parte de la figura 8.1*a*. Si empezamos por el *origen* O, donde se intersectan los ejes, llegamos al punto general (x, y) al recorrer la distancia x a lo largo del eje de las x OX, y enseguida una distancia y a lo largo de una paralela al eje de las y OY. Se dice que el eje de las x tiene la *ecuación* $y = 0$, debido a que todos sus puntos $(x, 0)$ la satisfacen; de la misma manera, $y = 0$ será la ecuación del eje de las y. En cualquier otra recta que pase por el origen, al considerar los triángulos semejantes tenemos que la razón x/y es constante; así, toda recta que pase por el origen $(0, 0)$ se puede expresar como $ax + by = 0$.

Para obtener la ecuación de otra recta cualquiera, tomamos en ella un punto (x_1, y_1). En los términos de las nuevas coordenadas x', y' que se derivan al trasladar el origen de $(0, 0)$ a (x_1, y_1), se podrá expresar la recta como $ax' + by' = 0$. Como $x' = x - x_1$ y $y' = y - y_1$ la misma recta, en los términos de las coordenadas originales, será

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

es decir

8.11 $$ax + by + c = 0.$$

Así, toda recta tiene una ecuación lineal, y toda ecuación lineal determina una recta. En particular, la recta que hace intersecciones p y q en los ejes es

8.12 $$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1;$$

pues esta ecuación es lineal y la cumplen tanto $(p\ 0)$ como $(0, q)$. Dos rectas de la forma 8.11 serán paralelas cuando tengan la misma razón a/b (donde también se incluye, como posibilidad, $b = 0$ para ambas, en cuyo caso se tiene que son paralelas al eje de las y). El punto de intersección de dos rectas no paralelas se obtiene al resolver las dos ecuaciones simultáneas para x y para y.

Cuando $b \neq 0$, se puede resolver la ecuación 8.11 para y en la forma $y = -(ax + c)/b$. Si deseamos hablar más generalmente, los puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación $F(x, y) = 0$ o $y = f(x)$ se pueden representar gráficamente al dar valores convenientes a la *abscisa* x y calcular los valores correspondientes de la *ordenada* y. Este procedimiento es particularmente adecuado cuando $f(x)$ es una función de un solo valor x. En otros casos, tal vez prefiramos emplear ecuaciones *paramétricas*, que expresan a x y y como funciones de una sola variable (o *parámetro*) t. Por ejemplo, si P_1 denota el punto (x_1, y_1) una recta cualquiera que pase por P_1 tiene las ecuaciones paramétricas

8.13 $$x = x_1 + Xt, \quad y = y_1 + Yt,$$

donde X y Y dependen de la *dirección* de la recta.

A veces, al considerar la simetría, el parámetro único t se substituye por dos parámetros, t_1 y t_2, relacionados por medio de una ecuación auxiliar. Por ejemplo, el punto general (x, y) que está en la recta que pasa por dos puntos dados P_1 y P_2 queda determinado por

$$x = t_1x_1 + t_2x_2, \quad y = t_1y_1 + t_2y_2, \quad t_1 + t_2 = 1.$$

Este punto P, que divide al segmento P_1P_2 en la razón de $t_1 : t_2$ es el *centroide* o ("centro de gravedad") de las masas t_1 en P_1 y t_2 en P_2. Las posiciones que quedan fuera del intervalo de P_1 (donde $t_2 = 0$) a P_2 (donde $t_1 = 0$) se abarcan también al permitir que t_2 ó t_1 sean negativos mientras sigan cumpliendo la igualdad $t_1 + t_2 = 1$; esto lo podemos justificar si los llamamos "cargas eléctricas" en lugar de "masas".

En relación con los problemas en los que interviene la distancia entre dos puntos o el ángulo que forman dos rectas, suele ser recomendable el uso de ejes *rectangulares*, de manera que la distancia del origen a (x, y) sea la raíz cuadrada de $x^2 + y^2$, y la distancia P_1P_2 se la raíz cuadrada de

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Al multiplicar la expresión $l = ax + by + c$ por un número adecuado

podremos normalizar la ecuación $l = 0$ de la recta general, de manera que $a^2 + b^2 = 1$. Al escribir $l = 0$ en la forma

$$(x - x_1 + 2al_1)^2 + (y - y_1 + 2bl_1)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,$$

donde $l_1 = ax_1 + by_1 + c$, la reconocemos como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de

$$(x_1 - 2al_1, y_1 - 2bl_1) \quad \text{y} \quad (x_1, y_1):$$

en otras palabras, la recta $l = 0$ sirve como espejo, e intercambia los dos puntos por reflexión. En consecuencia, el pie de la perpendicular de P_1 a $l = 0$ es $(x_1 - al_1, y_1 - bl_1)$, y la distancia desde P_1 a la recta es $\pm l_1$ (siempre y cuando $a^2 + b^2 = 1$). En particular, la distancia del origen a $l = 0$ es $\pm c$.

El lugar geométrico de los puntos que están a distancias unitarias del origen de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1,$$

cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \cos\theta, \qquad y = \operatorname{sen}\theta$$

o, si tenemos $t = \tan\frac{1}{2}\theta$,

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

EJERCICIOS

1. En términos de coordenadas cartesianas generales, el punto (x, y) se transformará en

$(-x, -y)$	por el semigiro $O(-1)$	(§ 5.1),
$(\mu x, \mu y)$	por la dilatación $O(\mu)$,	
$(x + a, y)$	por una traslación a lo largo del eje de las x.	

2. En términos de coordenadas rectangulares cartesianas, el punto (x, y) se transformará en

$(x, -y)$	por reflexión en el eje de las x.	
(y, x)	por reflexión en la recta $x = y$.	
$(-y, x)$	por un cuarto de giro alrededor del origen,	
$(x + a, -y)$	por una reflexión en deslizamiento (en y a lo largo del eje de las x	
$(\mu x, -\mu y)$	por una reflexión dilatativa	(§ 5.6).

Denotemos el punto medio de P_iP_j por M_{ij}. Para cuatro puntos cualquiera P_1, P_2, P_3, P_4, los puntos medios de $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$, $M_{14}M_{23}$ coinciden.

8.2 COORDENADAS POLARES

La derivación de atajos a partir de principios básicos abarca algunas de las mejores hazañas de los más grandes matemáticos.

M. H. A. Newman (1897–)

(*Mathematical Gazette* 43 (1959), pág. 170)

Con respecto a los problemas en los que interviene un origen (o "polo") fijo O, se suele encontrar que es conveniente determinar un punto P por medio de sus *coordenadas polares* (r, θ), donde r es la distancia OP y θ es el ángulo que la dirección OP hace con una recta *inicial dada*, OX, que se puede identificar con el eje de las x de las coordenadas cartesianas rectangulares. Por supuesto, el punto (r, θ) es igual a $(r, \theta + 2n\pi)$ para todo entero n. A veces es deseable que r sea negativo, de manera que (r, θ) sea igual a $(-r, \theta + \pi)$.

A partir de la ecuación cartesiana de una curva, podemos deducir la ecuación polar de la misma curva al substituir

8.21 $$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Por ejemplo, la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ tiene la ecuación polar

$$(r\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 1,$$

que se reduce a

$$r = 1.$$

(El valor positivo de r es suficiente si dejamos que θ tome valores de $-\pi$ a π o de 0 a 2π.) Este procedimiento resulta ser una ayuda en la trigonometría elemental para los estudiantes, que suelen experimentar dificultades al demostrar (y recordar) las funciones trigonométricas de los ángulos obtusos y aun mayores. Si se toma un ángulo XOP donde $OP = 1$, podemos *definir* con sencillez su coseno y su seno como la abscisa y la ordenada de P.

Las coordenadas polares son sobre todo convenientes para describir las isometrías (§ 3.5) y las semejanzas (§ 5.4) que tienen un punto invariante; pues entonces este punto puede servir como origen. Así, el punto general (r, θ) se transformará en

$(r, \theta + \alpha)$	por una rotación que recorra α,
$(r, \theta + \pi)$	por un semigiro,
$(r, -\theta)$	por la reflexión en la recta inicial,
$(r, 2\alpha - \theta)$	por reflexión en la recta $\theta = \alpha$,
$(\mu r, \theta)$	por la dilatación $O(\mu)$,
$(\mu r, \theta + \alpha)$	por una rotación dilatativa con centro en O,
$(\mu r, 2\alpha - \theta)$	por una rotación dilatativa con centro en O y cuyo eje sea $\theta = \alpha$.

De la misma manera, la inversión en el círculo $r = k$ (véase § 6.1) transformará (r, θ) en

$$(k^2/r, \quad \theta).$$

Las expresiones cartesianas para las mismas transformaciones se pueden deducir en un momento. Por ejemplo, la rotación que recorre α alrededor de O transforma a (x, y) en (x', y'), donde, por 8.21,

$$x' = r\cos(\theta + \alpha) = r(\cos\theta\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha) = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$
$$y' = r\,\mathrm{sen}\,(\theta + \alpha) = r(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha) = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha.$$

En particular, tenemos que un cuarto de giro transforma a (x, y) en $(-y, x)$, y, en consecuencia, se tiene que la condición necesaria y suficiente para que

dos puntos (x, y) y (x', y'), estén en direcciones perpendiculares desde el origen en que

8.22 $$xx' + yy' = 0.$$

Una transformación como

8.23 $$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha, \\ y' &= x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

tiene dos aspectos distintos: uno "activo", o de *coartada* en el que cada punto (x, y) es desplazado a una nueva posición (x', y'), y otro "pasivo", o de *alias*, en el que el punto al que antes se denominó (x, y) se le da el nuevo nombre (x', y'). El segundo aspecto se emplea en ocasiones con el objeto de simplificar la ecuación de una curva dada. Por ejemplo, la curva

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$$

se convierte en

$$a(x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha)^2 + 2h(x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha)(x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha) + b(x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)^2 = 1,$$

en la que el coeficiente de xy no es ya $2h$ sino

$$2h(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - 2(a - b) \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 2h \cos 2\alpha - (a - b) \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Como esto desaparece cuando $\tan 2\alpha = 2h/(a - b)$, la ecuación se simplifica por medio de una rotación de los ejes que recorra el ángulo particular

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \arctan \frac{2h}{a - b}.$$

El área del triángulo OP_1P_2, donde P_i tiene coordenadas polares (r_i, θ_i), se toma como positivo si $\theta_1 < \theta_2$, y negativo si $\theta_1 > \theta_2$. De acuerdo con esta convención, el área es

$$\tfrac{1}{2} r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 (\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1)$$

o, en coordenadas cartesianas,

8.24 $$\tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Para encontrar el área de un triángulo cualquiera $P_1P_2P_3$ escogemos un par de ejes nuevos, paralelos a OX, OY, tales que pasen por P_3. Como las coordenadas nuevas de P_i $(i = 1 \text{ o } 2)$ son $(x_i - x_3, y_i - y_3)$, el área de un triángulo cualquiera $P_1P_2P_3$ será

8.25 $$\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

En consecuencia, tenemos como condición necesaria y suficiente para que P_1, P_2, P_3 sean colineales es que el determinante de tres renglones tenga un valor de cero. La ecuación de la recta P_1P_2 se puede derivar a partir de esta condición si escribimos (x, y) en lugar de (x_3, y_3).

EJERCICIOS

1. Por medio de una fórmula trigonométrica muy conocida, obténgase una expresión del cuadrado de la distancia entre los puntos de coordenadas polares (r_1, θ_1), (r_2, θ_2).
2. Obténganse las coordenadas polares del punto medio.
3. Obténgase una ecuación polar de la recta $y = x \tan \alpha$. (*Indicación*: Tómense valores negativos para r.)
4. Por medio de 8.22 obténgase la condición

$$aa' + bb' = 0$$

en relación con dos rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ de manera que sean perpendiculares. Dedúzcase que

$$ax + by + c = 0, \quad bx - ay + c' = 0$$

son perpendiculares para todos los valores de a, b, c, c'.

5. Mediante una rotación adecuada de ejes, simplifíquese la ecuación de la curva

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 = 5.$$

8.3 LA CIRCUNFERENCIA

Una figura de atractivo universal.

D. Pedoe [1, pág. vii]

La circunferencia con centro en (x', y') y de radio k, que es el lugar geométrico de los puntos (x, y) a una distancia k de (x', y'), es

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = k^2.$$

Así

8.31 $$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

es una circunferencia con centro en $(-g, -f)$ siempre que $g^2 + f^2 > c$. Si (x_1, y_1) está en la circunferencia, la tangente en este punto P_1 es

$$x_1x + y_1y + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

ó

$$(x_1 + g)x + (y_1 + f)y + (gx_1 + fy_1 + c) = 0.$$

Pues esta recta pasa por P_1 y es perpendicular al diámetro

$$\frac{x + g}{x_1 + g} = \frac{y + f}{y_1 + f}.$$

El círculo 8.31 es ortogonal a otro círculo

$$x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

si, para un punto P_1 conveniente, el centro de cada uno de ellos está en la tangente en P_1 al otro. Al sumar

$$(x_1 + g)\,g' + (y + f)f' = gx_1 + fy_1 + c$$

a la relación análoga en la que se han intercambiado las letras primas y las no primas, vemos que la ortogonalidad de los dos círculos implica

$$2gg' + 2ff' = c + c'.$$

Y, al revés, dos círculos cualquiera que satisfagan esta relación serán ortogonales. En particular, los círculos

8.32 $$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0,$$

8.33 $$x^2 + y^2 + 2fy - c = 0,$$

cuyos centros quedan respectivamente en los ejes de las x y de las y, serán ortogonales. Al mantener constante a c y permitir que g o f tomen valores diferentes, obtenemos dos haces ortogonales de círculos coaxiales, cuyos ejes radicales son $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente. Si $c = 0$, tenemos dos haces ortogonales *tangentes*, y cada uno de ellos consiste en todos los círculos que tocan uno de los ejes en el origen. Si $c > 0$, los círculos 8.32, para los distintos valores de g, forman un haz *no intersecante*, que incluye los dos círculos punto

$$(x + g)^2 + y^2 = 0, \qquad g = \pm\sqrt{c},$$

que son los puntos límite $(\mp\sqrt{c}, 0)$ del haz. Los círculos 8.33, que pasan por estos dos puntos, forman el haz ortogonal *intersecante*.

EJERCICIOS

1. El círculo $x^2 + y^2 = k^2$ invierte a (x, y) en

$$\left(\frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}\right).$$

Aplíquese esta inversión a la recta 8.11 y al círculo 8.31.

2. Encuéntrese el lugar geométrico de un punto (x, y) tal que sus distancias a $(k/\mu, 0)$ y a $(\mu k, 0)$ están en la razón de $1 : \mu$ (cf. § 6.6).

3. Obténgase la ecuación cartesiana del lugar geométrico de un punto tal que el producto de sus distancias a $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ sea a^2. Dedúzcase la ecuación polar de esta "figura de ocho", que es la *lemniscata de Jacob Bernoulli*.

4. A partir de dos circunferencias iguales que están en contacto, encuéntrese el lugar geométrico de los vértices de los triángulos de los que la primera es la circunferencia de los nueve puntos (§ 1.7) y la segunda es una circunferencia ex-inscrita (§ 1.5). (*Respuesta*: Una lemniscata.*)

5. Una circunferencia de radio b rueda sin deslizarse por el exterior de otra circunferencia de radio nb. El lugar geométrico de un punto fijo en la circunferencia que rueda se llama *epicicloide* (cuando n es entero, epicicloide *de n crestas*.) Obténganse las ecuaciones paramétricas

8.34 $$x = (n + 1)b \cos t - b \cos (n + 1)t,$$
$$y = (n + 1)b \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} (n + 1)t.$$

* Richard Blum, *Canadian Mathematical Bulletin*, 1 (1958), págs. 1-3.

Trácense las gráficas que corresponden a los casos de $n = 1$ (la *cardioide*) $n = 2$ (la *nefroide*), $n = 3$ y $n = \frac{2}{3}$. [Véase Robson 1, pág. 368.]

6. Al desplazar el origen a la cresta $(b, 0)$, obténgase la ecuación polar

$$r = 2b\,(1 - \cos\theta)$$

que corresponde a la cardioide (8.34 cuando $n = 1$). Deduzcase que las cuerdas que pasan por la cresta son de longitud constante.

7. Una circunferencia de radio b rueda sin deslizarse por el interior de otra circunferencia fija de radio nb, donde $n > 1$. Encuéntrense las ecuaciones paramétricas de la *hipocicloide* (cuando n es entero, la hipocicloide *de n crestas*) que es el lugar geométrico de un punto fijo en la circunferencia que rueda. Trácense los casos $n = 2$ (que es sorprendente), $n = 3$ (la *deltoide*) y $n = 4$ (la *astroide*). Elimínese el parámetro en los dos últimos casos, de manera que se obtenga, para la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \qquad (a = 4b)$$

[Lamb 2, págs. 297–303].

Steiner descubrió que todas las rectas de Simson de un triángulo cualquiera son tangentes a una deltoide. Tres de las rectas, que son las paralelas a los lados del triángulo equilátero de Morley (§ 1.9) son las tangentes "absidales" que comparte la deltoide con la circunferencia de los nueve puntos. Sus puntos de contacto son los vértices del triángulo equilátero XYZ que se describieron en el ejercicio 3 de la página 43. Para consultar los detalles, véase Baker [1, págs. 330–349, sobre todo la pág. 347].

8.4 CONICAS

Además de las rectas, círculos, planos y esferas que conoce cualquier estudiante de Euclides, los griegos sabían las propiedades de las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano: la elipse, la parábola y la hipérbola. Kepler descubrió al analizar sus observaciones astronómicas –y Newton lo demostró matemáticamente sobre la base de la ley universal de la gravitación– que los planetas describen elipses. Así se hizo de la geometría de la Grecia antigua piedra angular de la astronomía moderna.

J. L. Synge (1897–)

[Synge 2, pág. 32]

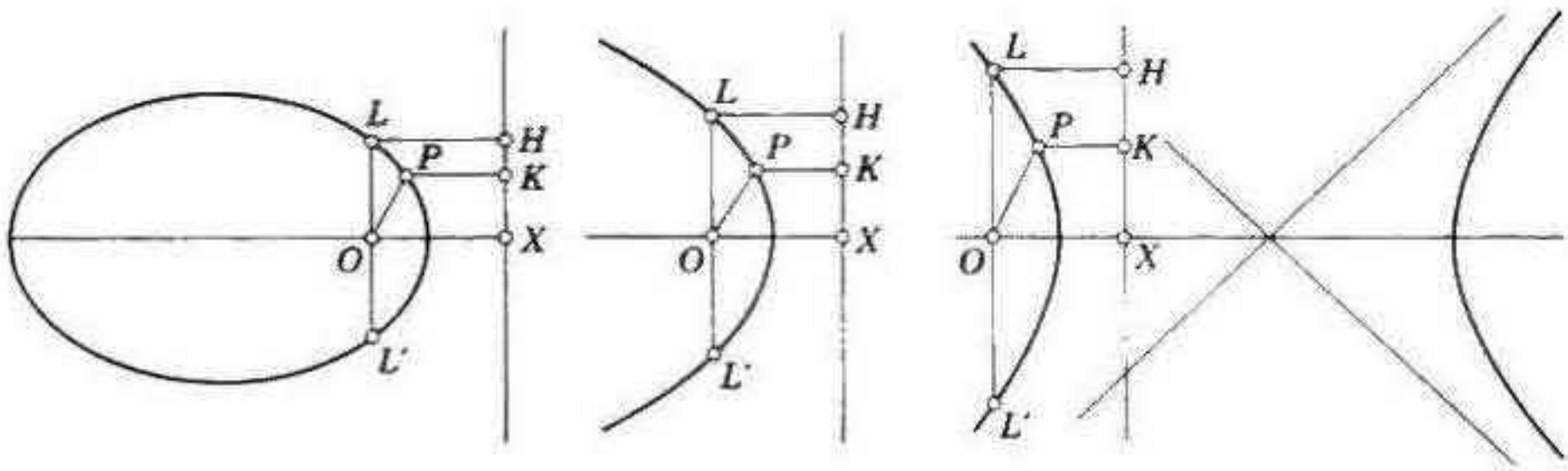


Figura 8.4a

Hay varias maneras distintas de definir una cónica (o "sección cónica"). Una de las más directas es la siguiente (cf. § 6.6): una *cónica* es el lugar geométrico de un punto P cuya distancia OP a un punto fijo O es ε veces su distancia PK a una recta fija HX (figura 8.4*a*), donde ε es una constante positiva.

Otras definiciones de cónica, que propuso Manaecmio hacia 340 a. J. C. fueron reconciliadas con ésta por Papo de Alejandría (siglo cuarto) o tal vez por Euclides [véase Coolidge **1**, págs. 9–13].

La cónica se llama *elipse* cuando $\varepsilon < 1$, *parábola*, cuando $\varepsilon = 1$, *hipérbola*, cuando $\varepsilon > 1$. (los nombres se deben a Apolonio.)

El punto O y la recta HX son un *foco* y la *directriz* correspondiente. El número ε, que se llama *excentricidad*, se suele denotar por e (pero entonces, con el fin de evitar confusiones, se debe añadir "donde e no se ha de tomar como la base de los logaritmos naturales" [Littlewood **1**, pág. 43]). La cuerda LL' que pasa por el foco y es paralela a la directriz se llama *latus rectum*; su longitud queda denotada por $2l$, donde

$$l = OL = \varepsilon LH.$$

En términos de coordenadas polares, donde tomamos la recta inicial OX en posición perpendicular a la directriz, tenemos

$$r = OP = \varepsilon PK = \varepsilon(LH - r\cos\theta)$$

8.41 $$= l - \varepsilon r\cos\theta,$$

de manera que

8.42 $$\frac{l}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta.$$

Como la ecuación no se altera al substituir θ por $-\theta$, la cónica es simétrica por reflexión en la recta inicial. Cuando $\theta = 0$, $r = l/(1+\varepsilon)$; y cuando $\theta = \pi$, $r = l/(1-\varepsilon)$; por lo tanto, la cónica corta la recta inicial dos veces, cuando no se tiene que $\varepsilon = 1$.

Si $\varepsilon < 1$, se tiene por 8.42 que r es finita y positiva para todos los valores de θ; por lo tanto, la elipse es una curva *cerrada* (y oval). Si $\varepsilon = 1$, r sigue siendo finita y positiva, excepto cuando $\theta = \pi$; por lo tanto, la parábola no es cerrada, sino que se extiende al infinito en una dirección. Si $\varepsilon > 1$, r será positiva o negativa según sea $\cos\theta$ mayor o menor que $-1/\varepsilon$; por lo tanto, la hipérbola posee dos ramificaciones separadas, que están dadas por

$$-\alpha < \theta < \alpha, \qquad \alpha < \theta < 2\pi - \alpha,$$

respectivamente, donde $\alpha = \operatorname{arcsec}(-\varepsilon)$.

Al elevar al cuadrado 8.41, obtenemos la ecuación cartesiana

8.43 $$x^2 + y^2 = (l - \varepsilon x)^2$$

(que indica que un círculo puede considerarse como una elipse de excentricidad cero). Si $\varepsilon \neq 1$, podemos dividir por $1 - \varepsilon^2$ y simbolizar $l/(1-\varepsilon^2)$ por a, de manera que obtengamos

$$x^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = la - 2\varepsilon ax$$

ó
$$(x + \varepsilon a)^2 + \frac{a}{l} y^2 = (l + \varepsilon^2 a)a = a^2$$

ó
$$\frac{(x + \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{la} = 1.$$

Al trasladar el origen a $(-\varepsilon a, 0)$, podemos reducir esto a

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde
$$b^2 = |la| = |1 - \varepsilon^2| a^2,$$

de manera que $la = \pm b^2$, donde el signo que se dé dependerá de que $\varepsilon < 1$ ó $\varepsilon > 1$. En el último caso, tenemos por la definición anterior que a resulta negativa, pero podemos invertir el signo sin alterar la ecuación 8.44. Es más importante el hecho de que la ecuación tampoco se altere cuando se cambian los signos de x o de y. Esta invariancia muestra que la elipse y la hipérbola son simétricas por reflexión en uno cualquiera de sus ejes, y, por lo tanto, también por el semigiro alrededor del origen: su grupo de simetría es D_2, si empleamos la notación de § 2.5. Por esta razón, se dice que el origen es el *centro* y que la elipse y la hipérbola son cónicas *centrales*.

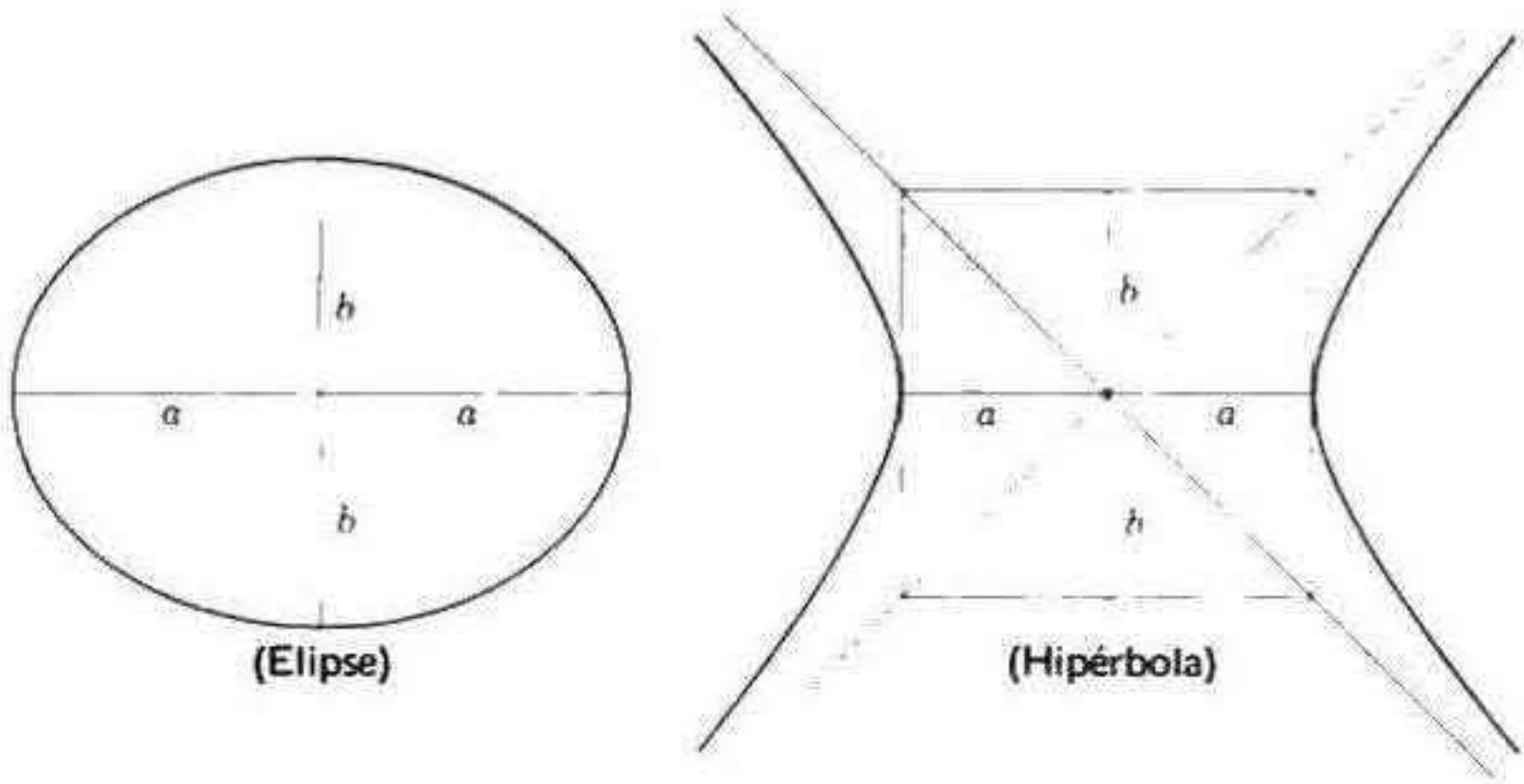


Figura 8.4b

La significación geométrica de a y b ha quedado indicada en la figura 8.4b. En lo que se refiere a la elipse, $2a$ y $2b$ son los ejes *mayor* y *menor*; para la hipérbola, son los ejes *transversal* y *conjugado*. Las dos ramificaciones de la hipérbola

8.441
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

quedan en dos regiones angulares opuestas, que forman las dos rectas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Estas rectas se llaman *asíntotas* de la hipérbola. Cuando $a = b$, son perpendiculares entre sí, y tenemos una hipérbola *rectangular* (o "equilátera").

Si $\epsilon = 1$, 8.43 se reduce a

$$y^2 = 2l\,(\tfrac{1}{2}l - x)$$

o, por reflexión en la recta $x = \frac{1}{4}l$,

8.45 $$y^2 = 2lx.$$

que es la ecuación habitual de la parábola (figura 8.4c).

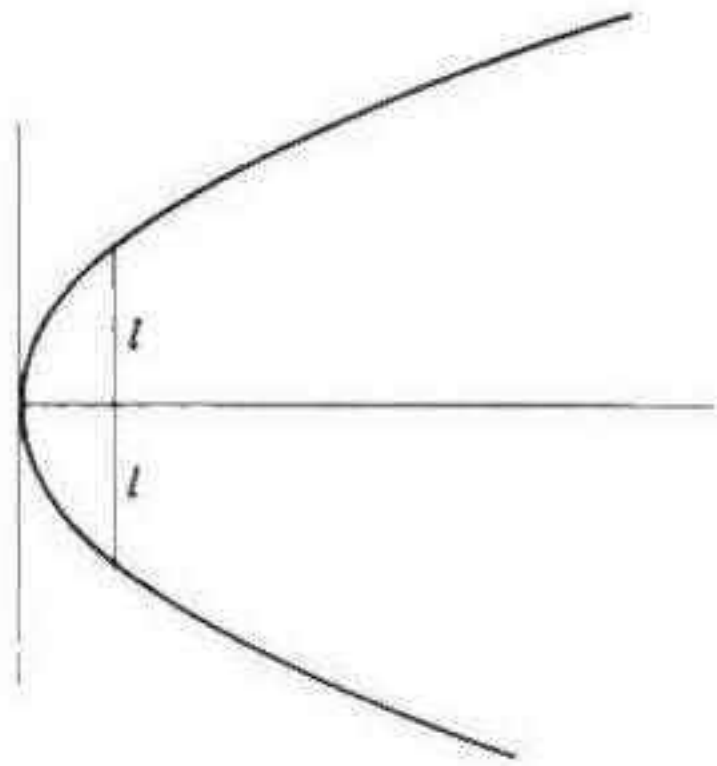


Figura 8.4c

Las ecuaciones paramétricas más convenientes son: para la elipse

8.46 $$x = a\cos t, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\,t,$$

para la parábola

8.47 $$x = 2lt^2, \qquad y = 2lt,$$

y para la hipérbola

8.48 $$x = a\cosh t, \qquad y = b\,\mathrm{senh}\,t,$$

donde

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \mathrm{senh}\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

(Estudiaremos estas funciones en § 8.6.)

EJERCICIOS

1. ¿Qué clase de curva es la que tiene la ecuación polar

$$r = \tfrac{1}{2}\,l\sec^2\tfrac{1}{2}\,\theta?$$

2. ¿Qué clase de curva es la que tiene la ecuación cartesiana

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 = 5?$$

(Véase el ejercicio 5 al final de § 8.2.)

3. La suma (o diferencia) de las distancias de un punto de una elipse (o hipérbola) a los dos focos es constante.

4. Exprésese la excentricidad de una cónica central en términos de sus semiejes a y b. ¿Qué excentricidad tiene una hipérbola rectangular?

5. A partir de puntos B y C, se tiene que el lugar geométrico del vértice A de un triángulo ABC tal que su recta de Euler sea paralela a BC (como en el ejercicio 9 al final de § 1.6) es una elipse cuyo eje menor es BC y cuyo eje mayor es el doble de la altura del triángulo equilátero de lado BC. (*Indicación*: Si A, B, C son (x, y) y $(\pm 1, 0)$, el circuncentro, que equidista de A y C, será $(0, \frac{1}{3}y)$.)

6. Una expresión como

$$F = ax^2 + 2hxy + by^2$$

se llama *forma binaria cuadrática*. Se dice que es *definida* cuando $ab > h^2$, de modo que F tenga el mismo signo en relación con todos los valores de x y y excepto el de $x = y = 0$. Se dice que es definida y *positiva* cuando el signo es positivo. Se dice que es *semidefinida* cuando $ab = h^2$, de modo que F sea el producto de a y un cuadrado perfecto; semidefinida y *positiva* cuando $a > 0$, de manera que la misma F sea un cuadrado perfecto; *indefinida* cuando $ab < h^2$, de manera que F sea positiva en relación con ciertos valores de x y y, y negativa para otros. La ecuación $F = 1$ representa una elipse cuando F es definida y positiva, dos rectas paralelas cuando F es semidefinida y positiva, y una hipérbola cuando F es indefinida.

7. ¿Qué sucede con la ecuación de la hipérbola rectangular cuando se rotan los ejes para recorrer un ángulo de $\frac{1}{4}$?

8. Descríbase una interpretación geométrica del parámetro t de 8.46. [*Indicación*: Compárese $(a \cos t, b \operatorname{sen} t)$ con $(a \cos t, a \operatorname{sen} t)$.]

9. ¿Qué aspecto se toma en cuanto al decir que la hipérbola 8.441 queda representada de manera más satisfactoria por las ecuaciones

$$x = a \sec u, \qquad y = b \tan u$$

que por las ecuaciones 8.48?

10. El círculo $r = l$ invierte la cónica 8.42 en el caracol

$$r = l(1 + \varepsilon \cos \theta).$$

Trácese esta curva sucesivamente con distintos valores de ε. Cuando $\varepsilon = 1$ (de manera que la cónica es una parábola), es una cardioide.

11. El círculo $r = a$ invierte la hipérbola rectangular $r^2 = a^2 \sec 2\theta$ en la lemniscata de Bernoulli

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

(véase el ejercicio 3 al final de § 8.3).

8.5 LAS TANGENTES, LA LONGITUD DE ARCO Y EL AREA

No sé qué apariencia pueda tener yo ante el mundo; pero a mi parecer, no he sido sino un niño que juega en la playa, y se divierte al encontrar de cuando en cuando un guijarro más terso o una concha más bonita que las ordinarias, mientras el gran océano de la verdad quedaba sin ser descubierto frente a mí.

Sir Isaac Newton

(*Brewster's Memoirs of Newton*, vol. 2, capítulo 27)

Nos ocuparemos de curvas "rectificables", tales que entre dos puntos cualquiera P y Q de la curva hay una longitud de arco s bien definida. Por medio de la notación provisional $P_0 = P_1 P_n = Q$ subdividimos el arco dado PQ en $n-1$ puntos y consideramos la menor cota superior

$$s = \sup \left(\sum_{1}^{n} P_{i-1} P_i \right)$$

de las longitudes de las líneas quebradas

$$PP_1 + P_1P_2 + \ldots + P_{n-1}Q,$$

para todas las subdivisiones posibles.

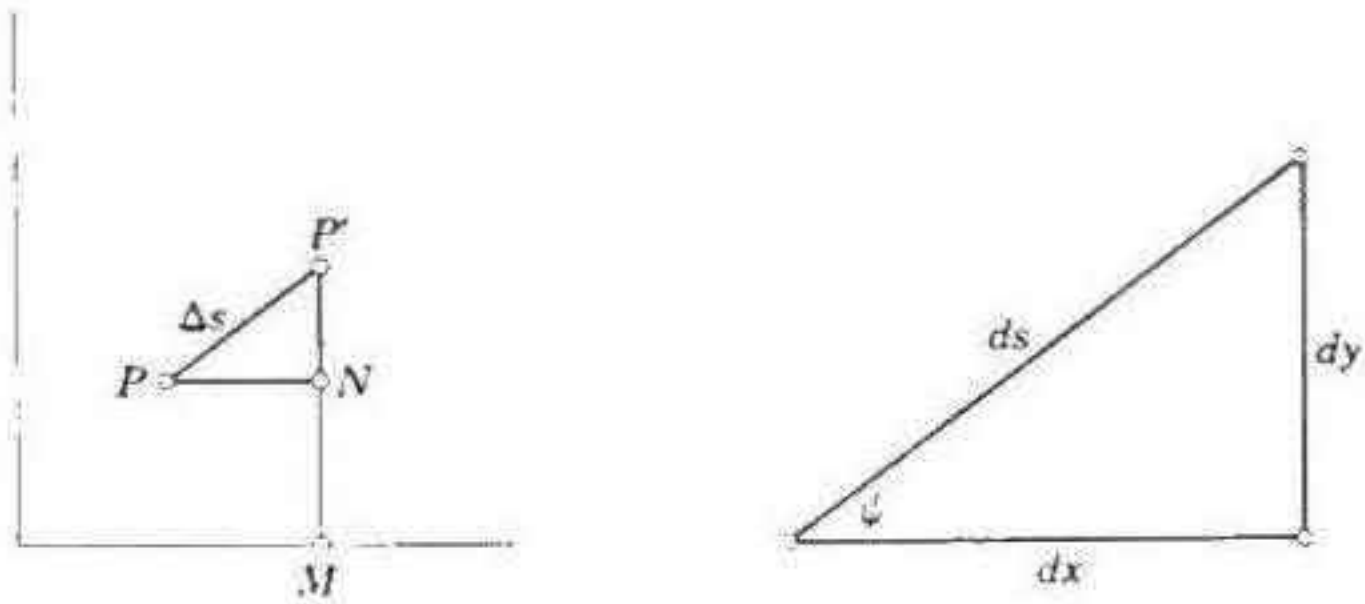


Figura 8.5a

La curva es considerada con frecuencia y de manera útil como el lugar geométrico de un punto "que se mueve". Dos puntos cualquiera P y P' de la curva quedan unidos por medio de una recta que se llama *secante*. Si P está fijo mientras P' se mueve, la secante suele aproximarse a una posición límite que se llama *tangente* en P. Cuando empleamos coordenadas cartesianas rectangulares, trazamos la paralela $P'M$ al eje de las y, como se tiene en la figura 8.5*a*, y denotamos por N el pie de la perpendicular de P a $P'M$. La tangente tiene un *ángulo de pendiente*, ψ, que se puede definir como límite de NPP'. (La figura se puede modificar de manera obvia cuando el ángulo es obtuso o negativo.) Para calcular ψ, observamos el triángulo rectángulo $PP'N$ cuyos lados son los "incrementos" de x, y, s (los cuales tienden a cero):

Así, $$\Delta x = PN, \quad \Delta y = NP', \quad \Delta s = PP'.$$

$$\cos \psi = \lim \frac{PN}{PP'} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds},$$

$$\operatorname{sen} \psi = \lim \frac{NP'}{PP'} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{dy}{ds},$$

$$\tan \psi = \lim \frac{NP'}{PN} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Como $PP'^2 = PN^2 + NP'^2$ (o como $\cos^2 \psi + \operatorname{sen}^2 \psi = 1$), el elemento de la longitud de arco, ds, queda determinado por

8.51 $$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

y la longitud del arco, s, de (x_1, y_1) a (x_2, y_2), o de $t = t_1$ a $t = t_2$, es

$$s = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dt.$$

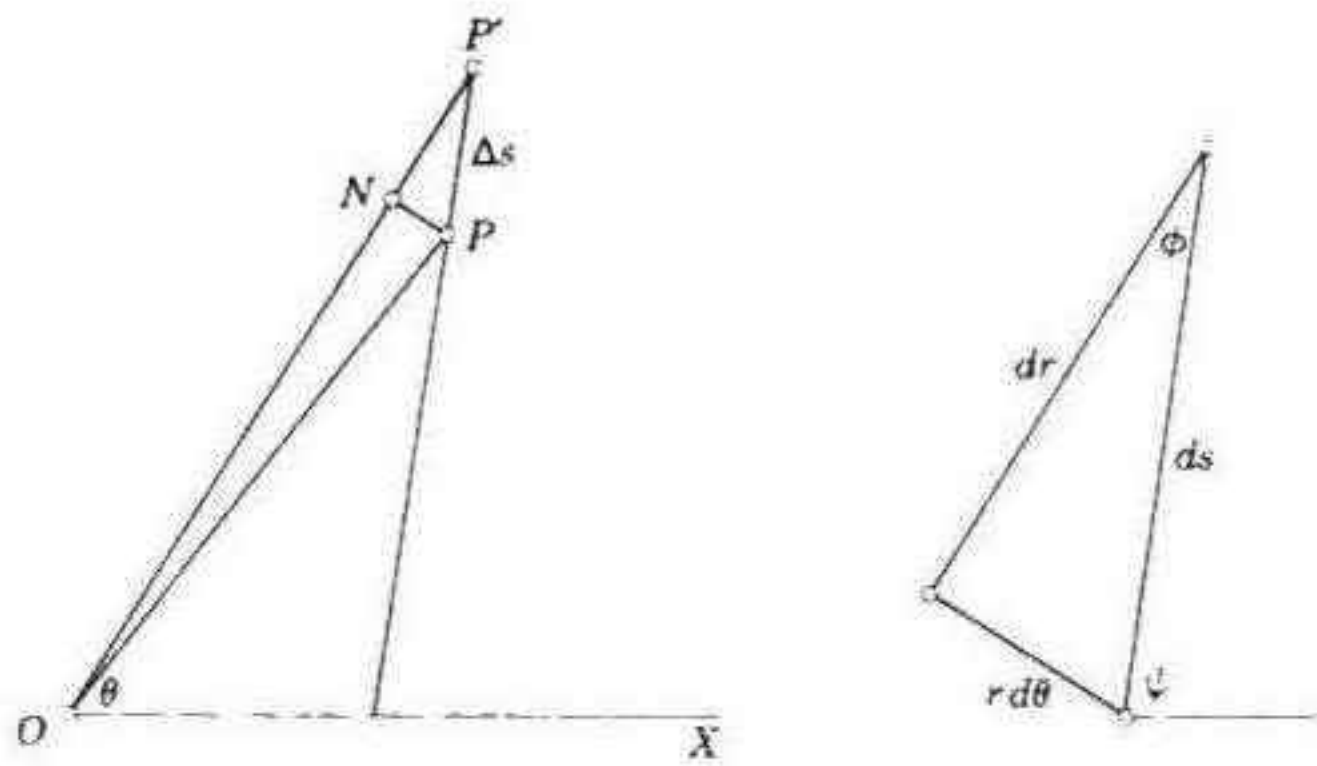


Figura 8.5b

Cuando se da una curva en su ecuación polar, la dirección de la tangente en P queda determinada o bien por medio del ángulo ϕ que la tangente forma con el "radio" OP o (igualmente) por el ángulo

$$\psi = \theta + \phi$$

que forma con la recta inicial OX (figura 8.5*b*). Como antes hicimos, sean P y P' dos puntos de una curva que se aproximan, de modo que la tangente en P será la posición límite de la secante PP'. Trácese la perpendicular PN a OP' [Lamb 2, pág. 254]. Entonces

8.52 $$\cos \phi = \lim \frac{NP'}{PP'} = \lim \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{ds}.$$

$$\operatorname{sen} \phi = \lim \frac{NP}{PP'} = \lim \frac{r\,\Delta\theta}{\Delta s} = r\,\frac{d\theta}{ds}.$$

8.53 $$\tan \phi = \lim \frac{NP}{NP'} = \lim \frac{r\,\Delta\theta}{\Delta r} = r\,\frac{d\theta}{dr}.$$

Como $PP'^2 = NP'^2 + NP^2$ (o como $\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi = 1$), el elemento ds de la longitud de arco quedará determinado ahora por

8.54 $$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2.$$

Como el área del triángulo alargado OPP' difiere por una infinitesimal de segundo orden del de un sector circular de radio r y ángulo $\Delta\theta$, que es $\frac{1}{2}r^2\,\Delta\theta$, el área de una curva cerrada cualquiera que rodee al origen una sola vez será

8.55 $$\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta.$$

Esa fórmula puede ser llevada a términos de coordenadas cartesianas por medio de las relaciones 8.21, que implican

8.56 $$dx = dr\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta, \quad dy = dr\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta\,d\theta,$$

de manera que $x\,dy - y\,dx = r\cos\theta\,dy - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,dx = r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta)\,d\theta = r^2\,d\theta$

y

8.57 $$\tfrac{1}{2}\int r^2\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx).$$

Esto, por supuesto, se ha de interpretar como

8.58 $$\tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt,$$

donde x y y se dan en términos de un parámetro t, y la integración se hace sobre los valores de t que nos llevan alrededor de la curva.

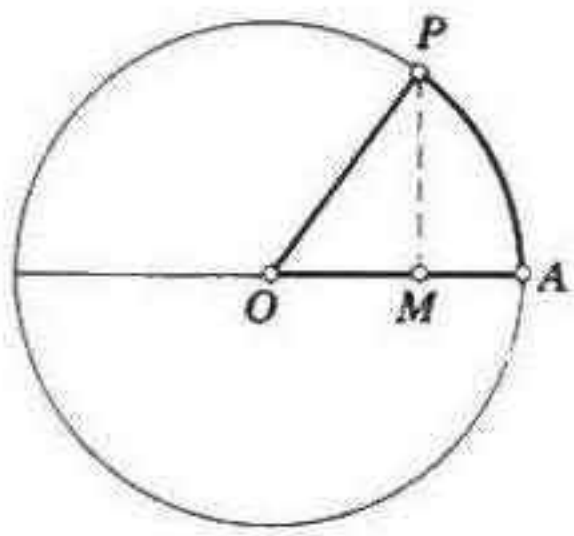


Figura 8.5c

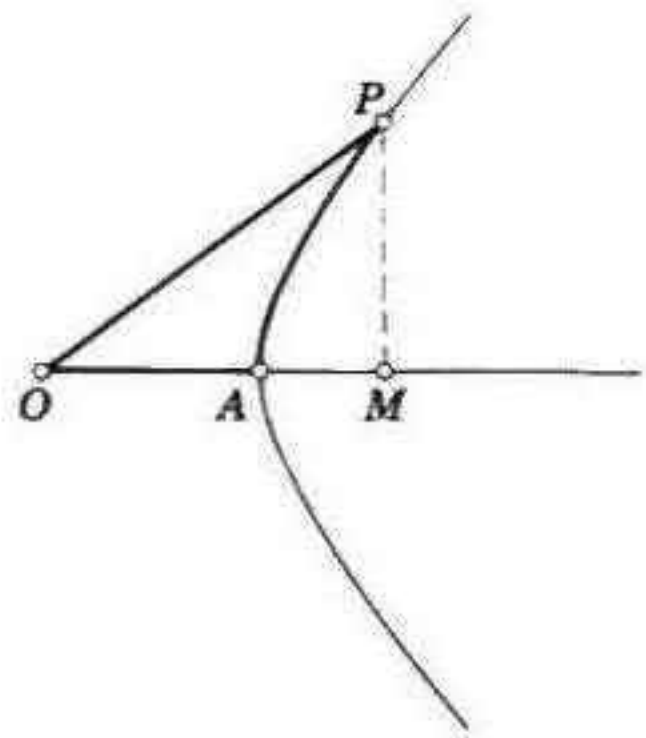


Figura 8.5d

La misma fórmula sirve para calcular el área del "sector" que resulta al unir el origen con un arco determinado (figuras 8.5*c* y *d*). En coordenadas polares, si el arco va de $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$, el área es

$$\tfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta\,.$$

Y al trasladar esto a las coordenadas cartesianas, consideramos que las líneas que limitan el sector constituyen una "curva" cerrada compuesta por el arco y dos radios. Como

$$d\frac{y}{x} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},$$

los radios (a lo largo de los que y/x permanece constante) no agregan sino cero a la integral del lado derecho de 8.57. Por lo tanto, si el arco va de $t = t_1$ a $t = t_2$, el área del sector es

8.59 $$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

[cf. Courant **1**, pág. 273].

EJERCICIOS

1. La recta $x - (t + t')\,y + 2ltt' = 0$ es una secante de la parábola 8.47, tal que la corta en los puntos de parámetros t y t'. Al tomar t' de manera que tienda a t, dedúzcase la ecuación

$$x - 2ty + 2lt^2 = 0$$

de la tangente en el punto de parámetro t, de manera que si (x_1, y_1) está en la parábola 8.45, la tangente en este punto será

$$y_1 y = l(x + x_1).$$

2. La recta

$$\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

es una secante de la elipse 8.46, tal que la corta en los puntos $t = \alpha \pm \beta$. Al tomar β de manera que tienda a 0, dedúzcase la ecuación

$$\frac{x}{a}\cos t + \frac{y}{b}\operatorname{sen} t = 1$$

de la tangente en el punto de parámetro t [Robson **1**, pág. 274]. Obténganse resultados análogos en relación con la hipérbola 8.48. Dedúzcase que si (x_1, y_1) está en la cónica central 8.44, la tangente en este punto será

$$\frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

3. En el punto t de la elipse 8.46, la *normal*, que es perpendicular a la tangente, es

$$\frac{ax}{\cos t} - \frac{by}{\operatorname{sen} t} = a^2 - b^2.$$

Al diferenciar parcialmente con respecto a t y eliminándolo después, obténgase la envoltura de normales de la forma

$$\left(\frac{ax}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

[Forder **3**, págs. 36–37; Lamb **2**, pág. 350]. *Indicación:*

$$\cos^3 t = \frac{ax}{a^2 - b^2},\ \operatorname{sen}^3 t = -\frac{by}{a^2 - b^2}.$$

4. Por medio de 8.56, háganse concordar 8.51 y 8.54.

8.6 FUNCIONES HIPERBOLICAS

El seno y coseno hiperbólicos tienen cierta propiedad con respecto a la hipérbola rectangular, exactamente análoga a la que tienen el seno y coseno con respecto a la circunferencia. Por esta razón se les llama a las primeras funciones hiperbólicas, así como a las segundas, funciones circulares.

E. W. Hobson (1856–1933)

[Hobson 1, págs. 329–330]

Como una aplicación muy sencilla de la fórmula 8.59, considérese la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ ó

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t$$

(figura 8.5*c*). Puesto que

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t = -y \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t = x,$$

el área del sector desde $t = 0$ a otro valor cualquiera es

$$\tfrac{1}{2}\int_0 \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) dt = \tfrac{1}{2}\int_0 (x^2 + y^2)dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0 dt = \tfrac{1}{2}t,$$

lo que, por supuesto, ya sabíamos. Es más interesante lo que sucede cuando la curva es hipérbola rectangular $x^2 - y^2 = 1$ ó

$$x = \cosh t, \qquad y = \operatorname{senh} t,$$

de manera que

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{senh} t = y \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = \cosh t = x,$$

el área del sector es, nuevamente,

$$\tfrac{1}{2}\int_0 \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) dt = \tfrac{1}{2}\int_0 (x^2 - y^2)dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0 dt = \tfrac{1}{2}t.$$

Al comparar los resultados anteriores, vemos con claridad la analogía que relaciona a las funciones circulares y a las hiperbólicas. Tenemos en las figuras 8.5*c* y *d* un sector AOP del círculo o la hipérbola rectangular, respectivamente. En ambos casos, $OA = 1$, y el parámetro t es el doble del área del sector. En el primero, $OM = \cos t$ y $PM = \operatorname{sen} t$. En el segundo, $OM = \cosh t$ y $PM = \operatorname{senh} t$.

EJERCICIOS

1. Encuéntrese el área de la elipse

$$x = a \cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t.$$

2. Encuéntrese el área del sector t de la hipérbola general

$$x = a \cosh t, \qquad y = b \operatorname{senh} t.$$

8.7 LA ESPIRAL EQUIANGULAR

En la espiral equiangular del nautilo *o de la concha de caracol o* globigerina, *las espiras aumentan continuamente de anchura, y lo hacen en una razón continua y constante . . . En consecuencia, los sectores que cortan radios sucesivos a los mismos ángulos vectoriales, son semejantes entre sí en todos los aspectos, y la figura puede ser tal que crezca continuamente sin que por ello cambie de forma.*

Sir D'Arcy W. Thompson (1860–1948)

[Thompson 2, págs. 753–754]

Se puede considerar la circunferencia $r = a$ como el lugar geométrico de la transformación del punto $(a, 0)$ por medio de una *rotación continua*, que transforma cada punto $(r, 0)$ en $(r, \theta + t)$, donde t varía continuamente. De la misma manera, el rayo (o semirecta) $\theta = 0$ es el lugar geométrico de la transformación de $(a, 0)$ mediante una *dilatación continua*, de la que obtiene $(r, 0)$ en relación con todos los valores positivos de r. Al combinar juiciosamente ambas transformaciones, se obtiene una *rotación dilatativa continua*. Denotemos la razón de amplificación que corresponde a la rotación que recorre 1 radián por μ. Entonces μ^2 será la razón de amplificación de 2 radianes, μ^3 de 3 radianes, . . . , μ^π de π radianes, . . . , μ^t de t radianes. Así, la rotación dilatativa transforma el punto general (r, θ) en $(\mu^t r, p + t)$, donde t varía continuamente. El lugar geométrico de la transformación de $(a, 0)$ es la *espiral equiangular* (o "espiral logarítmica"), cuyas ecuaciones paramétricas

$$r = \mu^t a, \qquad \theta = t$$

se pueden combinar en una sola ecuación polar:

8.71 $$r = a\mu^\theta.$$

Descartes fue el primero que reconoció esta curva, y la estudia en sus cartas de 1683 a Mersenne. Jacob Bernoulli (1654–1705) la encontró tan fascinante que dió instrucciones para que la grabaran en la lápida de su tumba (en el Münster en Basel, Suiza), con la inscripción

Eadem mutata resurgo.

Estas palabras (que E. T. Bell traduce como "Aunque cambiada, surgiré igual") expresan una consecuencia notable de la manera en la que la curva se puede desplazar sobre sí misma mediante una rotación dilatativa: cualquiera dilatación tiene sobre ella el mismo efecto que una rotación, y viceversa. De hecho, la rotacion $\theta \to \theta + \alpha$, que transforma

$r = a\mu^\theta$ en $a\mu^{\theta+\alpha} = \mu^\alpha r$, equivale a la dilatación $O(\mu^\alpha)$. Steinhaus [1, pág. 97] describe esta propiedad como una ilusión de óptica. Después de trazar una espiral equiangular (figura 8.7*a*), comenta: "Si le damos vuelta (en nuestro caso, con todo el libro), da la impresión de hacerse más grande o más pequeña."

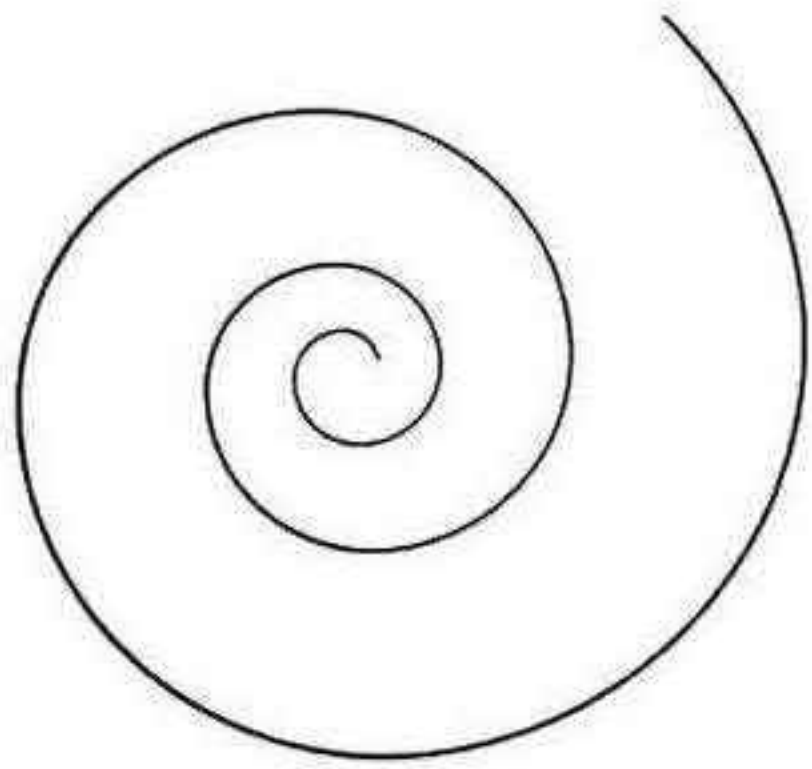


Figura 8.7a

Puesto que

$$\frac{dr}{d\theta} = r \log \mu,$$

8.53 nos señala que el ángulo ϕ, que forman el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ y la tangente en P está dado por

$$\cot \phi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \log \mu,$$

es decir, el ángulo es *constante*: este resultado podríamos haberlo previsto a partir de que las semejanzas preservan los ángulos. En términos de este ángulo constante ϕ, que en la figura 8.7*a* es de unos 80°, podemos escribir

$$\mu^\theta = e^{\theta \log \mu} = e^{\theta \cot \phi},$$

para así expresar la espiral en la forma clásica

8.72 $$r = ae^{\theta \cot \phi}$$

Por 8.52,

$$\frac{dr}{ds} = \cos \phi,$$

de manera que $r - s \cos \phi$ es constante. Esto nos indica que la longitud del arco de $r = r_1$ a $r = r_2$ es

$$(r_2 - r_1) \sec \phi,$$

y que la longitud del origen ($r = 0$) al punto general (aunque interviene una infinidad de giros) es

$$r \sec \phi.$$

EJERCICIOS

1. La espiral $r = a\mu^{\theta}$ es homotética consigo misma por medio de la dilatación $O(\mu^{2\pi})$. ¿Cómo la afecta la inversión en el círculo $r = a$?

2. Trácese la inversa de una espiral equiangular con respecto a un círculo cuyo centro esté en

(i) la misma espiral,

(ii) la imagen de la espiral que resulta del semigiro alrededor de su polo.

(Las inversas de las espirales equiangulares se llaman *loxodromios*.)

8.8 TRES DIMENSIONES

Kästner, el Analista, creía que la aplicación del álgebra a la geometría liberaría al estudiante de la estricta disciplina de Euclides. Lo capacitaría para pensar por su propia cuenta en lugar de limitarse a observar los labios de su maestro. Se podría poner como inscripción encima de la puerta de cualquier escuela moderna una de sus frases: "No conocemos satisfacción mayor que la de descubrir la verdad por nosotros mismos."

J. L. Synge [2, pág. 174]

Para colocar un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio nos servimos de tres *planos axiales*, que se intersectan por pares en tres ejes OX, OY, OZ. Al empezar por el origen O, llegamos al punto general (x, y, z) al recorrer una distancia x a lo largo del eje de las x OX, a continuación una distancia y a lo largo de la dirección del eje de las y OY y, por último, una distancia z a lo largo de la dirección del eje de las z OZ. Las ecuaciones de los tres planos axiales son $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, que se pueden tomar por pares para determinar los ejes. Por ejemplo, el eje z, que está compuesto por todos los puntos $(0, 0, z)$ tiene las dos ecuaciones $x = y = 0$. Una recta cualquiera que pase por el origen $(0, 0, 0)$ tiene las ecuaciones paramétricas

8.81 $$x = Xt, \qquad y = Yt, \qquad z = Zt.$$

Las razones mutuas de los coeficientes X, Y, Z determinan su dirección. Por medio de la traslación a un nuevo origen, vemos que la paralela que pasa por (x_1, y_1, z_1) es

8.82 $$x = x_1 + Xt, \qquad y = y_1 + Yt, \qquad z = z_1 + Zt.$$

Al eliminar a t, obtenemos las dos ecuaciones

8.83 $$\frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z},$$

que tendrán que ser interpretadas por una convención especial cuando $XYZ = 0$. El centroide de las masas t_1 en (x_1, y_1, z_1) y t_2 en (x_2, y_2, z_2), donde $t_1 + t_2 = 1$, es

$$(t_1x_1 + t_2x_2, \quad t_1y_1 + t_2y_2, \quad t_1z_1 + t_2z_2).$$

El origen y (x_1, y_1, z_1) son los vértices opuestos del *paralelepípedo* que forman los tres pares de planos paralelos

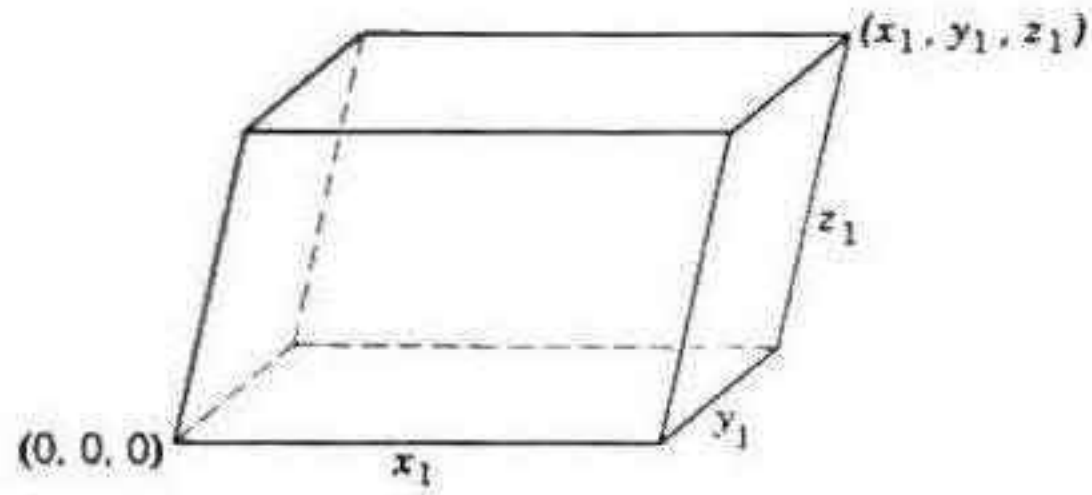


Figura 8.8a

$$x = 0,\ x = x_1; \qquad y = 0,\ y = y_1; \qquad z = 0,\ z = z_1;$$

como se tiene en la figura 8.8*a*. (En la palabra de trabalenguas "paralelepípedo" el acento original va sobre la sílaba "ep", que pertenece al prefijo griego *epi*, también presente en palabras como "epíteto" y "epicicloide".) Tomaremos los ejes ortogonales entre sí durante el resto de esta sección, de manera que aquí tendremos un paralelepípedo rectangular (o "caja"). La extensión tridimensional del teorema de Pitágoras nos señala que la longitud de la diagonal

$$(0, 0, 0) \quad (x_1, y_1, z_1)$$

es la raíz cuadrada de $x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$. De la misma manera, la distancia entre (x, y, z) y (x', y', z') es la raíz cuadrada de

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Si ajustamos el parámetro de 8.81 de manera que

8.84 $$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

tendremos que mide la distancia del origen al punto general (x, y, z) que está en la recta. Los coeficientes X, Y, Z, que cumplen 8.84, se llaman *cosenos directores* de la recta, debido a que son los cosenos de los ángulos que la recta forma con los ejes de coordenadas. Con más precisión, diremos que son los cosenos directores de uno de los dos rayos en los que la recta queda descompuesta por el origen; los cosenos directores del rayo opuesto son $-X$, $-Y$, $-Z$. Dos rayos que forman un ángulo cortan a la esfera unitaria

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

en dos puntos, que son, digamos, (X, Y, Z), (X', Y', Z'), cuyas coordenadas son iguales a los cosenos directores de los rayos. Al "resolver" el triángulo isósceles que forman los puntos con respecto al origen, obtenemos la expresión

$$XX' + YY' + ZZ'$$

para el coseno del ángulo que está entre los rayos. En particular, los rayos (y, por lo tanto, también las rectas) forman ángulos rectos si

$$XX' + YY' + ZZ' = 0.$$

En consecuencia, tenemos que el plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta 8.81 es

$$Xx + Yy + Zz = 0.$$

Por medio de una traslación, deducimos el plano paralelo que pasa por (x_1, y_1, z_1):

8.85 $$Xx + Yy + Zz = T,$$

donde $T = Xx_1 + Yy_1 + Zz_1$. Sin dejar de suponer que

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1,$$

deducimos que los dos ángulos suplementarios que forman los planos

$$Xx + Yy + Zz = T, \quad X'x + Y'y + Z'z = T'$$

son los ángulos de cosenos

$$\pm(XX' + YY' + ZZ').$$

Vemos ahora que todo plano tiene una ecuación lineal, y que cada ecuación lineal determina un plano. En particular, el plano que interseca a los ejes en p, q, r es

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

Dos planos de la forma 8.85 son paralelos cuando solamente difieren en sus términos "constantes" T. La recta de intersección de dos planos no paralelos se puede reducir a la forma habitual 8.83 al eliminar en primer lugar z y en seguida x.

Una ecuación que relaciona a x, y, z (no necesariamente lineal) suele representar una *superficie*; dos ecuaciones así representan una curva, es decir, la intersección de dos superficies. En particular, una ecuación como

$$F(x, y) = 0,$$

en la que solamente intervienen x y y representa un *cilindro*, el lugar geométrico de una recta que pasa por un punto variable de la curva $F(x, y) = z = 0$ mientras permanece paralelo al eje de las z. Una ecuación *homogénea* como

$$f(x, y, z) = 0$$

(cuyo lado izquierdo simplemente se multiplica por una potencia de μ cuando x, y, z se han reemplazado por μx, μy, μz) representa un *cono* el

lugar geométrico de una recta que une el origen y un punto variable en la curva

$$f(x, y, 1) = 0, \quad z = 1.$$

Tenemos casos importantes cuando tratamos de los cilindros cuádricos

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad y^2 = 2lx,$$

que incluyen al *cilindro de revolución* ordinario (o "cilindro circular recto") $x^2 + y^2 = k^2$, y los conos cuádricos

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

que incluyen al *cono de revolución* (o "cono circular recto") $x^2 + y^2 = cz^2$.

La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, que solamente cumple $(0, 0, 0)$ puede considerarse o bien como un cono peculiar o como una esfera de radio igual a cero. La esfera general, con centro en (x', y', z') y radio de k, es, por supuesto,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = k^2.$$

Señalemos que esta es una ecuación de segundo grado en la que los coeficientes de x^2, y^2, z^2 han de ser todos iguales entre sí sin que se tengan términos en yz, zx, xy.

La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$, con centro en el origen, invierte el punto (X, Y, Z) en

$$\left(\frac{k^2X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \frac{k^2Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \frac{k^2Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}\right).$$

El plano que pasa por este punto inverso y es perpendicular a la recta 8.81, a saber,

$$Xx + Yy + Zz = k^2,$$

se llama *plano polar* de (X, Y, Z) con respecto a la esfera. Si (X, Y, Z) está en la esfera, el plano polar es simplemente el plano tangente.

Las superficies tridimensionales análogas a las cónicas son las superficies cuádricas o *cuádricas*, cuyas secciones planas son cónicas (u ocasionalmente pares de rectas), que pueden considerarse como casos degenerados de cónicas). Estas superficies, cuyas ecuaciones son de segundo grado, incluyen no solamente los cilindros elíptico e hiperbólico, el cono cuádrico y la esfera, sino también el *elipsoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

el *hiperboloide de una hoja*

8.86 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

[R. J. T. Bell **1**, pág. 149, fig. 41], el *hiperboloide de dos hojas*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

[Salmon **2**, pág. 80, fig. 1–4], el *paraboloide elíptico*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

y el *paraboloide hiperbólico*

8.861 $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

[R. J. T. Bell **1**, pág. 150, fig. 42]. Se puede discernir a grandes rasgos la naturaleza de estas superficies al considerar sus secciones con planos paralelos a los planos coordenados. G. Monge inventó los nombres en 1805 [véase Blaschke **1**, pág. 131].

Tenemos casos especiales de importancia con las cuádricas de *revolución*, que se forman al girar una cónica alrededor de uno de sus ejes. Por ejemplo, el elipsoide especial que se obtiene al hacer girar una elipse alrededor de sus ejes mayor o menor es un *esferoide prolato* o un *esferoide oblato*, respectivamente.

Al investigar las superficies de revolución suele ser conveniente el empleo de las *coordenadas cilíndricas* (r, θ, z) en las que las dos primeras de las tres coordenadas cartesianas se reemplazan por coordenadas polares

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x},$$

mientras z conserva su significado habitual. Para que una curva plana

$$F(x, z) = 0, \qquad y = 0$$

efectúe una revolución alrededor del eje de las z, simplemente reemplazamos x por r; así, la superficie de revolución es

$$F(r, z) = 0,$$

o, en coordenadas cartesianas, $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

Por ejemplo, cuando hacemos girar la hipérbola 8.441 alrededor de su eje conjugado, obtenemos el hiperboloide de revolución (de una hoja)

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Al reemplazar $x^2 + y^2$ por $(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2 + (y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)^2$, podemos expresar la ecuación en la forma

$$(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2 - (az/b)^2 = -(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)^2 + a^2$$

que indica que, para cada valor de α, todo punto de la recta

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = az/b, \quad y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha = a$$

está en el hiperboloide. Si tomamos α tal que varíe de 0 a 2π, obtenemos un

sistema continuo de *generadores*: rectas que descansen por completo en la superficie. Si reflejamos en el plano (x, y) por medio de la inversión del signo de z, obtenemos un segundo sistema de generadores en el mismo hiperboloide. El plano

8.87 $$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = az/b,$$

que pasa por el centro, toca el *cono asintótico*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$$

a lo largo de la recta

$$\frac{x}{a \cos \alpha} = \frac{y}{a \operatorname{sen} \alpha} = \frac{z}{b},$$

y encuentra al hiperboloide en dos rectas paralelas entre sí: cada una en uno de los planos $y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha = \pm a$.

Otra superficie de revolución interesante es el *toro*, con forma de anillo,

$$(r - a)^2 + z^2 = b^2 \qquad (a > b),$$

que se obtiene cuando se hace girar un círculo de radio b alrededor de una recta exterior de su plano, cuya distancia al centro es a. Esta superficie contiene, evidentemente, dos sistemas de círculos: los "meridianos", de radio b, y los "paralelos" (ubicados en planos paralelos a $z = 0$), cuyos radios varían entre $a - b$ y $a + b$. Es menos obvio observar que el toro contiene también dos sistemas "oblicuos" de círculos de radio a, tales que dos círculos de sistemas opuestos se intersectan o tocan dos veces mientras dos círculos distintos del mismo sistema no se encuentran, sino se entrelazan.* De hecho, al expresar la ecuación

8.88 $$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$$

en la forma

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + b^2)^2 + 4(a^2 - b^2)z^2 = 4b^2(x^2 + y^2)$$
$$= 4b^2 \{ (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2 + (y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)^2 \}$$

ó

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + b^2)^2 - 4b^2(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)^2$$
$$= 4b^2(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2 - 4(a^2 - b^2)z^2,$$

vemos que, para cada valor de α, el toro contiene la sección entera de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + b^2 = 2b(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)$$

* Dibujos del toro, en los que se muestran los cuatro sistemas de círculos, se pueden encontrar en Hermann Schmidt, *Die Inversion und ihre Anwendungen* (Oldenbourg, Munich, 1950), pág. 82. (La "elevación" no está tan bien dibujada como el "plan".) Véase también Martin Gardner, *Scientific American*, 203 (1960), págs. 194, 196. Estos círculos fueron descubiertos por Yvon Villarceau, *Nouvelles Annales de Mathematiques* (1), 7 (1848), págs. 345-347.

por medio del plano

8.89 $$b(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) = \sqrt{a^2 - b^2}\, z.$$

Puesto que podemos expresar la esfera como

$$(x + b \operatorname{sen} \alpha)^2 + (y - b \cos \alpha)^2 + z^2 = a^2$$

y el plano pasa por su centro $(-b \operatorname{sen} \alpha, b \cos \alpha, 0)$, la sección es un círculo mayor, de radio a. Si tomamos α tal que varíe de 0 a 2π, obtenemos un sistema continuo de esos círculos, y un segundo sistema al invertir el signo de z.

El plano 8.89 corta al toro en dos círculos, uno de cada sistema (tenemos que α es reemplazada por $\alpha + \pi$ en el segundo sistema). Como los dos círculos son secciones de las dos esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + b^2 = \pm 2b(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha),$$

sus puntos de intersección son los dos puntos "antípodas"

$$\left(\pm \frac{a^2 - b^2}{a} \cos \alpha, \ \pm \frac{a^2 - b^2}{a} \operatorname{sen} \alpha, \ \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - b^2} \right)$$

(donde concuerdan los signos). Puesto que cada uno de éstos es un punto de contacto, 8.89 es un plano *bitangente* [R. J. T. Bell **1**, pág. 267].

Al comparar 8.89 con 8.87, observamos que los círculos del toro están en los mismos planos (que pasan por el centro) que los pares de generadores paralelos del hiperboloide de revolución

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

(Este comentario se debe a A. W. Tucker.)

EJERCICIOS

1. El plano que pasa por tres puntos dados (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3)$ es

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si el requisito de que pase por un punto se reemplaza (en uno o dos casos) por el requisito de que sea paralelo a una recta cuyos números de dirección serán X_i, Y_i, Z_i, la fila correspondiente del determinante será reemplazada por

$$X_i \quad Y_i \quad Z_i \quad 0.$$

2. En términos de coordenadas cartesianas generales, el punto (x, y, z) se transformará en

$(-x, -y, -z)$	por la inversión central $O(-1)$,	
$(\mu x, \mu y, \mu z)$	por la dilatación $O(\mu)$	(§ 7.6)
$(x, y, z + c)$	por una traslación a lo largo del eje de las z.	

3. En términos de coordenadas cartesianas rectangulares, el punto (x, y, z) se transformará en

$(x, y, -z)$ por reflexión en el plano $(x = y)$,
(y, x, z) por reflexión en el plano $x = y$,
$(-y, x, z)$ por un semigiro alrededor del eje de las z,
$(x, -y, z+c)$ por una reflexión en deslizamiento (§ 7.41).

4. En términos de coordenadas cilíndricas, el punto (r, θ, z) se transformará en

$(r, \theta + \alpha, z + c)$ por una torcedura
$(\mu r, \theta + \alpha, \mu z)$ por la rotación dilatativa general (§ 7.6).

5. Obténgase la condición

$$2uu' + 2vv' + 2ww' = d + d'$$

con respecto a dos esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$$

de manera que sean ortogonales.

6. Si (X, Y, Z) está fuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$, su plano polar contiene los puntos de contacto de todos los planos tangentes que pasan por (X, Y, Z).

7. Al expresar 8.86 en la forma

$$\left(\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\operatorname{sen}\alpha\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\cos\alpha - \frac{x}{a}\operatorname{sen}\alpha\right)^2 = 1 + \left(\frac{z}{c}\right)^2,$$

encuéntrense los sistemas de generadores del hiperboloide general de una hoja. Dos generadores de sistemas opuestos se suelen intersecar (o son paralelos ocasionalmente), pero dos generadores distintos del mismo sistema se cruzan sin cortarse. Esta observación se aplica también a los dos sistemas de generadores del paraboloide hiperbólico 8.861.

9

Números complejos

La extensión del plano euclidiano al plano inversivo (§ 6.4) o al plano elíptico (§ 6.9) es la contrapartida geométrica de un procedimiento familiar en el álgebra: la extensión del concepto de número. Si empezamos con los números naturales, como el 1 y el 2, pasaremos a los enteros, después a los números racionales, a continuación a los reales, y en seguida a los complejos (y si dispusiéramos de suficiente tiempo, podríamos continuar con los números hipercomplejos*). El motivo de cada paso es nuestro deseo de capacitarnos para resolver cierto tipo de ecuaciones. Los antiguos griegos comprendían con certeza notable los números reales. Los números complejos fueron empleados con libertad por R. Bombelli (en su *Algebra*, Boloña, 1572), y sobre todo por Euler, muchos años antes de que se pudiera tratarlos de manera rigurosa; de allí recibió su significado técnico la palabra "imaginario". Para colocar "la raíz cuadrada de menos uno" en una base sólida es conveniente (aunque no esencial) emplear una representación geométrica. Esa interpretación la sugirió J. Wallis (1685), recibió su formulación completa de C. Wessel (1797), fue vuelta a descubrir por Argand (1806), y redescubierta una vez más por Gauss.†

El estudio que haremos aquí del número no intenta constituir un desarrollo formal, sino insistir sobre todo en el papel de la geometría en las reglas que intervienen. Un tratamiento más completo se puede encontrar en Robinson [1, págs. 73–84].

* Véase, por ejemplo, Coxeter, Quaternions and Reflections, *American Mathematical Monthly*, 53 (1946), págs. 136–146.

† Véase el excelente artículo acerca de los números complejos de C. C. MacDuffee en la *Encyclopaedia Britannica* (Edición de Chicago).

9.1 LOS NUMEROS RACIONALES

"El mar del norte es bello," dijo el Orco, "y bello es el delicado laberinto del copo de nieve antes de que se derrita y deje de ser, pero esas bellezas no son nada para el que se deleita en los números, que desprecian tanto la salvaje irracionalidad de la vida como la desconcertante complejidad de las leyes naturales."

J. L. Synge [2, pág. 101]

Los primeros números que consideramos al estudiar aritmética son los números *naturales*, que constituyen una sucesión que empieza por 1 y nunca termina. El problema de resolver una ecuación como

$$x + 2 = 1$$

es el motivo de que se descubran los *enteros*, que no solamente incluyen los números naturales (o "enteros positivos") sino también cero y los enteros negativos. La sucesión de enteros

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

que no tiene principio ni final, se representa de manera conveniente por medio de puntos ubicados a distancias iguales a lo largo de una recta infinita, que podemos concebir como el eje de las x de la geometría analítica ordinaria. En esta representación, la adición y la substracción aparecen como *traslaciones*: la transformación $x \to x + a$ desplaza cada punto para colocarlo a una distancia a espacios a la derecha cuando a es positivo y de $-a$ espacios a la izquierda cuando a es negativo; dicho de otro modo, la operación de sumar a es la traslación que transforma 0 en a.

El problema de resolver una ecuación como

$$2x = 1$$

constituye el motivo del descubrimiento de los números *racionales* $\mu = a/b$, donde a es un entero y b es un entero positivo; quedan incluídos aquí no solamente los enteros $a = a/1$, sino también las fracciones como $1/2$ (o $\frac{1}{2}$) y $-4/3$. Los números racionales no se pueden escribir sucesivamente en su

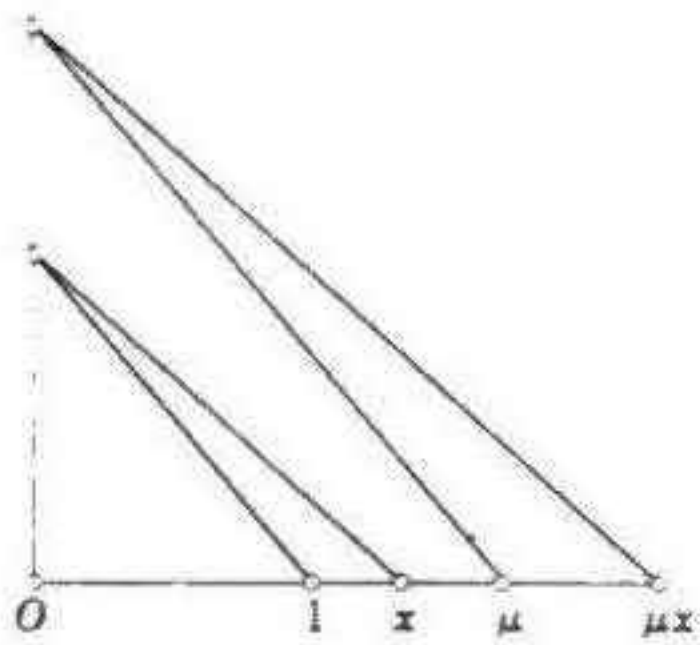


Figura 9.1a

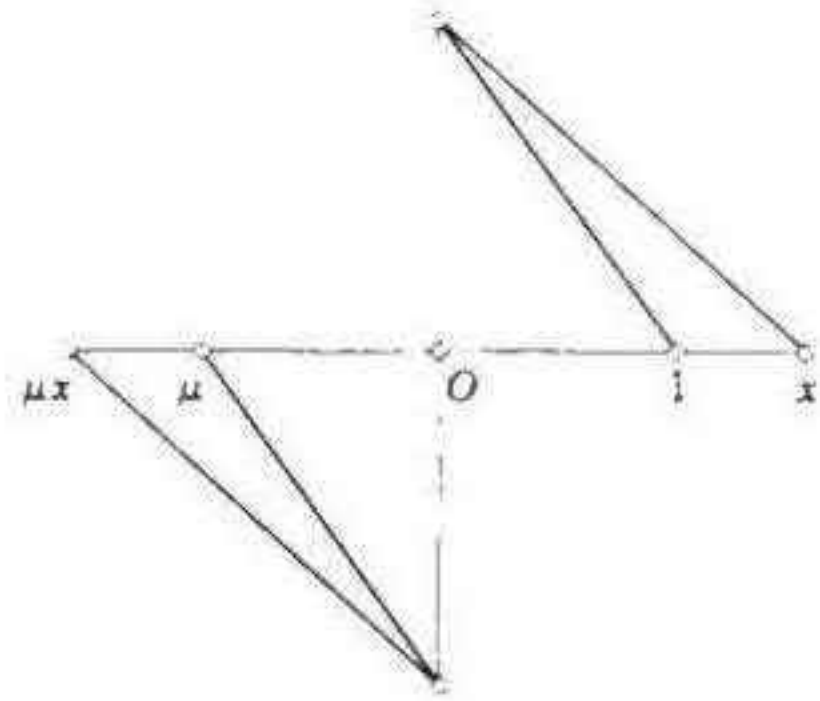


Figura 9.1b

orden natural, debido a que siempre hay entre dos cualquiera otro más, y, en consecuencia, una infinidad de otros racionales; por ejemplo, entre a/b y c/d encontramos $(a+c)/(b+d)$. Los puntos correspondientes son densos sobre el eje de las x, y parece, a primera vista, que lo llenan por completo. La multiplicación y la división aparecen como *dilataciones*: la transformación $x \to \mu x$ es la dilatación $O(\mu)$, donde O es el origen (que representa cero); dicho de otro modo, la multiplicación por μ es la dilatación de centro O que transforma 1 en μ. Por supuesto, μ puede ser tanto positivo (figura 9.1*a*) como negativo (figura 9.1*b*). En particular, la multiplicación por -1 es el semigiro alrededor de O. (Se une el punto 1 con un punto arbitrario en el eje de las y)

Podemos derivar el número racional a/b del entero a al aplicarle la dilatación $O(1/b)$, que transforma b en 1. (La figura 9.1*c* ejemplifica la derivación de los números racionales $3/2$ y $-1/2$.) En esta construcción se ve con claridad por qué no podemos permitir que el denominador sea cero. No habría ningún problema para considerar a b negativo, pero identificamos naturalmente $a/(-b)$ con $-a/b$. Al proseguir con el mismo espíritu, escribiremos por lo general una fracción en sus "menores términos", de manera que el numerador y el denominador no tengan factores comunes.

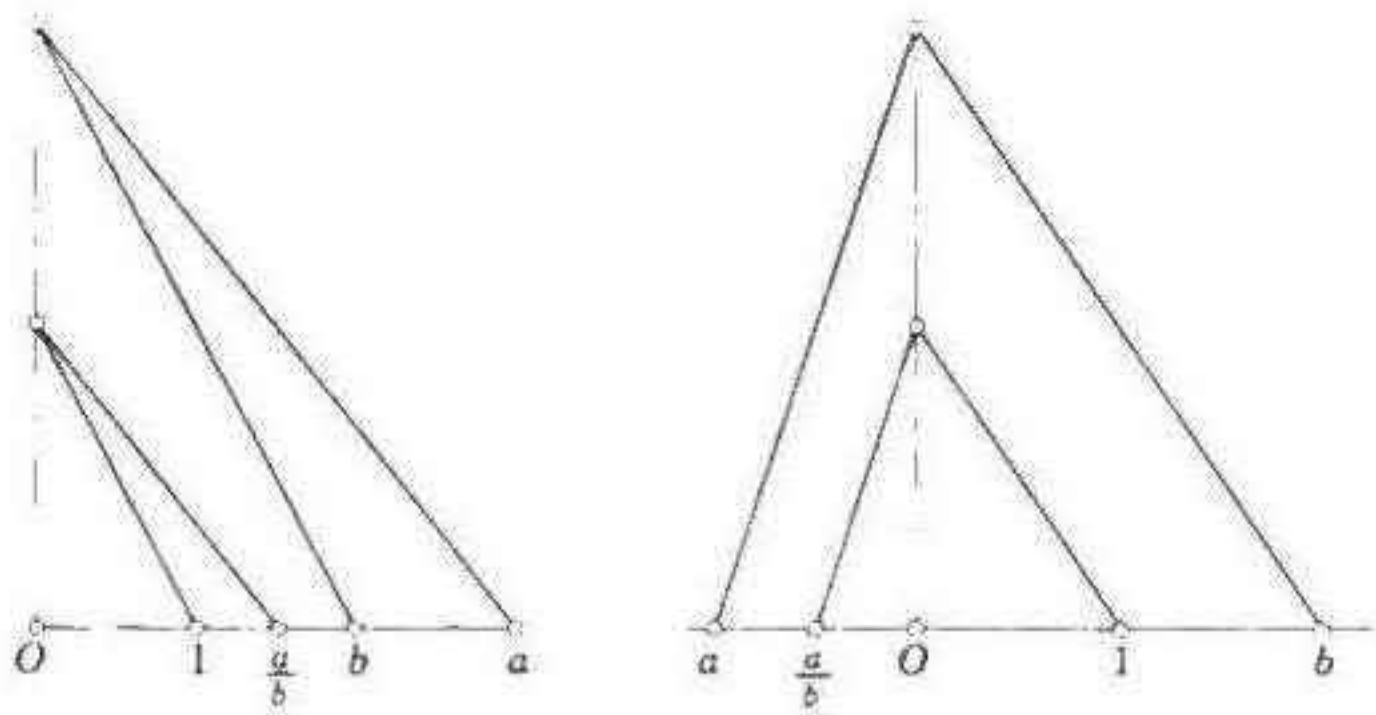


Figura 9.1c

EJERCICIO

Empléese el método de la figura 9.1c para construir $\frac{1}{3}$.

9.2 LOS NUMEROS REALES

"¿Qué fue eso?" preguntó Alicia. "Para empezar, Tambaleer y Escritorcer, por supuesto," replicó la Tortuga Falsa, "y a continuación las diferentes ramas de la aritmética: Ambición, Distracción, Horriplicación y Delusión."

Lewis Carroll

[Dodgson 1, Capítulo 9]

Del problema de resolver una ecuación como

$$x^2 = 2$$

proviene el descubrimiento de los números *reales*, que no solamente incluyen a los números racionales, sino a los irracionales también (como $\sqrt{2}$ y π), que no se pueden expresar como fracciones. (De hecho, π ni siquiera se puede expresar como raíz de una ecuación algebraica.) La demostración de Pitágoras de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ ha sido considerada por Hardy [2, págs. 32–36] como una de las más antiguas instancias de matemáticas de primera clase, "con la misma frescura y significación hoy en día que en el tiempo de su descubrimiento". Si seguimos el tratamiento de Cantor [Robinson 1, pág. 79], se define un número real como el límite de una sucesión convergente de números racionales, o (con más precisión) como el conjunto de todas las secuencias "equivalentes" (en un sentido concreto y especificado) a una secuencia dada; por ejemplo, el número real π es el límite de la secuencia

$$3, \quad 3.1, \quad 3.14, \quad 3.141, \quad 3.1415, \quad \ldots.$$

o de la secuencia "equivalente"

$$4, \quad 3.2, \quad 3.15, \quad 3.142, \quad 3.1416, \quad \ldots.$$

El punto correspondiente en el eje de las x se define como el límite de una sucesión convergente de puntos "racionales".

Los números reales se pueden subdividir aún en números *algebraicos* (como $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$), que se pueden expresar como raíces de ecuaciones

9.21 $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

donde los coeficientes son enteros, y números *trascendentes* (como π y e) que no se pueden expresar así. Entre los números algebraicos, es en ocasiones deseable distinguir los números *cuadráticos*, como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{(2-\sqrt{2})}$, que se pueden construir con el compás.

9.3 EL DIAGRAMA DE ARGAND

No hace mucho que conocí a un hombre que, según me dijo, a tal grado no creía en la raíz cuadrada de menos uno, que ni siquiera creía en menos uno. Por lo menos, su actitud era consecuente.
Es claro que mucha gente a la que $\sqrt{2}$ le parece algo perfectamente obvio se resiste ante $\sqrt{(-1)}$. Esto se debe a que creen poder visualizar la primera como algo que se presenta físicamente en el espacio, mientras con la segunda, según piensan, es imposible. De hecho, $\sqrt{(-1)}$ constituye un concepto mucho más sencillo.

E. C. Titchmarsh [1, pág. 99]

El problema de resolver una ecuación como

9.31 $$x^2 + 1 = 0.$$

es el motivo de que se hayan descubierto los números *complejos* (que deben su nombre a Gauss), que no solamente incluyen los números reales, sino también números "imaginarios" como la raíz cuadrada de -1. Como los números reales llenan todo el eje de las x, es natural intentar la representación de los números complejos por medio de todos los puntos del plano (x, y), es decir, definirlos como pares ordenados de números reales que tienen reglas adecuadas para su adición y multiplicación. [Synge 2, Capítulo 9]. En lo que se llama *diagrama de Argand* (que inventara Caspar Wessel en 1797, unos cuantos años antes de que Argand hiciera lo mismo), se suman los puntos como los vectores desde el origen O (que representa 0) que les corresponden:

9.32 $$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

(figura 9.3*a*). En otras palabras, para sumar (a, b) aplicamos la traslación que lleva $(0, 0)$ a (a, b).

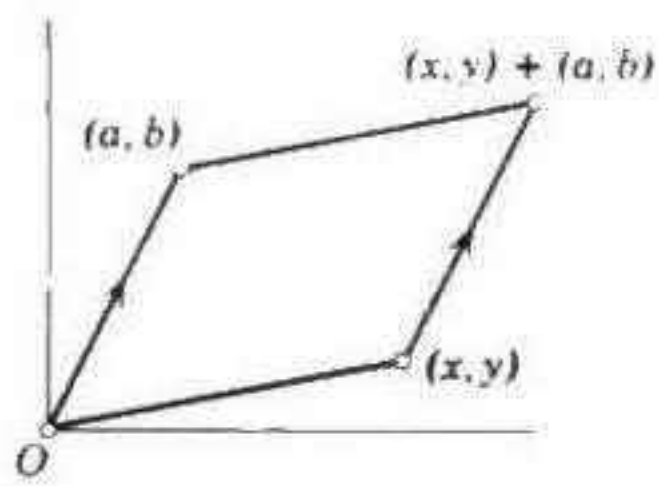


Figura 9.3a

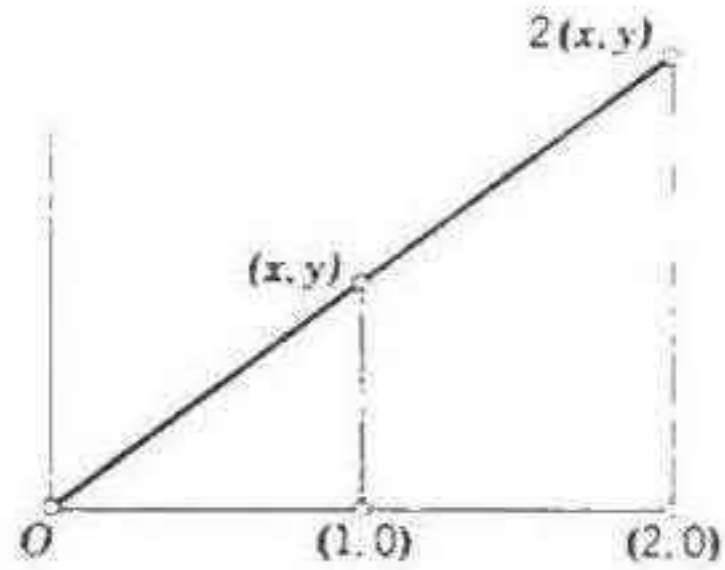


Figura 9.3b

La multiplicación por un entero sigue apareciendo como una dilatación: por ejemplo,

$$2(x, y) = (x, y) + (x, y) = (2x, 2y)$$

(figura 3.9*b*). En particular, la multiplicación por -1 es el semigiro alrededor de O. ¿Qué es, pues, la multiplicación por "la raíz cuadrada de -1"? Ha de ser una transformación cuyo "cuadrado" sea el semigiro alrededor de O. La respuesta obvia es *un cuarto de giro* alrededor de O [Hardy 1, pág. 83].

Así, pues, la multiplicación por un número complejo arbitrario ha de ser una transformación que conserva a O invariante e incluye dilataciones y rotaciones como casos especiales. La transformación obvia de esta clase es la rotación dilatativa (§ 5.4). En consecuencia, la operación de multiplicar el punto general (x, y) por un punto particular cualquiera (a, b) se define como la rotación dilatativa (con centro en O) que transforma $(1, 0)$ en (a, b) [Klein 1, pág. 57]. Para ver la manera en que esto funciona, sean los puntos (a, b), (x, y) tales que sus coordenadas polares sean (c, α), (r, θ), de manera que

$$a = c \cos \alpha, \quad b = c \operatorname{sen} \alpha, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

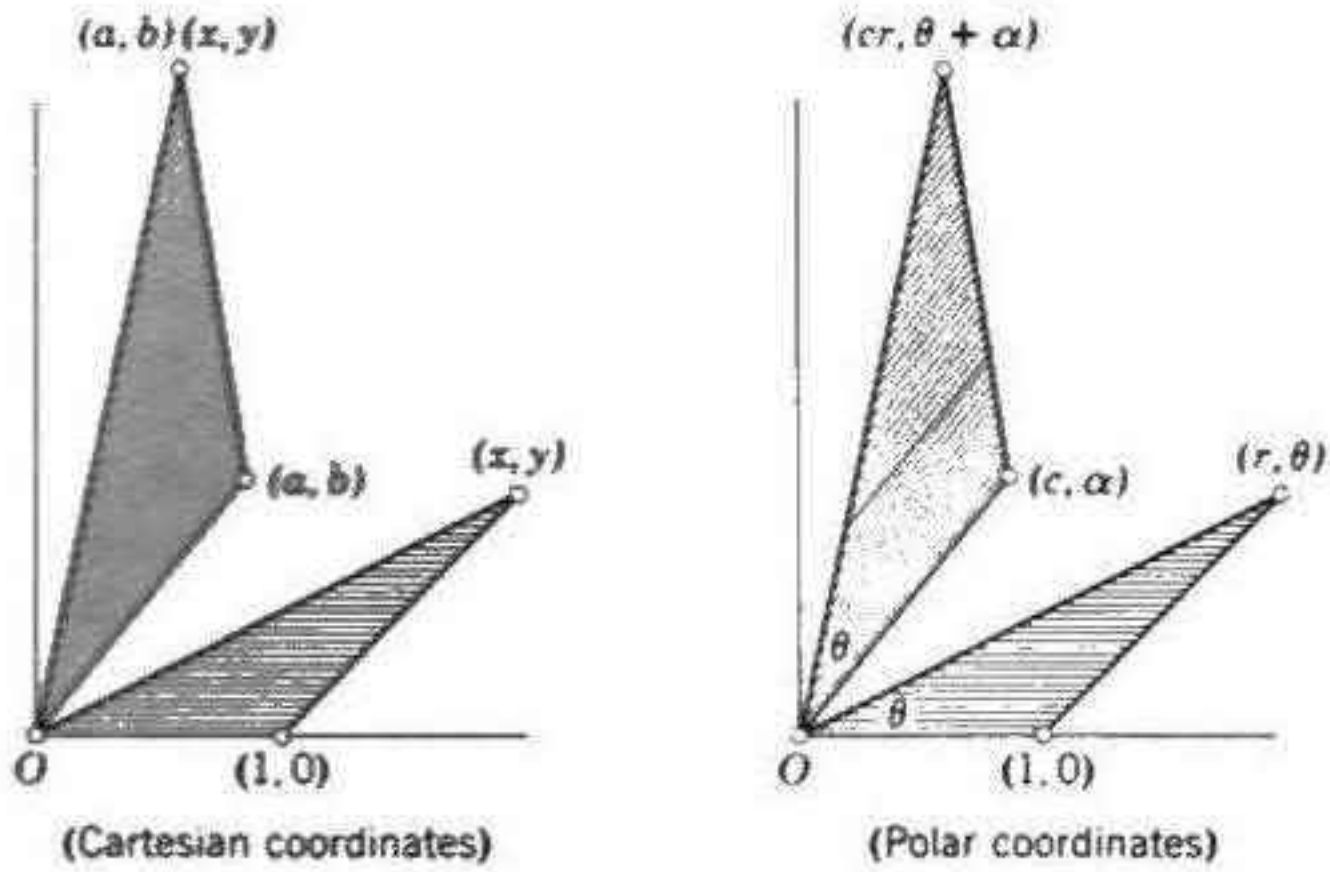


Figura 9.3c

Entonces la rotación dilatativa (figura 9.3c), que multiplica a r por c y suma α a θ, transforma

$$r \cos \theta = x$$

y

$$r \operatorname{sen} \theta = y$$

en

$$\begin{aligned} cr \cos(\theta + \alpha) &= cr(\cos\theta \cos\alpha - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha) \\ &= (c \cos\alpha)(r \cos\theta) - (c \operatorname{sen}\alpha)(r \operatorname{sen}\theta) \\ &= ax - by \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} cr \operatorname{sen}(\theta + \alpha) &= cr(\operatorname{sen}\theta \cos\alpha + \cos\theta \operatorname{sen}\alpha) \\ &= (c \cos\alpha)(r \operatorname{sen}\theta) + (c \operatorname{sen}\alpha)(r \cos\theta) \\ &= ay + bx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la regla de multiplicación (en coordenadas cartesianas) es finalmente

9.33 $$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

[Hardy 1, pág. 80].

Puesto que $(x, y) + (a, 0) = (x + a, y)$ y $(a, 0)(x, y) = (ax, ay)$, indentificamos de manera natural el número completo $(a, 0)$ con el número real a, de manera que

$$a(x, y) = (ax, ay)$$

y

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y\,(0, 1).$$

Al introducir el símbolo especial con el que Euler denotaba el número complejo $(0, 1)$, a saber, i, tenemos

$$\begin{aligned} (x, y) &= x + yi \\ &= x + iy \end{aligned}$$

e $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Con esta notación, las reglas 9.32 y 9.33 se convierten en

$$(x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i,$$

$$(a + bi)(x + yi) = ax - by + (ay + bx)i,$$

que se pueden considerar simplemente como adición y multiplicación ordinarias que tratan i como una incógnita, seguida de la inserción de -1 para i^2 [Birkhoff y MacLane 1, págs. 95–97].

EJERCICIOS

1. Resuélvase la ecuación $z^2 - 4z + 5 = 0$.
2. La ecuación $u + vi = 0$ implica tanto $u = 0$ como $v = 0$.
3. Exprésese $(a + bi)^{-1}$ en la forma $x + yi$.
4. Adáptese la figura 9.3c a los casos (i) $b = 0$, (ii) $a^2 + b^2 = 1$.

9.4 MODULO Y AMPLITUD

Abraham Demoivre (que, más correctamente, se debe escribir de Moivre) . . . murió en Londres el 27 de noviembre de 1754 . . . Poco antes [de su muerte] *declaró que le era necesario dormir diez o quince minutos más cada día en relación con el anterior. Un día después de haber llegado de esta manera a un total de más de veintitrés horas, durmió las veinticuatro horas del límite y en seguida murió, dormido.*

W. W. Rouse Ball

[Ball 2, págs. 383–384]

La conversión de coordenadas cartesianas a coordenadas polares nos señala que un número complejo cualquiera $z = x + yi$ se puede expresar en la forma

$$r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

La distancia radial r se llama *módulo* (o "valor absoluto") de z y se denota por $|z|$. El ángulo θ se llama *amplitud* (o "argumento") de z, y se denota por am z. Así,

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{am}(x + yi) = \arctan\frac{y}{x}.$$

Como la multiplicación por $c = a + bi$ queda representada por una rotación dilatativa que es producto de una dilatación en la razón $|c| : 1$ y una rotación que recorre am c, tenemos

$$|cz| = |c|\,|z|, \qquad \operatorname{am}(cz) = \operatorname{am} c + \operatorname{am} z.$$

Si $|c| = 1$, la multiplicación por c queda representada por una rotación pura. Un número c como éste es de la forma

$$\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha,$$

donde $\alpha = \operatorname{am} c$ es el ángulo de rotación. Al repetir la rotación n veces, obtenemos el teorema de Moivre:

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha.$$

En particular, la multiplicación por

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

queda representada por una rotación que recorre $2\pi/n$. Si aplicamos esta rotación y sus potencias sucesivas al punto 1, obtenemos los vértices de un enégono regular $\{n\}$, inscrito en la circunferencia unitaria $|z| = 1$. Estos n puntos representan las raíces

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$$

de la ecuación ciclotómica $z^n = 1$ (véase § 2.1). A partir de la teoría de las ecuaciones, deducimos la identidad

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2) \ldots (z - \omega^{n-1}).$$

En particular, las cuatro raíces de 1 son

$$1, \quad i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i.$$

Como $i^4 = 1$, las potencias más altas dan el mismo ciclo una y otra vez: por ejemplo,

$$i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1.$$

Todo número complejo $z = x + yi$ tiene un *conjugado* $\bar{z} = x - yi$, que se deriva por medio de la reflexión en el eje de las x. Puesto que

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

el recíproco de z es

$$z^{-1} = |z|^{-2}\,\bar{z}.$$

En particular, tenemos

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^{-1} = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha,$$

que es el teorema de de Moivre cuando $n = 1$.

La inversión en el círculo $|z| = 1$ transforma $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ en su inverso $r^{-1}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, es decir, transforma z en

$$\bar{z}^{-1} = |z|^{-2} z.$$

Es fácil extender el teorema de de Moivre de los valores enteros de n a los racionales, y entonces a los reales. En particular, un punto que describa continuamente la circunferencia $|z| = 1$ representa el número complejo

9.41 $$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = (\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)^\theta,$$

donde θ varía continuamente de 0 a 2π.

Si aplicamos la misma idea al número complejo

$$z = \mu(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1),$$

de módulo $\mu \neq 1$, vemos que sus potencias

$$z^\theta = \mu^\theta (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

quedan representadas por un punto que describe la espiral equiangular $r = \mu^\theta$ (§ 8.6).

EJERCICIO

Por medio del teorema de de Moivre, encuéntrense
(*a*) las dos raíces cuadradas de $3 + 4i$;
(*b*) las tres raíces cúbicas de 1, denotadas por $1; \omega, \omega^2$;
(*c*) las seis raíces sextas de 1 (con la notación de ω);
(*d*) las doce raíces duodécimas de 1.

9.5 LA FORMULA $e^{\pi i} + 1 = 0$

Hay una fórmula famosa —tal vez la más compacta y famosa de todas las fórmulas— que desarrolló Euler a partir de un descubrimiento de de Moivre: $e^{i\pi} + 1 = 0$. . . . *Es igualmente atractiva para el místico, el científico, el filósofo y el matemático. Cada uno de ellos le encuentra un significado propio. Aunque ya llevaba más de un siglo de ser conocida, la fórmula de de Moivre llegó a Benjamin Pierce como una revelación. Al descubrirla un día se volvió a sus estudiantes. . . . "Señores," les dijo, "esto es cierto con seguridad, es absolutamente paradójico, no podemos entenderlo y no sabemos lo que significa, pero lo hemos demostrado y, por lo tanto, debe ser verdad."*

E. Kasner y J. Newman

[1, págs. 103-104]

Puesto que hemos aceptado potencias *reales*, como lo es $\mu^\theta = e^{\theta \log \mu}$, nos preguntamos con naturalidad el significado que se puede dar a las potencias *complejas*. Una respuesta parcial proviene de la teoría de series infinitas como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

La primera serie, que es familiar cuando x es real, nos permite *definir* e^x en otros casos; por ejemplo

$$\begin{aligned} e^i &= 1 + i + \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} + \frac{i^4}{4!} + \frac{i^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + i - \frac{1}{2!} - \frac{i}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{i}{5!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos 1 + i \operatorname{sen} 1. \end{aligned}$$

Estas series nos permiten expresar 9.41 en la forma concisa de Euler

9.51 $$\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{\theta i},$$

que es un refinamiento de la identidad

$$\theta i = \log_e (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

de R. Cotes* (1682–1716), de quien dijo Newton después de su muerte prematura, "Si Cotes hubiera vivido, ¡tal vez hubiéramos llegado a saber algo! "

Al llevar $\theta = \pi$ a 9.51, obtenemos la "fórmula famosa"

$$e^{\pi i} = -1,$$

que relaciona de manera tan sorprendente los tres números importantes

$$e = 2.71828\dots, \qquad \pi = 3.14159\dots,$$

e i.

EJERCICIOS

1. Evalúese $e^{i\pi i}$. ¿Es i^i real?
2. Dedúzcase de 9.51 $\cos\theta = \dfrac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}$, que son las conocidas fórmulas de $\cos(\theta + \alpha)$, $\operatorname{sen}(\theta + \alpha)$, y las derivadas de $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$.

9.6 RAICES DE ECUACIONES

Gauss . . . fue el primer matemático que usó los números complejos de manera realmente científica y segura.

G. H. Hardy

[Hardy y Wright 1, pág. 188]

En el campo de los números complejos, podemos resolver cualquier ecuación cuadrática de coeficientes reales; por ejemplo, la ecuación 9.31 tiene las dos raíces i y $-i$. Es aún más notable que podamos resolver cualquier ecuación de coeficientes complejos; y no solamente una ecuación cuadrática,

* *Harmonia mensurarum*, Cambridge, 1722, pág. 28.

sino también una ecuación cualquiera de tercer o cuarto grado. Cuando hablamos de "resolver" una ecuación queremos decir que podemos encontrar expresiones explícitas de sus raíces en términos de sus coeficientes. E. Galois (que fue asesinado en 1832 cuando solamente tenía 20 años) demostró que la ecuación algebraica general 9.21 cuando $n > 4$ no se puede resolver en este sentido [Infeld 1]. A pesar de ello, el teorema fundamental del álgebra (que Gauss demostró en 1799) afirma la *existencia* de raíces para todos los valores de n, incluso cuando no dispongamos de expresiones explícitas. (Una bonita y pulcra demostración se encuentra en Birkhoff y MacLane [1, págs. 101-103].) De hecho, se pueden encontrar soluciones *numéricas* correctas hasta un número deseado de cifras decimales.

EJERCICIO

Una escalera de mano que mide 24 metros de largo descansa en una fachada con el apoyo adicional de un cajón cúbico cuya arista mide 7 metros, que se ha colocado al pie de la fachada con una de sus aristas horizontales en contacto con la escalera. ¿A qué altura sube la escalera sobre la fachada? (*Indicación*: tómese $7x$ como la altura desde el extremo superior de la escalera a la tapa del cajón. Obténgase una ecuación cuya raíz relevante sea $7x = 9 + 4\sqrt{2}$.)

9.7 TRANSFORMACIONES CONFORMES

Vimos, en § 9.3, que la transformación

$$z' = z + b$$

(que suma a la variable compleja z la constante compleja b) es una traslación, por lo que

$$z' = az$$

(que multiplica z por la constante compleja a) ha de ser una rotación dilatativa alrededor del punto O, donde incluimos como casos especiales una dilatación (cuando a es real) y una rotación (cuando $|a| = 1$). En consecuencia, la rotación dilatativa alrededor del punto general c es

$$z' - c = a(z - c)$$

ó

$$z' = az + (1 - a)c.$$

Así, pues, la semejanza directa general, como se describió en § 5.5, es la transformación *lineal* general

$$z' = az + b$$

[Ford 1, pág. 3]; y tenemos aquí una traslación o una rotación dilatativa según sea $a = 1$ ó $a \neq 1$. (En el último caso, $c = b/(1 - a)$.)

Como el producto de una semejanza opuesta y una reflexión es directo, una semejanza opuesta cualquiera se puede expresar como producto de una

reflexión dada y la semejanza directa adecuada. Por medio de la reflexión en el eje de las x, a saber,

$$z' = \bar{z}$$

(§ 9.4), podemos ver que la semejanza opuesta general es la transformación lineal "conjugada"

$$z' = a\bar{z} + b.$$

Puesto que la razón de amplificación es nuevamente $|a|$, tenemos una reflexión en deslizamiento (que posiblemente se reduzca a una reflexión pura) cuando $a = 1$, y una reflexión dilatativa en los demás casos.

Vimos, en § 9.4, que la transformación $z' = \bar{z}^{-1}$ es la inversión en el círculo unitario $|z| = 1$. De la misma manera,

$$z' = \frac{k^2}{\bar{z}}$$

será la inversión en el círculo $|z| = k$, cuyo radio es k. En consecuencia, la inversión en el círculo general $|z - a| = k$ es $z' - a = k^2/(\bar{z} - \bar{a})$ o

9.71 $$z' = a + \frac{k^2}{\bar{z} - \bar{a}}.$$

Por 6.71, una transformación cualquiera que preserve el círculo y no sea una semejanza es el producto de esa inversión y una isometría

$$z' = p\bar{z} + q \qquad \text{o} \qquad z' = pz + q,$$

donde $|p| = 1$. Para expresar este producto, reemplazamos la z a la derecha de 9.71 por $p\bar{z} + q$ o $pz + q$, de manera que obtengamos

$$z' = a + \frac{k^2}{\bar{p}z + \bar{q} - \bar{a}} = \frac{az + b}{z + d}$$

o

$$z' = a + \frac{k^2}{\bar{p}\bar{z} + \bar{q} - \bar{a}} = \frac{a\bar{z} + b}{\bar{z} + d}$$

respectivamente, donde b y d son expresiones determinadas en las que intervienen k^2, p, $\bar{q}$, a y $\bar{a}$. En consecuencia,

Toda transformación que preserve el círculo, directa u opuesta, es una transformación lineal fraccionaria

9.72 $$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{o} \quad z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \qquad (ad \neq bc),$$

donde se puede tomar c como 0 ó 1 según sea la transformación una semejanza o no lo sea.

Y al revés, toda transformación lineal fraccionaria 9.72 transforma círculos en círculos. La manera más fácil de ver esto consiste en hacer una substitución directa en la ecuación $|z - u| = k$ ó

$$(z - u)(\bar{z} - \bar{u}) = k^2$$

del círculo general. Se transforma con claridad en una ecuación de la misma clase. El procedimiento alterno que damos a continuación fue sugerido por un comentario de N. S. Mendelsohn.*

Cuando $c = 0$, la transformación, como hemos visto, es una semejanza. Cuando $c \neq 0$, podríamos disponer de $c = 1$, como antes, pero encontraremos más conveniente una normalización distinta, a saber, multiplicar todas las a, b, c, d (cuando sea necesario) por un número tal que los coeficientes revisados cumplan la igualdad $ad - bc = 1$ [Ford **1**, pág. 14]. Entonces, tenemos, en la notación de *fracciones continuas*, la identidad

$$\frac{az + b}{cz + d} = ac^{-1} + \frac{1}{c +} \frac{1}{-c^{-1} +} \frac{1}{c +} \frac{1}{c^{-1}d + z},$$

que, por supuesto, se sostiene cuando reemplazamos z por $\bar{z}$ en ambos miembros. Así la homografía

$$z_9 = \frac{az + b}{cz + d} \quad (c \neq 0, \quad ad - bc = 1)$$

se puede expresar como producto de las nueve transformaciones más sencillas

$$z_9 = ac^{-1} + z_8,\ z_8 = \frac{1}{z_7},\ z_7 = c + z_6,\ z_6 = \frac{1}{z_5},\ z_5 = -c^{-1} + z_4,\ z_4 = \frac{1}{z_3},$$

$$z_3 = c + z_2, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_1 = c^{-1}d + z,$$

que son alternativamente traslaciones $z' = b + z$ e involuciones de Möbius de la forma especial $z'' = 1/z$: el producto de la inversión $z'' = 1/\bar{z}'$ y la reflexión $z' = \bar{z}$. (Se puede reducir el número de pasos de nueve a cuatro por medio de la rotación dilatativa $z' = c^{-2}z$; pero resulta interesante observar que esta transformación más complicada es ella misma producto de translaciones e involuciones de Möbius "horizontales".) Con respecto a la *antihomografía*

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

procederemos de la misma manera con una reflexión más $z' = \bar{z}$. Como todas estas transformaciones conservan el círculo, de aquí sigue el resultado que se desea.

Los métodos, más poderosos que estos, de la teoría de las funciones de una variable compleja nos capacitan para demostrar [Ford **1**, págs. 3, 15] que toda transformación de la totalidad del plano inversivo que preserva el ángulo es de la forma 9.72. Esto nos señala que las transformaciones que preservan el ángulo y las transformaciones que preservan el círculo son sinónimas mutuamente.

EJERCICIOS

1. Cuando $|a| = 1$ y $a \neq 1$, la transformación $z' = az + b$ es una rotación. Encuéntrese su ángulo.

2. Cuando $a \neq 1$, la transformación $z' = a\bar{z} + b$ es una reflexión dilatativa. ¿Qué ángulo forma su eje con el eje de las x?

* *American Mathematical Monthly*, **51** (1944), pág. 171.

10

Los cinco cuerpos platónicos

Vimos en § 4.6 que se puede llenar el plano euclidiano de cuadrados por medio de una disposición que coloca a cuatro en cada vértice. Si tratamos de agrupar cuadrados colocando sólo tres en cada vértice, nos encontramos con que la figura se cierra en cuanto hemos usado seis cuadrados, y tenemos un cubo $\{4, 3\}$. De la misma manera, podemos llenar el plano con triángulos equiláteros, seis en cada vértice, y es interesante lo que pasa cuando empleamos tres, cuatro o cinco, en lugar de seis. Otra posibilidad es la de usar pentágonos, tres en cada vértice, de acuerdo con el símbolo $\{5, 3\}$.

Con la excepción posible de las esferas, estos *poliedros* son los cuerpos sólidos más sencillos. Por medio de ellos es posible acercarse de manera fácil a la topología, además de que constituyen un ejercicio interesante de trigonometría. Se pueden definir y generalizar sus principios de diversas maneras [véase, por ejemplo, Hilbert y Cohn Vossen **I**, pág. 290].

10.1 PIRAMIDES, PRISMAS Y ANTIPRISMAS

> *Aunque el Discurso de los Cuerpos Sólidos sea una Parte de la Geometría poco común y que suele ser despreciada, no es, sin embargo, un beneficio pequeño o poco pródigo de la Ciencia, como seguramente será admitido por aquellos, cuyo Genio tiende tanto a la Parte Práctica como a la Especulativa, a quienes hemos dedicado principalmente esto.*
>
> Abraham Sharp (1651–1742)
>
> (*Geometry Improv'd*, Londres, 1717, pág. 65)

Se puede describir un *polígono convexo* (como es $\{n\}$, donde n es entero) como la región finita de un plano "rodeada" por un número finito de rectas,

en el sentido de que su interior queda por completo a un lado de cada recta. De la misma manera, podemos decir que un *poliedro convexo* es una región finita del espacio rodeada por un número finito de planos [Coxeter 1, pág. 4]. La parte de cada plano que resulta de la intersección con los otros se llama *cara*. El lado común de dos caras se llama *arista*.

Los poliedros más conocidos son las *pirámides* y los *prismas*. Nos ocuparemos solamente de pirámides "rectas y regulares" cuyas caras son enégonos regulares y n triángulos isósceles, y de prismas "rectos y regulares" cuyas caras consisten en dos enégonos regulares unidos por n rectángulos (de manera que siempre habrá dos rectángulos y un enégono en cada vértice). La altura del prisma se puede ajustar de manera que los rectángulos se conviertan en cuadrados, y entonces sobreviene el caso de un poliedro *uniforme*: todas las caras son polígonos regulares y todos los vértices se encuentran rodeados de la misma manera [Ball 1, pág. 135]. Cuando $n = 4$, el prisma es un *cubo*, que no es solamente uniforme, sino *regular*: todas las caras se parecen, todas las aristas se parecen y todos los vértices se parecen. (Se puede dar un sentido preciso a la frase "se parecen" con la ayuda de la teoría de los grupos. Queremos decir que hay una operación de simetría tal que transformará cualquier cara, arista o vértice en otra cara, arista o vértice.)

Se puede ajustar a veces la altura de cualquier pirámide enegonal de manera que los triángulos isósceles se vuelvan equiláteros. Esto se puede hacer cuando $n < 6$; pero seis triángulos equiláteros se extenderán sobre el plano, en lugar de formar un ángulo sólido. Una pirámide triangular se llama *tetraedro*. Si tres de las caras, y por lo tanto las cuatro, son equiláteras, el tetraedro es *regular*.

Al distorsionar ligeramente un prisma enegonal obtenemos el *antiprisma enegonal* (o "prismatoide" o "prismoide"), cuyas caras consisten en dos enégonos regulares. La altura del antiprisma siempre se puede ajustar, de manera que los triángulos isósceles se vuelvan equiláteros y tengamos un poliedro uniforme con tres triángulos y un enégono en cada vértice. Cuando $n = 3$, el antiprisma es el *octaedro* regular. Cuando $n = 5$, podemos combinarlo con dos pirámides pentagonales, una en cada "base" para formar el *icosaedro* regular [Coxeter 1, pág. 5]. Un par de dados icosaédricos de la dinastía de Ptolomeo se puede ver en una de las salas egipcias del British Museum de Londres.

Ya hemos construido cuatro de los cinco poliedros convexos regulares, a saber, los que Platón veía como símbolos de los cuatro elementos: la tierra, el fuego, el aire y el agua. La discrepancia entre los cuatro elementos y los cinco sólidos no afectaba la concepción de Platón. Describía el último como una forma que envolvía todo el universo. Posteriormente se convirtió en la *quintaesencia* de los alquimistas medievales. Se puede construir un modelo de este *dodecaedro* regular al agrupar dos "tazones", cada uno compuesto por un pentágono al que rodean otros cinco pentágonos. La razón por la que se ajustan los dos tazones consiste en que las aristas libres forman un decágono inclinado como el de las aristas laterales de un antiprisma pentagonal (cuyas caras laterales son triángulos isósceles). Steinhaus [2, págs. 161 163] ha descrito una manera muy pulcra de construir un modelo así. De un pliego de cartulina, se cortan dos *redes* como las de la figura 10.1*a*, una para cada

tazón. Pásese un cuchillo romo a lo largo de los cinco lados del pentágono central de manera que las aristas queden "abisagradas". Se coloca transversalmente una red sobre la otra con las aristas acanaladas hacia afuera, y se las sujeta por medio de una liga que ha de pasar alternadamente por encima y por debajo de las esquinas de la estrella doble, mientras se sostiene el modelo con una mano de manera que esté plano. Al retirar la mano para permitir que los pentágonos centrales se alejen uno de otro, emerge el dodecaedro como un modelo perfecto (figura 10.1*b*).

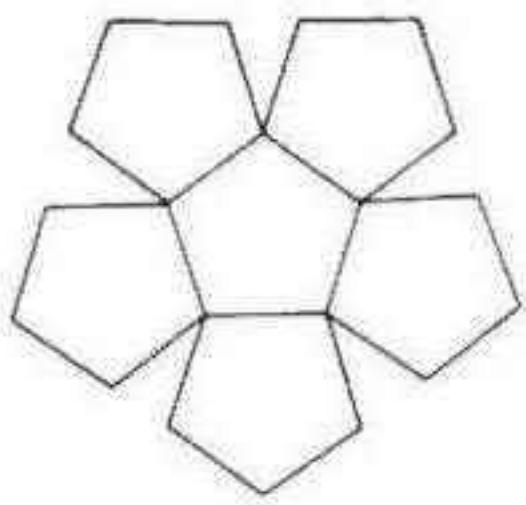


Figura 10.1a

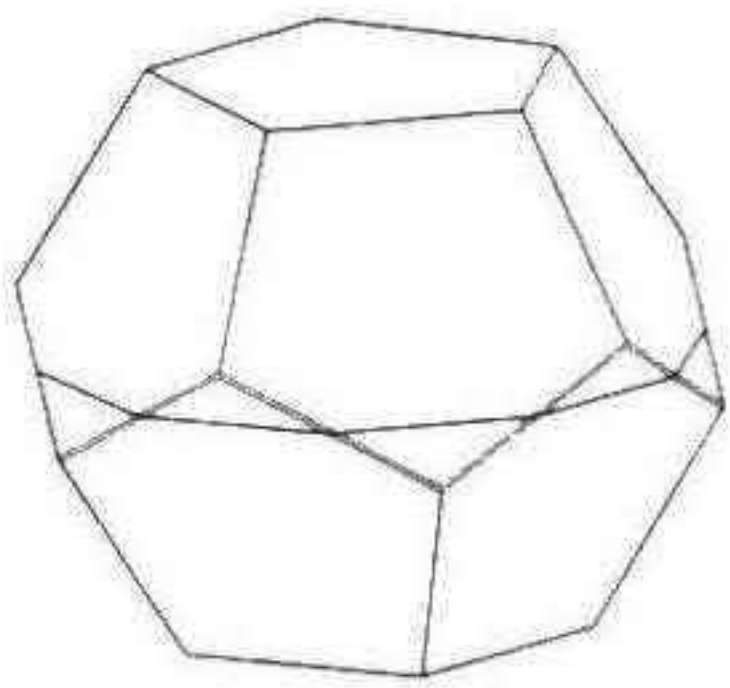


Figura 10.1b

Las propiedades más elementales de los cinco cuerpos platónicos se han recogido en la tabla II de la pág. 461. Cada poliedro recibe una caracterización por medio de un símbolo de Schläfi $\{p, q\}$, que significa que sus caras son pegonales y que hay q de ellas en cada vértice. Se denota el número de vértices, aristas y caras por V, A, C. En cada caso se pueden contar con facilidad, pero su significado será más claro cuando los hayamos expresado como funciones de p y q. También obtendremos una expresión del *ángulo diedral*, que es el ángulo formado por los planos de dos caras adyacentes.

EJERCICIOS

1. Descríbase el octaedro de una manera diferente a la que se ha hecho (como una dipirámide).
2. Descríbase un cuerpo de cinco vértices y seis caras triangulares.
3. Descríbanse las secciones siguientes: (i) la de un tetraedro regular por el plano que está a media distancia entre dos aristas opuestas, (ii) la de un cubo por el plano que pasa a media distancia entre dos vértices opuestos, (iii) la de un dodecaedro por el plano que pasa a media distancia entre dos caras opuestas.
4. Seis rombos congruentes, con ángulos de 60° y 120°, se pueden agrupar para formar un *romboedro* (cubo distorsionado). Se pueden cortar de las esquinas "agudas" de este cuerpo tetraedros regulares de manera que nos quedemos con un octaedro. O, dicho de otra manera, dos tetraedros y un octaedro se pueden reunir de manera que formen un romboedro. Dedúzcase que el tetraedro y el octaedro tienen ángulos diedrales suplementarios y que se puede reunir una infinidad de ejemplares de ambos cuerpos de manera que se llene por completo el espacio euclidiano [Ball, I, pág. 147].

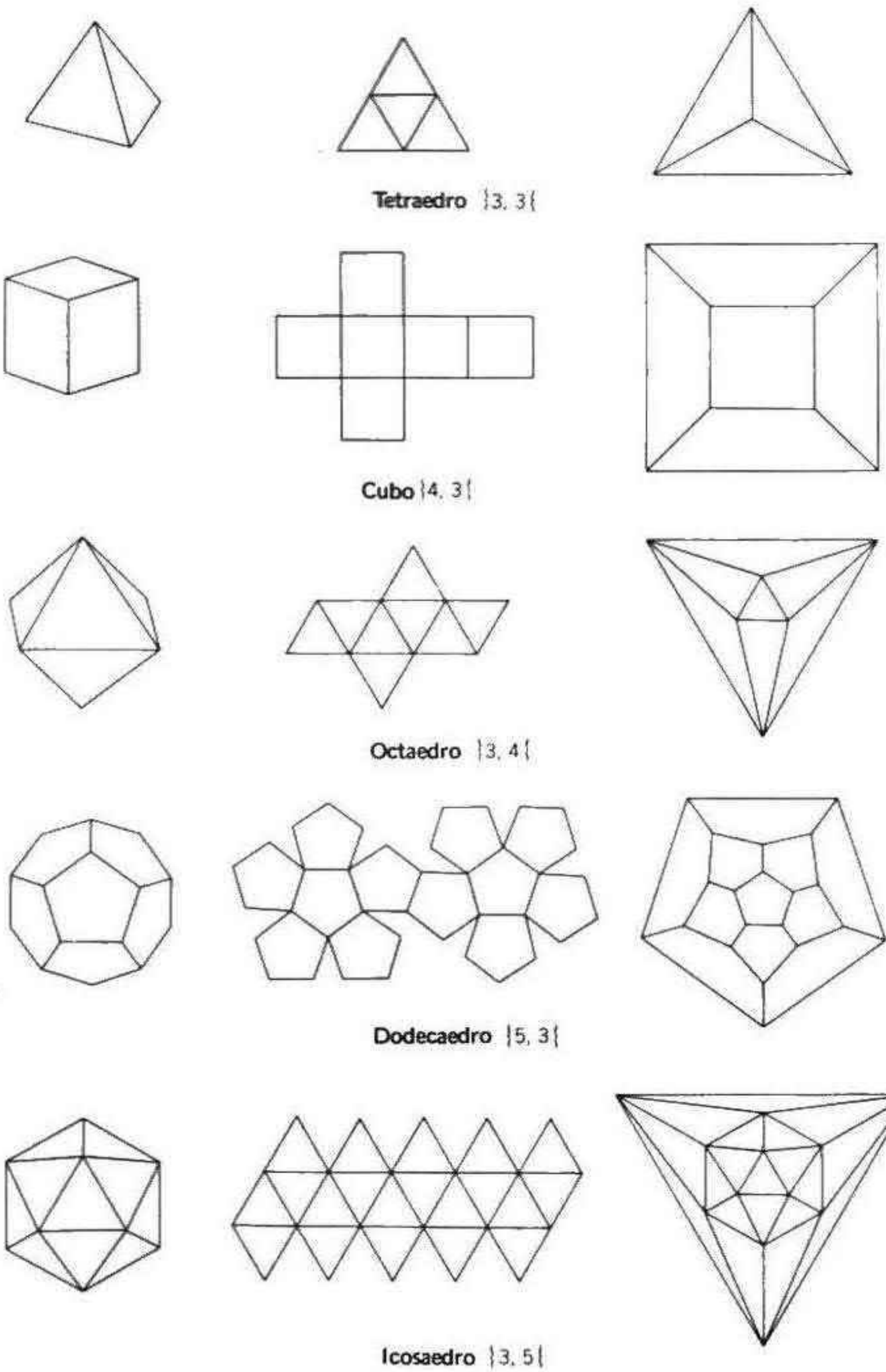

Tetraedro {3, 3}
Cubo {4, 3}
Octaedro {3, 4}
Dodecaedro {5, 3}
Icosaedro {3, 5}

Figura 10.2a

10.2 DIBUJOS Y MODELOS

Cuécelo en serrín: sazónalo con engrudo:
Espésalo con vendajes y con grillos:
Pero sin olvidar tu principal objetivo:
*Conservar la simetría de su forma.**

Lewis Carroll

[Dodgson 2a, Fit 5]

Leonardo da Vinci construyó modelos de esqueletos de poliedros, por medio de tiras de madera como aristas que dejaban a la imaginación la forma de las caras [Pacioli 1]. Cuando un modelo así se observa en perspectiva desde una posición apenas a unos cuantos centímetros del centro de una de sus caras, ésta aparece como un polígono grande que en su interior contiene las demás caras. Este dibujo del cuerpo se llama *diagrama de Schlegel* [Hilbert y Cohn-Vossen 1, págs. 145-146].

En la figura 10.2*a* tenemos a los cinco cuerpos platónicos en tres de sus aspectos: una vista en perspectiva ordinaria, la *red*, que se puede doblar para construir el modelo de cartulina y el diagrama de Schlegel correspondiente. Se puede comprobar cada uno al observar la naturaleza de una cara y el arreglo de caras en un vértice.

EJERCICIOS

1. Trácese el diagrama de Schlegel de un antiprisma pentagonal.
2. ¿Cuál es el número menor de triángulos de ángulos agudos en los que se puede descomponer un triángulo, uno de cuyos ángulos es obtuso? (F. W. Levi.†)
3. ¿Cuál es el número menor de triángulos de ángulos agudos en los que se puede descomponer un cuadrado? (Martin Gardner.**)

10.3 LA FORMULA DE EULER

Euler . . . no dejó de advertir nada en las matemáticas de su época, a pesar de la ceguera total que padeció durante los últimos diecisiete años de su vida.

E. T. Bell [2, pág. 330]

El diagrama de Schlegel de un poliedro señala de inmediato a qué caras y aristas pertenece cada vértice. Una cara aparece como una región bordeada por aristas, con la excepción de la cara "inicial", que contiene a todas las demás. Para asegurar la correspondencia uno-a-uno entre las caras y las

* *You boil it in sawdust: you salt it in glue:*
You condense it with locusts and tape:
Still keeping one principal object in view–
To preserve its symmetrical shape. (*T*)

† *Mathematics Student*, 14 (1946)

** *Scientific American*, 202 (1960), pág. 178

regiones simplemente habremos de asociar la cara inicial con la región exterior infinita.

Todo poliedro representable por medio de un diagrama de Schlegel es calificado de *relacionado simplemente* o "euleriano", debido a que sus propiedades numéricas satisfacen la fórmula de Euler

$$V - A + C = 2$$

[Hilbert y Cohn-Vossen 1, pág. 290], que no solamente vale para el diagrama de Schlegel de ese poliedro sino para un "mapa" relacionado cualquiera que esté formado por un número finito de puntos y segmentos de recta, tal que descomponga un plano en regiones que no se traslapan: la única restricción es que haya, por lo menos, ¡un vértice!

Podemos expresar de la manera siguiente una demostración que se parece a la de Euler. Un mapa cualquiera relacionado se puede construir de arista en arista a partir del mapa primitivo que consiste en un solo vértice aislado. A cada paso, la nueva arista se une, o bien a un vértice nuevo o a uno viejo, como se tiene en la figura 10.3*a*, o bien a dos vértices viejos, como en la figura 10.3*b*. En el primer caso, V y A se incrementan en 1, mientras C permanece sin alterarse; en el segundo, V no se altera mientras A y C se incrementan en 1 cada una. En cualquiera de los dos casos, la combinación $V - A + C$ no se altera. Al empezar, cuando solamente hay un vértice y una región (a saber, el resto del plano), tenemos

$$V - A + C = 1 - 0 + 1 = 2.$$

El valor de 2 se mantiene a lo largo de toda la construcción. Así, la fórmula de Euler es válida para cualquier mapa del plano. En particular, lo es para todo diagrama de Schlegel, y lo mismo diremos acerca de todo poliedro simplemente relacionado. (Otra demostración, que se debe a Von Staudt, está en Rademacher y Toeplitz 1, págs. 75–76.)

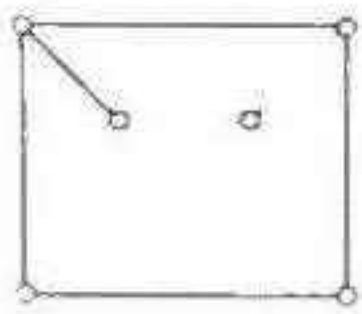


Figura 10.3a

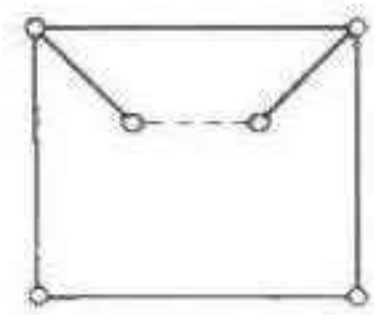


Figura 10.3b

En el caso del poliedro regular $\{p, q\}$, tenemos que sus propiedades numéricas satisfacen estas otras relaciones:

10.31 $$qV = 2A = pC.$$

De hecho, si contamos las q aristas en cada uno de los V vértices, hemos contado dos veces a cada una de ellas: una desde cada extremo. Se presenta algo parecido al contar los p lados de cada una de las C caras, puesto que cada arista pertenece a dos caras.

Ya estamos en posesión de suficiente información para deducir las expresiones de V, A, C en función de p y q. De hecho,

$$\frac{V}{\frac{1}{q}} = \frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{C}{\frac{1}{p}} = \frac{V - A + C}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} = \frac{2}{\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} = \frac{4pq}{2p + 2q - pq},$$

por lo que

10.32
$$V = \frac{4p}{2p + 2q - pq}, \quad A = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}, \quad C = \frac{4q}{2p + 2q - pq}.$$

Como estos números han de ser positivos, los valores posibles de p y q quedan restringidos por la desigualdad $2p + 2q - pq > 0$ ó

10.33
$$(p - 2)(q - 2) < 4.$$

Así, $p - 2$ y $q - 2$ son dos enteros positivos cuyo producto es menor que 4, a saber

$$1 \cdot 1 \quad \text{ó} \quad 2 \cdot 1 \quad \text{ó} \quad 1 \cdot 2 \quad \text{ó} \quad 3 \cdot 1 \quad \text{ó} \quad 1 \cdot 3.$$

Las cinco posibilidades dan lugar a una demostración sencilla de lo que afirmaba Euclides [Rademacher y Toeplitz **1**, págs. 84–87]:

No hay más que cinco poliedros convexos y regulares:

$$\{3, 3\}, \quad \{4, 3\}, \quad \{3, 4\}, \quad \{5, 3\}, \quad \{3, 5\}.$$

La desigualdad 10.33 no es simplemente una condición necesaria para la existencia de $\{p, q\}$ sino también suficiente; ya vimos en § 10.1 la manera de construir un cuerpo que corresponda a cada solución.

La misma desigualdad se presenta de manera más elemental cuando construimos el modelo de un poliedro a partir de su red. En un vértice tenemos q pégonos, y cada uno de ellos agrega un ángulo de

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi.$$

Para que se forme un ángulo sólido, los q ángulos de las caras han de sumar en total menos de 2π. Así

$$q\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi < 2\pi$$

de donde, como antes, $(p - 2)(q - 2) < 4$.

Cualquier constructor de modelos advertirá en seguida que la cantidad que le falta a la suma de los ángulos de las caras en un vértice para llegar a 2π es menor en un cuerpo complicado, como el dodecaedro, que en uno sencillo, como el tetraedro. Descartes demostró que si esta cantidad, sea δ, es igual en cada vértice, será de hecho igual a $4\pi/V$ [Brückner **1**, pág. 60]. En el caso de $\{p, q\}$, tenemos aquí una consecuencia inmediata de la fórmula 10.32 para V, en la que tenemos

$$\frac{4\pi}{V} = (2p + 2q - pq)\frac{\pi}{p} = 2\pi - q\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi.$$

EJERCICIOS

1. El número de aristas de $\{p, q\}$ está dado por

$$E^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - \tfrac{1}{2}.$$

2. Considérese un poliedro arbitrario con caras pegonales para diversos valores de p y q caras en un vértice para diversos valores de q. Generalícense las ecuaciones 10.31 en la forma

$$\Sigma q = 2E = \Sigma p,$$

donde la primera suma se toma sobre todos los vértices y la segunda sobre todas las caras. Dedúzcase que todo poliedro tiene o bien una cara donde $p = 3$ o un vértice donde $q = 3$ (o ambas cosas). (*Indicación*: De no ser así, tendríamos $\Sigma q \geqslant 4V$ y $\Sigma p \geqslant 4C$.)

3. Si todas las caras se parecen y todas las aristas se parecen, así como todos los vértices, las caras son regulares. Por medio de un ejemplo, demuéstrese que este resultado de los poliedros no vale con respecto a los mosaicos.

10.4 RADIOS Y ANGULOS

Un modelo sólido de $\{p, q\}$ se puede construir –es evidente– por medio de C pirámides que se han reunido uniendo sus vértices superiores en un solo punto; este punto es el centro O_3 del poliedro, y también es el centro común de tres esferas: la *esfera circunscrita* que pasa por todos los vértices, la *esfera media*, que toca las aristas en sus puntos medios, y la *esfera inscrita*, que toca todas las caras en sus centros. El *circunradio* ${}_0R$ aparece en cualquiera de las pirámides como una arista lateral (figura 10.4*a*), el *radio medio* ${}_1R$ como la altura de una cara lateral y el *inradio* ${}_2R$ como la altura de toda la pirámide.

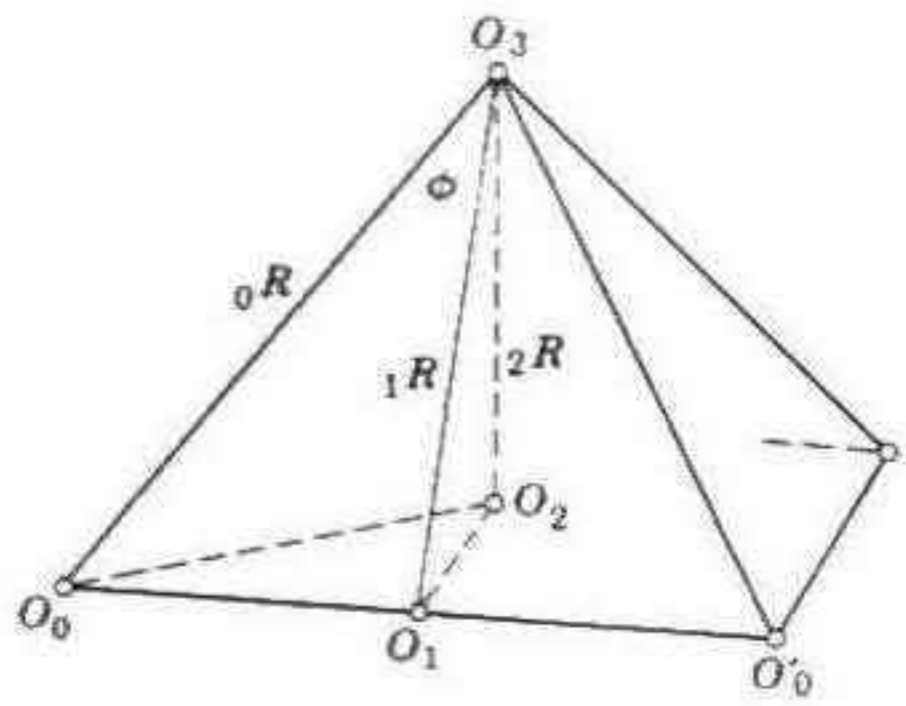


Figura 10.4a

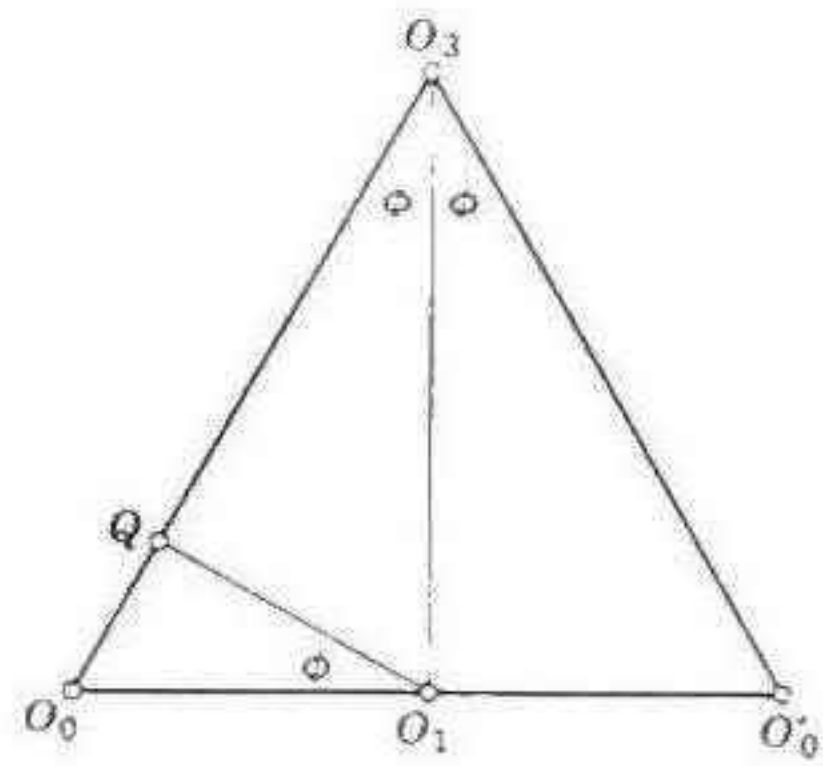


Figura 10.4b

Los planos de simetría (o "espejos") de una pirámide pegonal unen el vértice superior O_3 con las p rectas de simetría de la base. Por medio de estos p planos, la pirámide sólida se descompone en $2p$ tetraedros (irregulares) congruentes entre sí y de clase muy especial. Sea uno de esos tetraedros $O_0O_1O_2O_3$ (figura 10.4*c*), de manera que O_0 sea vértice del poliedro, O_1 el punto medio de una

arista $O_0O'_0$, O_2 el centro de una cara y O_3 el centro de todo el cuerpo. (La red se ha dibujado en correspondencia con el caso de un cubo $\{4, 3\}$ donde

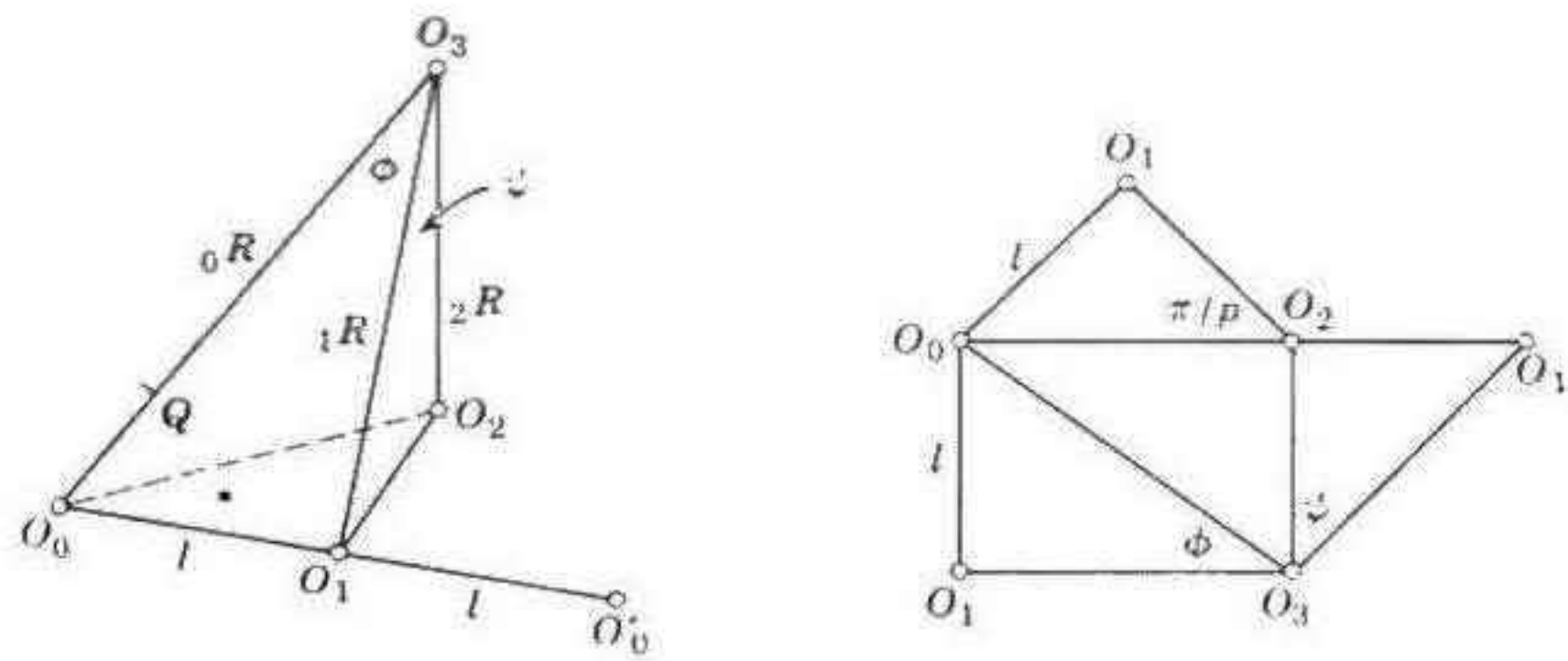


Figura 10.4c

$O_0O_1 = O_1O_2 = O_2O_3$.) Como el plano $O_1O_2O_3$ biseca perpendicularmente la arista $O_0O'_0$, O_0O_1 es perpendicular a O_1O_2 y O_1O_3. Puesto que $O_0O_1O_2$ es el plano de una de las caras, el inradio O_3O_2 es perpendicular a O_0O_2 y O_1O_2. Así tenemos que las tres rectas O_0O_1, O_1O_2, O_2O_3 son perpendiculares entre sí y el tetraedro es "cuadrirrectangular": las cuatro caras son triángulos rectángulos. Schläfli dio el nombre de *ortoesquema* a este tetraedro [Coxeter 1, pág. 137].

Muchas relaciones en las que intervienen los radios

$$_0R = O_0O_3, \quad _1R = O_1O_3, \quad _2R = O_2O_3$$

se pueden derivar de los cuatro triángulos rectángulos, en los que $O_0O_1 = l$ y $\angle O_0O_2O_1 = \pi/p$. Pero no sabremos todo mientras el ángulo

$$\phi = \angle O_0O_3O_1$$

que es la mitad del ángulo que subtiende en el centro una arista, no haya sido descubierto [Coxeter 1, págs. 21–22].

Otro ángulo significativo es

$$\psi = \angle O_1O_3O_2,$$

cuyo complemento, $\angle O_2O_1O_3$, es la mitad del ángulo diedral del poliedro. En otras palabras, el ángulo diedral es $\pi - 2\psi$.

Al buscar estos ángulos, es de utilidad definir la *figura verticial* de $\{p, q\}$: el polígono que forman los puntos medios de las q aristas en un vértice O_0. Se trata, desde luego, de un polígono plano, puesto que sus vértices quedan en la circunferencia de intersección de dos esferas: la esfera media (cuyo centro es O_3 y cuyo radio es $_1R = O_3O_1$), y la esfera de centro en O_0 y de radio $l = O_0O_1$. Por 2.84 podemos ver que la figura verticial de $\{p, q\}$ es un $\{q\}$ cuyo lado es

$$2l \cos \frac{\pi}{p}.$$

Puesto que su plano es perpendicular a O_3O_0, su centro Q es el pie de la perpendicular que baja de O_1 a O_3O_0 (figura 10.4*b*) y su circunradio es

$$QO_1 = l \cos \phi.$$

Por 2.81 (donde se tiene $l \cos \pi/p$ por l), este circunradio ha de ser

$$l \cos \frac{\pi}{p} \csc \frac{\pi}{q}.$$

Y, en consecuencia,

10.41 $$\cos \phi = \cos \frac{\pi}{p} \csc \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p} \Big/ \operatorname{sen} \frac{\pi}{q}$$

[Coxeter **1**, pág. 21].

Los triángulos rectángulos de la figura 10.4*c* nos permiten obtener ahora

$${}_0R = l \csc \phi, \quad {}_1R = l \cot \phi,$$

$${}_2R^2 = {}_1R^2 - \left(l \cot \frac{\pi}{p}\right)^2, \quad \cos \psi = \frac{{}_2R}{{}_1R}.$$

Con el fin de eliminar ϕ, será conveniente introducir la abreviatura provisional

$$k^2 = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{q} - \cos^2 \frac{\pi}{p} = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{q},$$

de manera que $\operatorname{sen} \phi = k \csc \pi/q$. Entonces

$${}_0R = \frac{l}{k} \operatorname{sen} \frac{\pi}{q}, \qquad {}_1R = \frac{l}{k} \cos \frac{\pi}{p},$$

10.42 $${}_2R = \frac{l}{k} \cot \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q},$$

10.43 $$\cos \psi = \cos \frac{\pi}{q} \Big/ \operatorname{sen} \frac{\pi}{p}.$$

Este último resultado nos hace capaces de calcular el ángulo diedral

$$\pi - 2\psi = 2 \operatorname{arcsen} \left(\cos \frac{\pi}{q} \Big/ \operatorname{sen} \frac{\pi}{p}\right).$$

EJERCICIOS

1. Verifíquese que $k = \operatorname{sen} \pi/2c$ donde $c = (2 + p + q)/(10 - p - q)$ [Coxeter **4**, pág. 753], y que $E = c(c + 1)$.

2. Compruébense los valores del ángulo diedral que se encuentra en la tabla II de la página 461. (Los cálculos han de estar de acuerdo con la observación de que los ángulos diedrales del tetraedro y el octaedro son suplementarios. Véase el ejercicio 4 al final de § 10.1.)

3. Si un poliedro tiene esferas circunscrita, media e inscrita, y si las tres esferas son concéntricas, el poliedro es regular.

10.5 POLIEDROS RECIPROCOS

El cuerpo platónico $\{p, q\}$ tiene un *recíproco*, que se podrá definir como el poliedro rodeado por un cierto conjunto de V planos, a saber, los planos de las figuras verticiales en los V vértices de $\{p, q\}$. Es claro que sus aristas bisectan las aristas de $\{p, q\}$ a ángulos rectos. Entre las A aristas, las que bisectan los p lados de una cara de $\{p, q\}$ pasan todas por un vértice del recíproco, y las que bisectan las q aristas en un vértice $\{p, q\}$ forman una cara del recíproco. Así,

El poliedro recíproco de $\{p, q\}$ *es* $\{q, p\}$,

y viceversa. Por cada cara de uno hay un vértice del otro: de hecho, los centros de las caras de $\{p, q\}$ son los vértices de una versión reducida del recíproco $\{q, p\}$ [Steinhaus **1**, págs. 72–79].

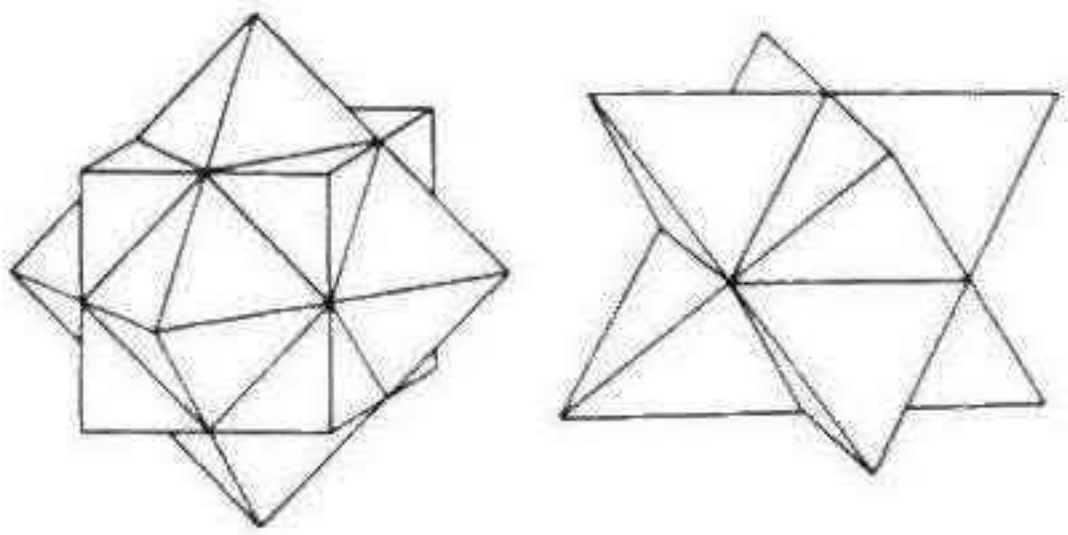


Figura 10.5a

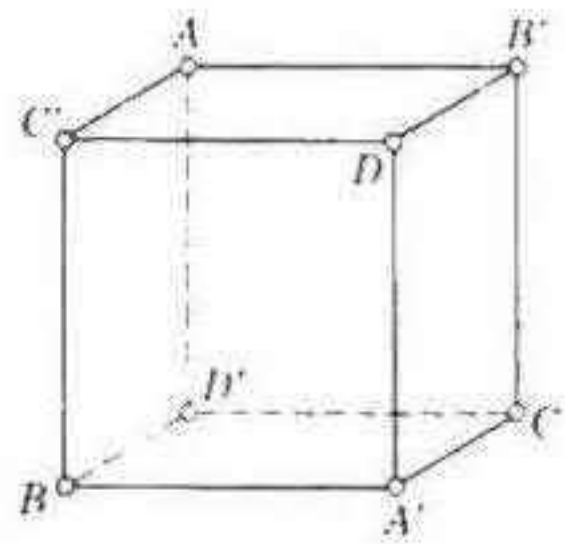


Figura 10.5b

La figura 10.5*a* nos muestra la manera en que el octaedro $\{3, 4\}$ surge como el recíproco del cubo $\{4, 3\}$ (o viceversa), y que el recíproco de un tetraedro regular $\{3, 3\}$ es un tetraedro igual. La combinación de dos tetraedros recíprocos, $ABCD$ y $A'B'C'D'$, se presenta en la naturaleza como un gemelo cristalográfico. Pacioli [**1**, láminas XIX, XX] le dio el nombre de *octaedron elevatum*. Kepler, que lo redescubrió cien años después, lo llamó simplemente *stella octángula*. Las doce aristas de los dos tetraedros son las diagonales de las seis caras de un cubo (figura 10.5*b*).

Si intercambiamos p y q en la fórmula 10.32 por V (o C), obtendremos la fórmula para C (o V). De la misma manera, puesto que Q, en O_3O_0 (figura 10.4*b*) es el centro de una cara de $\{q, p\}$, la propiedad angular ϕ de $\{p, q\}$ es igual a la propiedad angular ψ de $\{q, p\}$, y, por lo tanto, la expresión 10.43 acerca de la propiedad ψ de $\{p, q\}$ se pudo haber derivado de 10.41 por medio del sencillo recurso de intercambiar p y q.

EJERCICIOS

1. Un cubo de arista 1, con un vértice en el origen y tres de sus aristas a lo largo de los ejes cartesianos, tiene los ocho vértices (x, y, z), donde cada una de las tres coordenadas será o bien 0, o bien 1, de manera independiente.

2. Un cubo de arista 2, con su centro en el origen y sus aristas paralelas a los ejes cartesianos, tiene los ocho vértices

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

3. ¿Dónde está el centro de la dilatación que relaciona a los cubos que se describieron en los dos ejercicios anteriores?

4. Obténganse las coordenadas de los vértices de un tetraedro regular mediante la selección de vértices alternos de un cubo. Encuéntrense las ecuaciones de los planos en los que está cada cara y calcúlese el ángulo que forman dos de ellos.

5. Obténganse las coordenadas de los vértices de un octaedro por medio de la ubicación de los centros de las caras del cubo del ejercicio 2. Encuéntrense las ecuaciones de los planos en los que está cada cara y calcúlese el ángulo entre dos de ellos que tengan una arista común.

6. Los puntos (x, y, z) que pertenecen al octaedro sólido se determinan por medio de la desigualdad

$$|x| + |y| + |z| \leq 1.$$

7. Si cada arista de un tetraedro regular se proyecta en uno de los arcos de un círculo mayor de la esfera circunscrita, ¿qué ángulo de intersección tienen los dos arcos? Encuéntrense las ecuaciones de los planos de los seis círculos mayores.

11

La división áurea y la filotaxia

La construcción del pentágono regular que daba Euclides depende de la división de un segmento de recta en la razón de $\tau : 1$, donde $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$. Este número algebraico es el tema de un libro que se publicó en 1509, en el que Luca Pacioli describe sus propiedades o "efectos", sin ir más allá del decimotercero, "por cuidar de nuestra salvación". Veremos que cuando se le expresa como fracción continua [Ball 1, págs. 55–56], todos los cocientes parciales son iguales a 1, de manera que esta es la más sencilla (y de más lenta convergencia) entre todas las fracciones continuas, que son infinitas. Tenemos que los convergentes son los cocientes de miembros sucesivos de la sucesión de números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., que un niño cualquiera puede empezar a escribir, aunque la fórmula explícita no se descubrió hasta 1843. Una manifestación sutil de la "proporción divina" en la estructura de las plantas ayuda a explicar el fenómeno de la filotaxia, que aparece con gran claridad en la disposición de celdas de la superficie de la piña.

11.1 RAZON EXTREMA Y MEDIA

> *Creo que de esta proporción geométrica se sirvió el Creador como la idea por medio de la que introdujo la generación continua de objetos semejantes a partir de objetos semejantes.*
>
> J. Kepler (1571–1630)

Como podemos ver en la figura 2.8*b*, la figura verticial de un pentágono regular cuyo lado sea $2l$ será un segmento de recta de longitud τl, donde

11.11 $$\tau = 2 \cos \pi/5.$$

En otras palabras, un pentágono $PQRST$ de lado 1 (figura 11.1*a*) tiene diagonales de longitud τ. Sea U el punto de intersección de las diagonales QS, RT. Se dice que se dividen entre sí según la *división áurea* (o "en la razón extrema y media"). Para comprender lo que significa esto, observemos los triángulos isósceles homotéticos QTU, SRU, que se relacionan así:

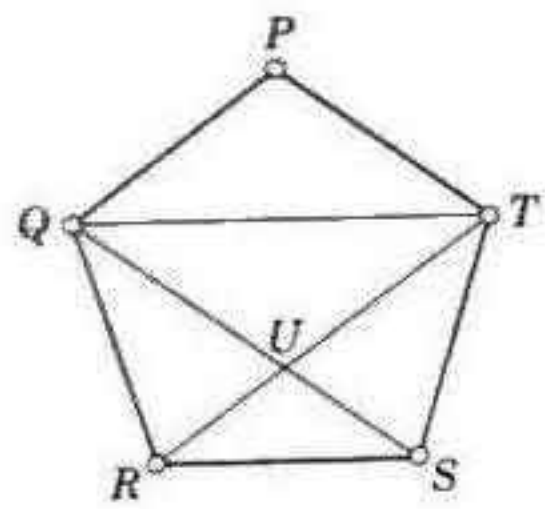


Figura 11.1a

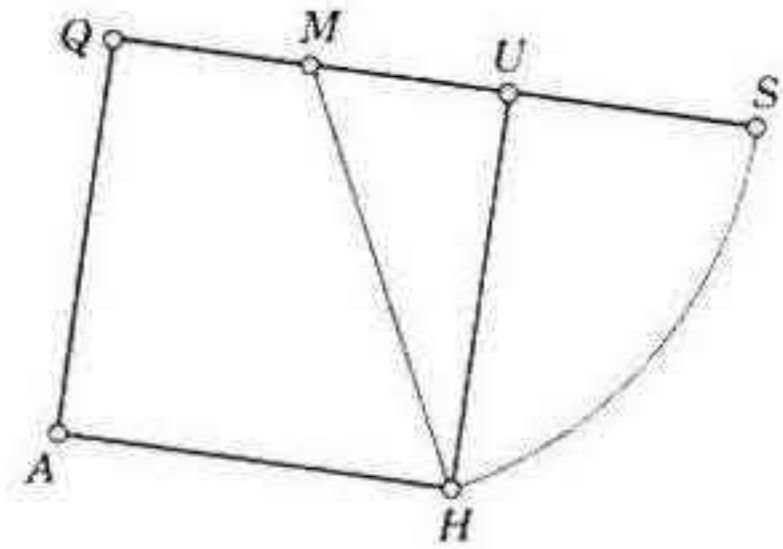


Figura 11.1b

$$\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \tau = \frac{QS}{PT} = \frac{QS}{QU}$$

(puesto que PT y QU son lados opuestos del rombo $PQUT$). Así, la digonal QS queda dividida en U de manera que *la razón de la parte mayor a la menor es igual a la razón de la diagonal entera a la parte mayor.*

Cuando $QU = PT = 1$, de manera que $QS = \tau$, entonces $US = \tau^{-1}$ y

$$1 + \tau^{-1} = \tau.$$

En consecuencia, τ es la raíz positiva de la ecuación cuadrática

11.12 $$\tau^2 - \tau - 1 = 0,$$

a saber, $$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.6180339887\ldots.$$

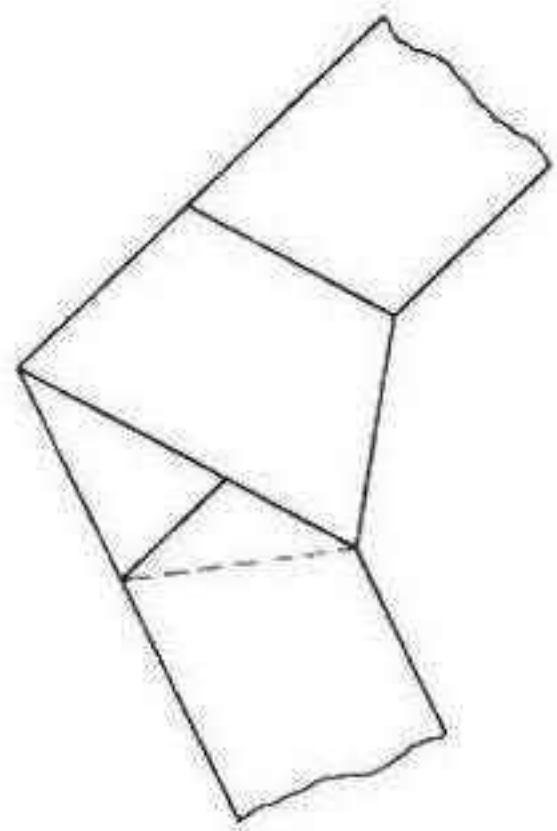


Figura 11.1c

La figura 11.1*b* nos muestra una manera fácil de prolongar un segmento dado QU hasta S de manera que $QS = \tau\ QU$. (Aquí M es el punto medio del lado QU del cuadrado $AQUH$, y $MS = MH = \sqrt{5}MU$.) Euclides (IV.10) emplea el procedimiento para "construir un triángulo isósceles en el que cada uno de los ángulos de la base valga el doble que el otro" (QST o PRS en la figura 11.1*a*)

Se puede elaborar la figura de un pentágono y sus diagonales con bastante limpieza si se hace un nudo sencillo en una tira larga de papel y se le aplana cuidadosamente (figura 11.1*c*).

EJERCICIOS

1. Si se define τ como la razón de la diagonal de un pentágono regular a su lado, establézcase 11.11 por medio de la aplicación de 1.54 al triángulo isósceles PRS.
2. Muéstrese que un ajuste más del compás servirá para obtener un punto (en la figura 11.1*b*) que divida el segmento dado QU en la razón de $\tau : 1$.

11.2 DE DIVINA PROPORTIONE

Del suo secondo essentiale effecto . . . Del terço suo singulare effecto . . . Del quarto suo ineffabile effecto . . . Del .10. suo supremo effecto . . . Del suo .11. excellentissimo effecto . . . Del suo .12. quasi incomprehensibile effecto. . .

Luca Pacioli (hacia 1445–1509)

[Pacioli 1, págs. 6–7]

Bajo la influencia benéfica del artista Piero della Francesca (hacia 1416–1492), Fra Luca Pacioli (o *Paccioli*) escribió un libro acerca de τ, llamado *De divina proportione*, que ilustró con dibujos de modelos que había hecho su amigo Leonardo da Vinci. Su entusiasmo por el tema se deja ver en los títulos que hemos citado, que corresponden a diversos capítulos. (Es interesante observar cuán bien podemos comprender su italiano antiguo.)

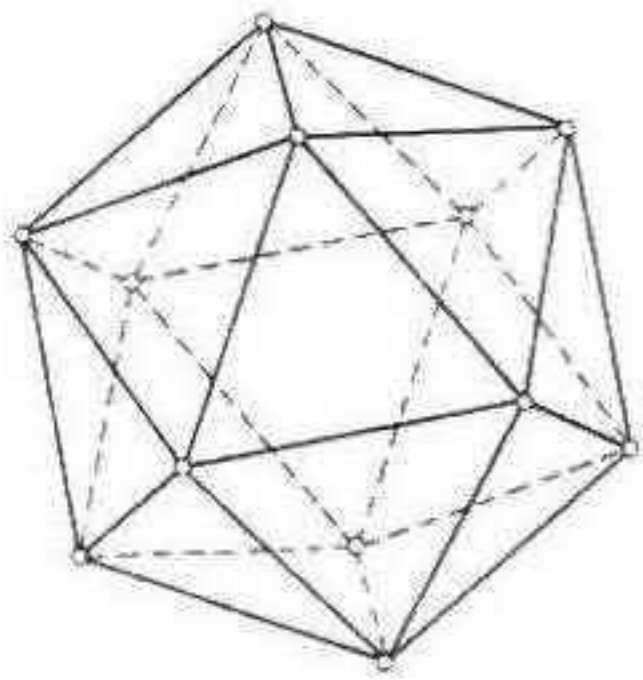


Figura 11.2a

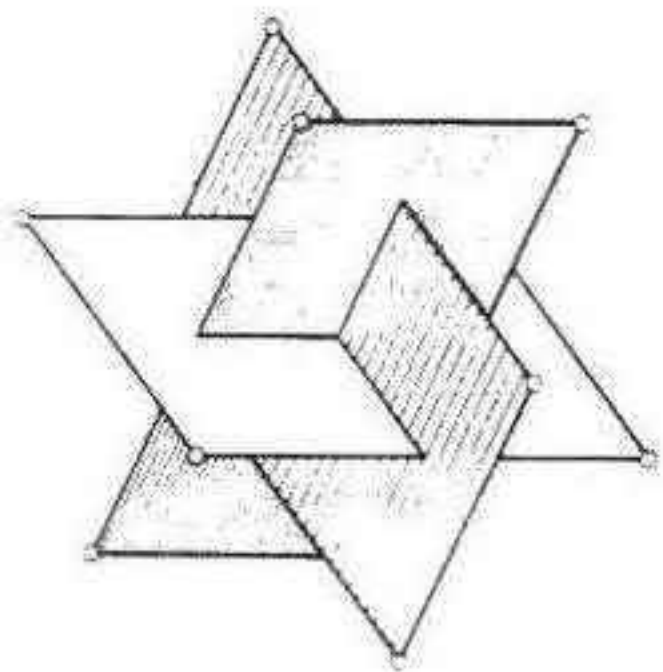


Figura 11.2b

"El inestimable efecto séptimo" consiste en que τ se presenta como el circunradio de un decágono regular de lado 1. (Por lo tanto, podremos inscribir un pentágono inscrito en un círculo dado si antes inscribimos un decágono y tomamos los vértices alternos.) "El efecto noveno, el mejor de todos," consiste en que dos diagonales que se cortan en un pentágono se dividen en la razón extrema y media. "El casi incomprensible efecto duodécimo" se refiere a la propiedad siguiente del icosaedro regular $\{3, 5\}$.

Las caras que rodean uno de los vértices del icosaedro pertenecen a una pirámide cuya base es un pentágono regular (semejante a la figura verticial). Dos aristas opuestas cualquiera del icosaedro pertenecen a un rectángulo cuyos lados mayores son diagonales de los pentágonos dichos. Puesto que la diagonal de un pentágono es τ veces su lado, el rectángulo es *áureo*, y sus lados están en la razón de $\tau : 1$. De hecho, los doce vértices del icosaedro (figura 11.2*a*) son los doce vértices de tres rectángulos áureos que están en planos perpendiculares entre sí (figura 11.2*b*). Este modelo se puede construir por medio de tres tarjetas postales ordinarias (que son rectángulos casi áureos). Se corta en la mitad de cada tarjeta una ranura paralela a los lados mayores e igual en longitud a un lado menor. Por razones de tipo práctico, en una de las tarjetas la ranura ha de llegar hasta el borde. Entonces será fácil colocar las tarjetas de manera que cada una pase por la mitad de las otras, en orden cíclico.

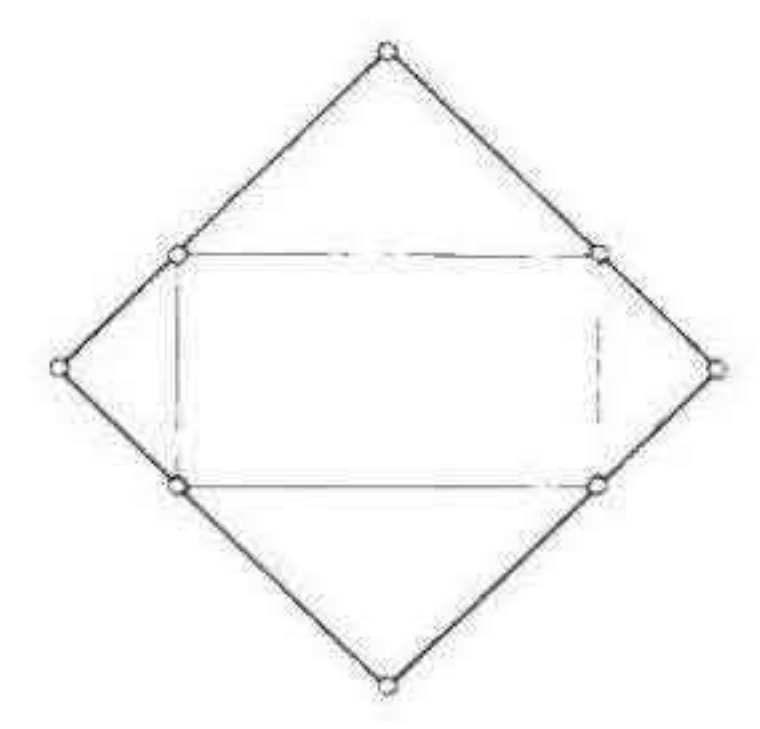


Figura 11.2c

En la figura 11.2*c* podemos observar que se puede inscribir un cuadrado de manera que cada vértice del rectángulo divida un lado del cuadrado en la razón de $\tau : 1$. Si identificamos esto con una de las tres esferas "ecuatoriales" del octaedro regular, deducimos que se puede inscribir un icosaedro en un octaedro de manera que cada vértice del icosaedro divida una arista del octaedro en la razón de $\tau : 1$.

EJERCICIOS

1. Refiéranse los planos de los tres rectángulos áureos a coordenadas cartesianas para obtener los 12 vértices del icosaedro en la forma

$$(0, \pm\tau, \pm 1), \quad (\pm 1, 0, \pm\tau), \quad (\pm\tau \pm 1, 0).$$

2. Estos 12 puntos dividen las 12 aristas del octaedro

$$(\pm\tau^2, 0, 0), \quad (0, \pm\tau^2, 0), \quad (0, 0, \pm\tau^2)$$

en la razón de $\tau : 1$.

3. Obténganse las coordenadas de los 20 vértices del dodecaedro regular [Coxeter 1, pág. 53].

11.3 LA ESPIRAL AUREA

Arquímedes, Leonardo, Newton: todos ellos hombres con mucho sentido práctico, pero con algo más. Una vocación a la pregunta, tal vez . . . Muy misterioso todo esto, muy misterioso. Y muy emocionante. Esto es, la emoción: se obtiene al ser Dios mientras se construye, y se obtiene al observar a Dios, es decir, al observar las cosas tal como son.

J. L. Synge [2, pág. 163]

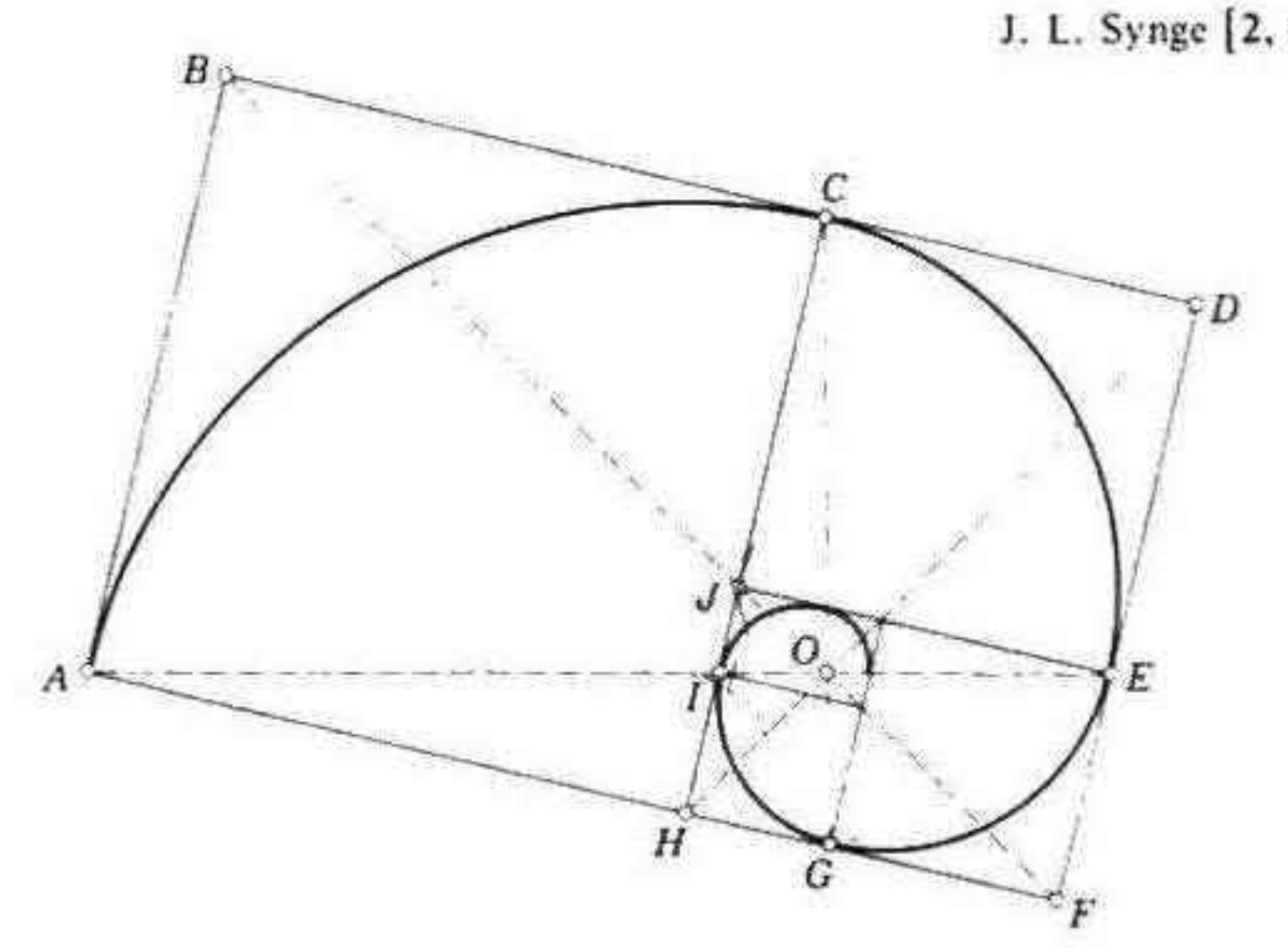


Figura 11.3a

La relación $\tau = 1 + 1/\tau$ nos señala que el rectángulo áureo $ABDF$ (figura 11.3*a*) se puede descomponer en dos piezas: el cuadrado $ABCH$ y un rectángulo áureo menor. (Se pueden identificar los puntos B, C, D con los Q, U, S de la figura 11.1*b*.) Del rectángulo pequeño $CDFH$ podemos cortar nuevamente otro cuadrado, de modo que dejemos un rectángulo aún menor, y continuar el proceso indefinidamente.

Puesto que el rectángulo $HJEF$ es homotético a $ABDF$, el vértice J del primero queda en la diagonal BF del segundo. De hecho, las rectas AE, BF, CG, DH contienen entre todas los vértices de todos los rectángulos. Para derivar $CDFH$ a partir de $ABDF$ podemos emplear una rotación dilatativa de centro O, el punto de intersección $BF \cdot DH$. Esta semejanza, que transforma cada uno de los puntos $A, C, E, G, I, \ldots$ en el siguiente, y cada uno de los puntos $B, D, F, H, J, \ldots$ en el siguiente, es el producto de un cuarto de giro negativo alrededor de O y la dilatación $O(\tau^{-1})$. Por lo tanto, DH es

perpendicular a BF. La semejanza inversa, que transforma cada rectángulo en el siguiente mayor que él, es producto de un cuarto de giro positivo alrededor de O y la dilatación $O(\tau)$.

Puesto que

$$\frac{OB}{OD} = \tau = \frac{BC}{CD},$$

OC biseca el ángulo (recto) BOD. Así tenemos que las rectas CG, AE pasan por O y bisecan los ángulos entre BF, DH.

En términos de coordenadas polares con polo en O, la rotación dilatativa que transforma OE en OC transforma cualquier punto (τ, θ) en $(\tau r, \theta + \frac{1}{2}\pi)$. Si tomamos como recta inicial OE y la distancia OE como la unidad de medida, de manera que E sea $(1, 0)$, deducimos las coordenadas $(\tau, \frac{1}{2}\pi)$ de C, (τ^2, π) de A, $(\tau^3, \frac{3}{2}\pi)$ del vértice opuesto a A en el nuevo cuadrado que se colocaría sobre AF, y así sucesivamente. De la misma manera, G es $(\tau^{-1}, -\frac{1}{2}\pi)$, I es $(\tau^{-2}, -\pi)$ o (τ^{-2}, π), y así sucesivamente. De esta manera, obtenemos una sucesión infinita de puntos $\ldots, I, G, E, C, A, \ldots$ cuyas coordenadas polares

$$r = \tau^n, \quad \theta = \tfrac{1}{2}\pi n$$

cumplen la ecuación $r = \tau^{2\theta/\pi}$. Por lo tanto, todos estos puntos están en la espiral equiangular

$$r = \mu^\theta,$$

donde $\mu = \tau^{2/\pi}$. Esta espiral auténtica [Cundy y Rollet 1, pág. 64] se ve aproximada muy de cerca por la espiral artificial que forman los cuadrantes circulares que se inscriben en los cuadrados sucesivos, como se tiene en la figura 11.3*a*. (Pero la espiral auténtica corta los lados de los cuadrados a ángulos muy pequeños, en lugar de tocarlos solamente.)

EJERCICIOS

1. Verifíquese la conclusión de § 5.4 cuando se la aplica a los rectángulos semejantes $ABDF$ y $CDFH$ de la figura 11.3*a*.

2. Obténganse coordenadas polares para los puntos J, H, F, D, B. Se encuentran en otra espiral equiangular que es congruente (¿mediante qué ángulo de rotación?) y homotética (¿mediante qué razón de amplificación?) con respecto a la espiral $IGECA$.

11.4 LOS NUMEROS DE FIBONACCI

Sint minim 1 et 1 quos imaginaberis inaequales. Adde, fient 2, cui adde maiorem 1 fient 3, cui adde 2 fient 5, cui adde 3 fient 8, cui adde 5 fient 13, cui adde 8 fient 21.

J. Kepler [1, pág. 270]

En 1202, Leonardo de Pisa, apodado Fibonacci ("hijo de buen carácter"), se encontró con su célebre sucesión de enteros f_n en relación con la cría de

conejos.* Supuso que los conejos vivían para siempre y que cada mes una pareja procrea una nueva pareja que se vuelve productiva a la edad de dos meses. En el primer mes el experimento comienza con una pareja de recién nacidos. En el segundo mes, todavía hay una sola pareja. En el tercer mes, hay 2; en el cuarto, 3; en el quinto, 5; y así sucesivamente. Sea f_n el número de parejas de conejos en el enésimo mes. Los primeros valores (y sus razones sucesivas) se pueden tabular de la manera siguiente:

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
f_n:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
f_{n+1}/f_n:	∞	1	2	1.5	1.6	1.6	1.625	1.6154	1.6190	1.6176	1.6182	...

Cuatro siglos después, Kepler afirmaba explícitamente lo que Fibonacci seguramente advirtió: que la suma de dos f cualquiera es igual a la siguiente, de manera que la sucesión queda determinada por la fórmula de recursión

11.41 $$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_k + f_{k+1} = f_{k+2}.$$

Kepler también observó que las razones $f_n : f_{n+1}$ se aproximan a $1 : \tau$ cada vez más, a medida que se incrementa n. (Véase la tercera hilera en la tabla anterior.) Sin embargo, otros cien años después, R. Simson (1687-1768), que en realidad no fue el descubridor de la "recta de Simson") reconoció f_{n+1}/f_n como el enésimo convergente de la fracción continua

$$1 + \frac{1}{1 +}\,\frac{1}{1 +}\,\frac{1}{1 +}\cdots.$$

(Los "convergentes" son los números

$$1, \quad 1 + 1 = 2, \quad 1 + \frac{1}{1 + 1} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \frac{1}{1 +}\,\frac{1}{1 + 1} = \frac{5}{3},$$

y los que los suceden de la misma manera.) Para demostrar que $\lim f_{n+1}/f_n = \tau$, Simson se sirvió repetidamente de la relación $\tau = 1 + 1/\tau$, de la manera siguiente:

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau} = 1 + \frac{1}{1 +}\,\frac{1}{\tau} = 1 + \frac{1}{1 +}\,\frac{1}{1 +}\,\frac{1}{\tau} = \cdots$$

Con respecto a f_n, E. Lucas (1842–1891) tomó en consideración los números relacionados g_n, que se definen por medio de

$$g_0 = 2, \quad g_1 = 1, \quad g_k + g_{k+1} = g_{k+2}.$$

Los primeros valores que obtuvo eran los siguientes:

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
g_n:	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...

Se demuestra facilmente por inducción que (cuando $n > 0$)

11.42 $$g_n = f_{n-1} + f_{n+1}.$$

* R. C. Archibald, Golden Section, *American Mathematical Monthly*, 25 (1918), págs. 232–238.

Dejemos esto como ejercicio para el lector y prosigamos para establecer las identidades de Lucas

11.43 $$f_{2n} = f_n\, g_n.$$

11.44 $$f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2,$$

que son obvias cuando $n = 0$ o 1. Para demostrar ambas por inducción, sumaremos las relaciones tentativas

$$f_{2k-1} = f_{k-1}^2 + f_k^2 \quad \text{y} \quad f_{2k} = f_k g_k,$$

con lo que obtenemos
$$\begin{aligned} f_{2k+1} &= f_{k-1}^2 + f_k(f_{k-1} + f_{k+1}) + f_k^2 \\ &= (f_{k-1} + f_k)f_{k+1} + f_k^2 \\ &= f_k^2 + f_{k+1}^2, \end{aligned}$$

y entonces sumamos

$$f_{2k} = f_k g_k \quad \text{y} \quad f_{2k+1} = f_k^2 + f_{k+1}^2 .$$

con lo que obtenemos
$$\begin{aligned} f_{2k+2} &= f_k^2 + f_k(f_{k-1} + f_{k+1}) + f_{k+1}^2 \\ &= f_k f_{k+1} + f_{k+1} f_{k+2} \\ &= f_{k+1}\, g_{k+1}. \end{aligned}$$

De la misma manera, para establecer la identidad

11.45 $$\tau^n = f_n\tau + f_{n-1},$$

que es obvia cuando $n = 1$ ó 2, sumamos

$$\tau^k = f_k\tau + f_{k-1} \quad \text{y} \quad \tau^{k+1} = f_{k+1}\tau + f_k,$$
$$\tau^{k+2} = f_{k+2}\tau + f_{k+1}.$$

de modo que obtenemos

La identidad 11.45 sigue siendo válida cuando n es negativo, siempre y cuando definamos $f_{-k} = f_{-k+2} - f_{-k+1}$ (cuando $k > 0$), de manera que

$$f_{-k} = (-1)^{k+1} f_k.$$

Así,
$$\begin{aligned} \tau^{-k} &= f_{-k}\tau + f_{-k-1} \\ &= (-1)^{k+1}(f_k\tau - f_{k+1}). \end{aligned} \tag{11.46}$$

y

11.47 $$(-\tau)^{-k} = f_{k+1} - f_k\tau$$

11.471 $$= f_{k-1} - f_k\tau^{-1}.$$

Al sumar 11.45 (donde k substituye a n) y 11.47, obtenemos

11.48 $$g_k = \tau^k + (-\tau)^{-k}.$$

De la misma manera, al substraer 11.471 de 11.45 (donde k substituye a n), obtenemos

11.49 $$f_k = \frac{\tau^k - (-\tau)^{-k}}{\tau + \tau^{-1}} = \frac{\tau^k - (-\tau)^{-k}}{\sqrt{5}},$$

que es una fórmula explícita, descubierta por J. P. M. Binet en 1843.

A partir de 11.48 y 11.49 deducimos inmediatamente

$$\tau^k = \frac{g_k + f_k\sqrt{5}}{2}, \quad (-\tau)^{-k} = \frac{g_k - f_k\sqrt{5}}{2};$$

por ejemplo

$$\tau^3 = \sqrt{5} + 2, \qquad \tau^{-3} = \sqrt{5} - 2,$$

$$\tau^6 = 9 + 4\sqrt{5}, \qquad \tau^{-6} = 9 - 4\sqrt{5}.$$

EJERCICIOS

1. Exprésese la suma de la serie finita

$$1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + f_n$$

en términos de f_{n+2}.

2. Demuéstrese la identidad de Simson

$$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Esta es la base de un problema desconcertante y entretenido [Ball 1, pág. 85].*

3. Verifíquese la observación de Lagrange acerca de que los dígitos finales de los números de Fibonacci empiezan a recurrir después de un ciclo de sesenta:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, \ldots, 7, 2, 9, 1, 0.$$

4. A partir de la identidad

$$(1 - t - t^2)(1 + t + 2t^2 + 3t^3 + \ldots + f_{n+1} t^n + \ldots) = 1,$$

que implica

$$\sum_0^\infty f_{n+1} t^n = \frac{1}{1 - t - t^2} = \sum_0^\infty (t + t^2)^k = \sum_0^\infty t^k(1 + t)^k = \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k+j},$$

dedúzcase la fórmula de Lucas para los números de Fibonacci en términos de coeficientes binomiales:

$$f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots.$$

5. Dése el valor de 0.01 a t en la identidad $\Sigma f_{n+1} t^n = (1 - t - t^2)^{-1}$, y dedúzcase una manera fácil de escribir los 19 primeros dígitos en la forma decimal $\frac{10000}{9899}$.

6. Tabúlese g_{n+1}/g_n y encuéntrese su límite cuando n tiende a infinito.

* Véase también Coxeter, The golden section, phyllotaxis, and Wythoff's game, *Scripta Mathematica*, 19 (1953), pág. 139. Desde un punto de vista más general,

$$f_{n+h} f_{n+k} - f_n f_{n+h+k} = (-1)^n f_h f_k;$$

véase A. E. Danese, *American Mathematical Monthly*, 67 (1960), pág. 81.

11.5 LA FILOTAXIA

Tanto en la doctrina de la Metamorfosis como en el enunciado de la Teoría de la Espiral tenemos . . . dos notables generalizaciones que provienen originalmente de la fértil imaginación de Goethe y han llegado a nosotros, pasando a través del caos de la filosofía natural . . . y tenemos que actualmente forman los fundamentos de nuestro punto de vista acerca de la morfología de las plantas.

A. H. Church (1865 - 1937)

[Church 1, pág. 1]

Los números de Fibonacci se aplican en la botánica al fenómeno que se llama *filotaxia* (literalmente "disposición de hojas"). En algunos árboles, como el olmo y el tilo americano, se presentan las hojas de una rama alternamente en dos lados opuestos, y hablamos de "filotaxia de $\frac{1}{2}$". En otros, como el avellano y la haya, pasamos de una hoja a la otra por medio de una torcedura en la que interviene la rotación de un tercio de giro, y hablamos entonces de "filotaxia de $\frac{1}{3}$". De la misma manera, el roble y el albaricoquero exhiben filotaxia de $\frac{2}{5}$, el álamo y el peral de $\frac{3}{8}$, el sauce y el almendro $\frac{5}{13}$, y lo mismo se puede decir de los demás. Reconocemos que las fracciones representan cocientes de números alternados de Fibonacci, pero también se podrían usar números consecutivos; por ejemplo, una rotación positiva que recorra $\frac{5}{8}$ de giro tiene el mismo efecto que la rotación negativa que recorre $\frac{3}{8}$ [Weyl 1, pág. 72].

Otra manifestación de la filotaxia la constituye la disposición de los flósculos del girasol, o la de las escamas de un cono de pino, que se encuentran en verticilos espirales o helicoidales (o "parastiquios"). Esos verticilos son evidentes sobre todo en la piña (figura 11.5*a*) cuyas celdas más o menos exagonales se encuentran dispuestas en filas visiblemente y en varias direcciones: 5 hileras paralelas que ascienden suavemente hacia la derecha, 8 hileras que ascienden con un poco más de pendiente a la izquierda, y 13 hileras que suben con gran pendiente a la derecha. (A veces, se tiene que el sentido es el inverso, pero permanece la consistencia.) Si consideramos la superficie de la piña como un cilindro y la cortamos a lo largo de una recta vertical (el generador), y la extendemos sobre un plano, obtenemos una franja entre las dos paralelas que representan dos versiones del corte vertical. En la figura 11.5*b* se han tomado las paralelas como las rectas $x = 0$ y $x = 1$, y las celdas exagonales, que se han numerado sucesivamente según sus distancias al eje de las x, aparecen como regiones de Dirichlet de una celosía (§ 4.1). El punto de la celosía que se ha señalado con el 0 aparece en el origen y se vuelve a presentar en (1, 0), de manera que el cilindro parece rodar por el plano. El punto señalado con el 1 tiene por coordenadas (τ^{-1}, h), donde queda por calcular la altura h; y para todos los valores de n, el enésimo punto de la celosía es (x, y), donde $y = nh$ y x es la parte fraccionaria de $n\tau$ (o de $n\tau^{-1}$), a saber,

$$x = n\tau - [n\tau],$$

donde $[n]$ es la parte entera. La repetición de la franja tiene como efecto que el número n aparece en el punto

$$(n\tau + m, nh),$$

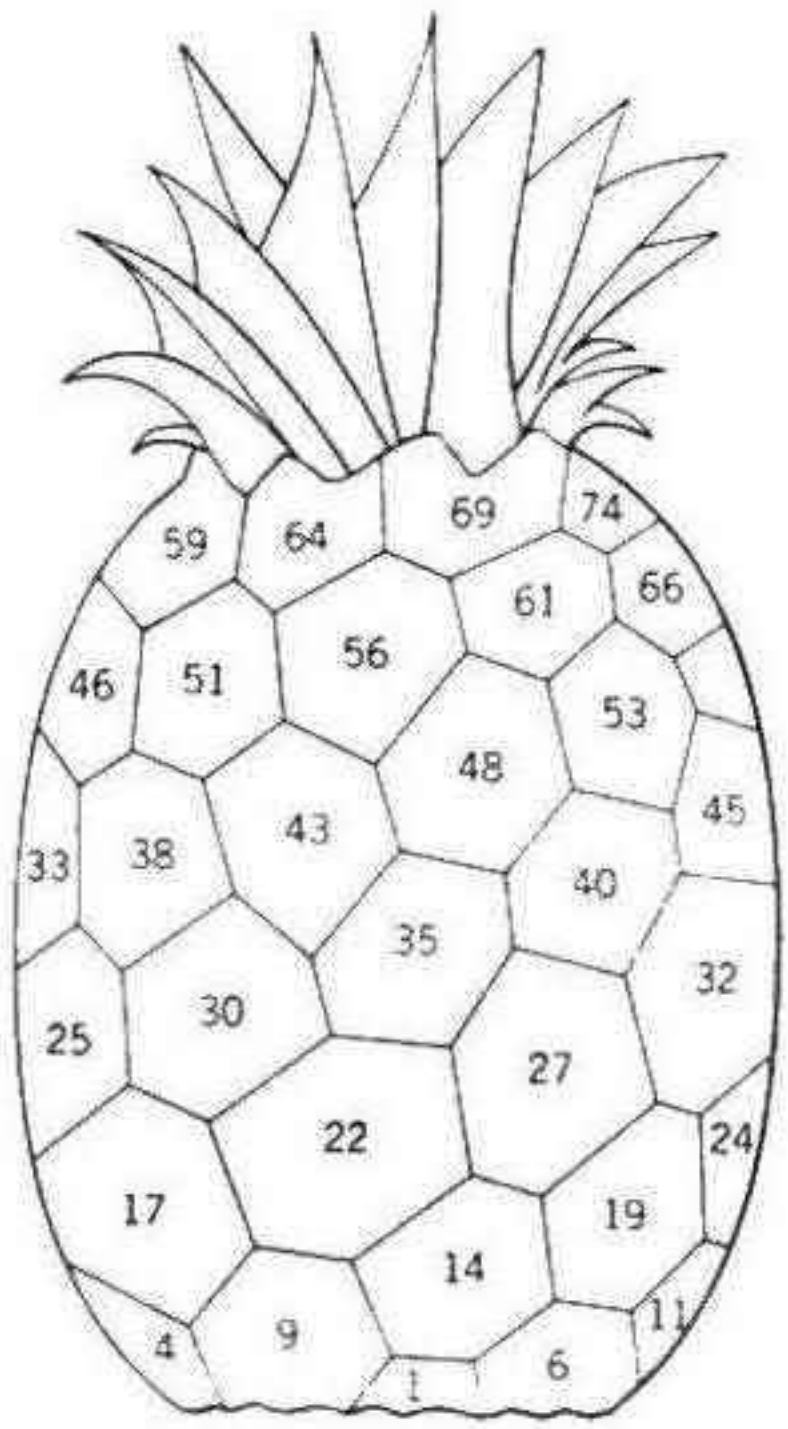


Figura 11.5a

para todos los enteros n y m y tenemos que los números de cada hilera recta se encuentran en progresión aritmética. Cuando se envuelve el cilindro con el plano, la recta se convierte en una *hélice*, con la forma del barandal de una escalera de caracol.

Puesto que las razones f_{k+1}/f_k de números consecutivos de Fibonacci convergen hacia τ, el número $f_k\tau$ es casi un entero (a saber, f_{k+1}), es decir, su parte fraccionaria es pequeña. Por lo tanto, uno de los puntos marcado con f_k, ha de estar cerca del eje de las y (sobre todo cuando los valores de k son grandes) y las hileras que más se aproximan a la vertical son aquellas en las que la diferencia de las progresiones aritméticas está compuesta por números de Fibonacci.

Un arreglo así es posible para cualquier valor positivo de h. En la figura 11.5*b* se ha escogido el valor $\frac{1}{150}$. Mediante comprobaciones encontramos rápidamente que este tamaño es más o menos el indicado para asegurarnos que los números en la vecindad de 0 son de Fibonacci, a saber, 5, 13, 8 y sus negativos, como en una piña (figura 11.5*a*). Dicho de otra manera, las hileras más obvias (más cerca un número de otro) son aquéllas en las que la

progresión aritmética tiene la razón $f_6 = 8$. El efecto del incremento de h consistiría en una disminución del ángulo obtuso entre las direcciones 05 y 08, de manera que en un determinado momento se convirtiera en un ángulo recto, y entonces la región de Dirichlet sería un rectángulo, en lugar de un exágono. De la misma manera, el efecto de la disminución del valor de h consiste en el incremento del ángulo entre las direcciones de 8 y 13, de manera que llegado cierto momento tendríamos aquí un ángulo recto, y después, el siguiente número de Fibonacci, 21, aparecería como vecino al 0.

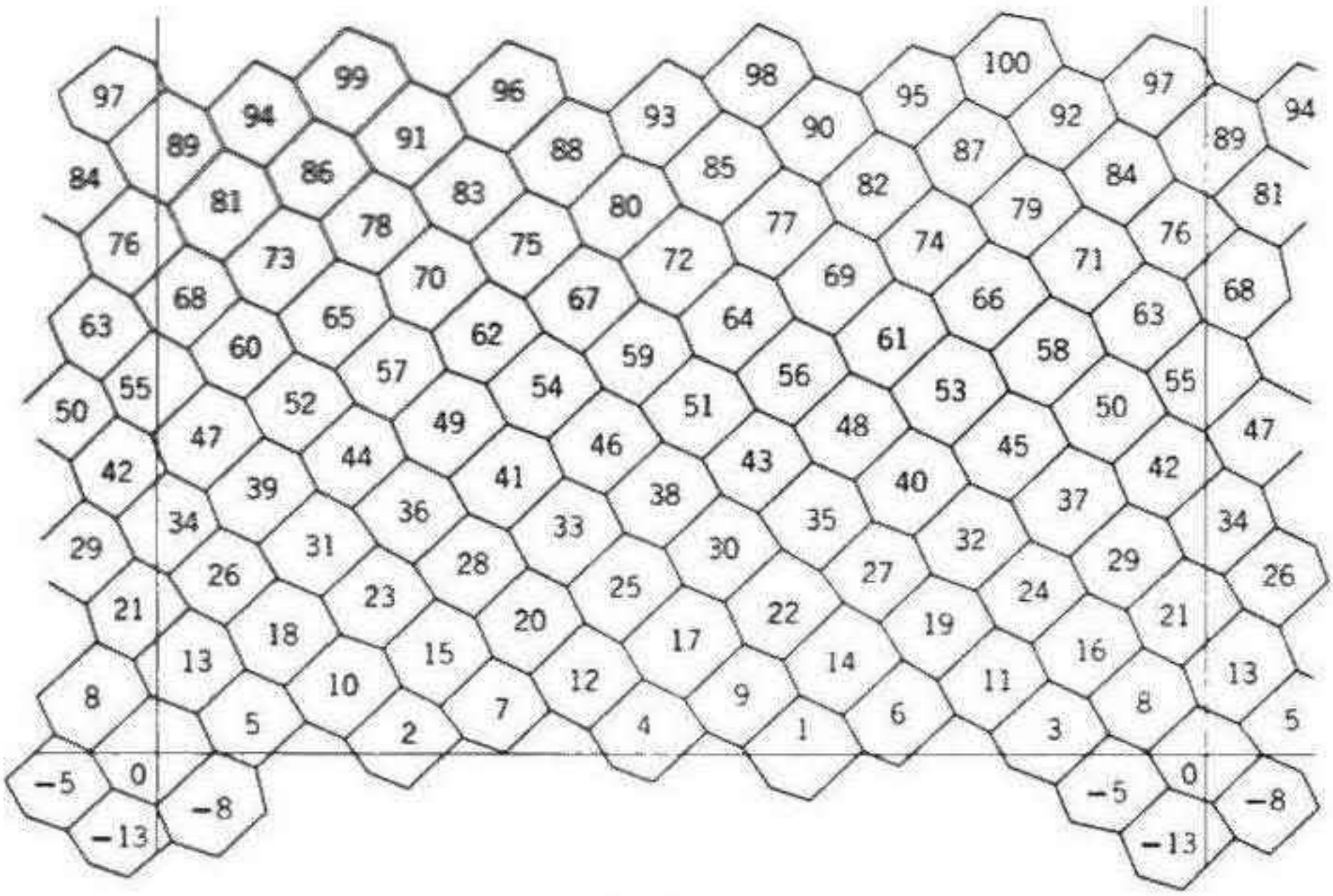


Figura 11.5b

Con el objeto de determinar los valores críticos de h para los que ocurren transiciones, buscaremos como condición que los puntos f_k y f_{k+1} estén en direcciones perpendiculares desde 0, es decir, la condición de que los puntos

$$(f_k\tau - f_{k+1}, f_k h), \ (f_{k+1}\tau - f_{k+2}, f_{k+1}h)$$

se encuentren en direcciones perpendiculares con respecto a (0, 0). Por 8.22, esta condición consiste en

$$(f_k\tau - f_{k+1})(f_{k+1}\tau - f_{k+2}) + f_k f_{k+1} h^2 = 0.$$

Por medio de 11.12, 11.41, 11.42, a continuación 11.43, 11.44 y por último 11.46, deducimos

$$\begin{aligned} f_k f_{k+1} h^2 &= (f_k^2 + f_{k+1}^2)\,\tau - f_{k+1} g_{k+1} \\ &= f_{2k+1}\,\tau - f_{2k+2} = \tau^{-(2k+1)}, \end{aligned}$$

por lo que

11.51 $$h = (f_k f_{k+1})^{-1}\,\tau^{-(k+1)}.$$

En conclusión, tenemos que los números de verticilos en diversas direcciones (que en el caso de la piña son 5, 8, 13) son f_{k-1}, f_k, f_{k+1} cuando los valores de h se encuentran entre

$$(f_{k-1}f_k)^{-1}\,\tau^{-(k-1)} \quad \text{y} \quad (f_kf_{k+1})^{-1}\,\tau^{-(k+1)}.$$

Como un valor "estándar" entre los valores críticos que hemos citado, es natural que escojamos

$$h = f_k^{-1}\,\tau^{-k}.$$

Por ejemplo, el valor que se escogió en la figura 11.5*b* es aproximadamente

$$\frac{\tau^{-6}}{f_6} = \frac{0.055727\ldots}{8} = 0.006966\ldots.$$

El mismo patrón de arreglo, si se interpretara como la disposición de las hojas de una rama, podría ser llamado justificadamente filotaxia de $\frac{5}{13}$, o, en el caso general, filotaxia de f_{k-1}/f_{k+1}. Pues tenemos que, como señala Church [**1**, pág. 5]: "Bonnet . . . veía con toda claridad en el caso del albaricoquero que los ciclos sucesivos, en número de $\frac{2}{3}$, no se encontraban verticalmente superpuestos, en realidad." De acuerdo con el difunto A. M. Turing, el avance gradual de un par de "números parastíquicos" a otro, en correspondencia con la disminución continua de h, puede tener lugar durante el crecimiento de una sola planta. (Por conveniencia, tomamos como unidad la medida del perímetro de la base; así, h disminuirá cuando el crecimiento del cilindro ocurra con más rapidez en su anchura que en su longitud.)

Al reemplazar el cilindro por un cono, como sucede en el cono de pino, las rectas del plano ya no representan hélices, sino más bien *concoespirales* [Moseley **1**]. Si se deja que los generadores del cono sean cada vez más próximos a la perpendicular a su eje, nos acercamos a una situación límite en la que las concoespirales se vuelven espirales equiangulares planas, que se cortan unas a otras a los mismos ángulos que las hélices del cilindro, es decir, a los mismos ángulos que las rectas en el plano de la celosía [Church **1**, pág. 58]. Números de Fibonacci tan grandes como $f_{10} = 55$, $f_{11} = 89$, $f_{12} = 144$ surgen como los números de las espirales que se aprecian en ciertas variedades del girasol [véase Church **1**, láminas V, VII, XIII, y, sobre todo, la lámina VI]. Sin embargo, se debe admitir que en algunas plantas los números no pertenecen a la secuencia de las f, sino a la de las g [Church **1**, lámina XXV], o incluso a las secuencias más anómalas

$$3, 1, 4, 5, 9, \ldots; \qquad 5, 2, 7, 9, 16, \ldots$$

[Church **1**, lámina IX]. Así, debemos encarar el hecho de que la filotaxia no es una *ley* universal, sino una *tendencia* que predomina de manera fascinadora.

EJERCICIO

Dibújese una versión de la figura 11.5*b* donde $h = \frac{1}{2}$. ¿Se acerca esto al valor que dimos por 11.51 cuando $k = 1$?

Parte III

12

Geometría ordenada

Sin lugar a dudas, durante los últimos 2000 años los libros que se han leído más son la Biblia y los Elementos. Los eruditos suelen interesarse en desentrañar los diferentes relatos de la Creación que se entretejen en el Libro del Génesis. De la misma manera, debido a que Euclides reunió su material a partir de diversas fuentes, no es sorprendente que podamos extraer de Euclides dos geometrías que se bastan a sí mismas y son diferentes en su fundamentación lógica, es decir, en sus conceptos primitivos y axiomas. Se les conoce con los nombres de geometría *absoluta* y geometría *afín*. Las describiremos con brevedad en § 12.1 y dedicaremos el resto de este capítulo a las proposiciones que pertenecen a ambas: se trata de proposiciones tan "obvias" y fundamentales que Euclides no se molestó en mencionarlas.

12.1 LA EXTRACCION DE DOS GEOMETRIAS DISTINTAS DE EUCLIDES

Perseguir una idea es tan emocionante como perseguir una ballena.

Henry Norris Russell (1877-1957)

La geometría absoluta, que fue reconocida por primera vez por Bolyai (1802-1860), es la parte de la geometría euclidiana que depende solamente de los primeros cuatro postulados, sin el quinto. Así, incluye los postulados I.1-28, III.1-19, 25, 28-30; IV.4-9 (donde se modifica adecuadamente la definición de "cuadrado"). El motivo de estudiar la geometría absoluta consiste en que estas proposiciones no solamente son válidas en la geometría euclidiana sino en la hipérbolica, que estudiaremos en el capítulo

16. En pocas palabras, la geometría absoluta es la geometría que no supone la existencia de una paralela única (por un punto dado) a una recta dada.

Por otra parte, en la geometría afín, que reconoció por primera vez Euler (1707–1783), la paralela única tiene un papel muy importante. Los postulados tercero y cuarto de Euclides pierden su sentido, pues nunca se mencionan los círculos ni se miden los ángulos. De hecho, las únicas isometrías admisibles son los semigiros y las traslaciones. Las proposiciones afines de Euclides son las que se preservan en la proyección paralela de un plano a otro [Yaglom 2, pág. 17]: por ejemplo, I.30, 33–45, y VI.1, 2, 4, 9, 10, 24–26. La importancia de la geometría afín ha sido subrayada recientemente por la observación de que sus proposiciones no son válidas solamente en la geometría euclidiana, sino en la geometría de Minkowski del tiempo y el espacio, que Einstein empleara en su teoría restringida de la relatividad.

Puesto que cada una de las proposiciones de Euclides es o bien afín, o bien absoluta, o bien ninguna de las dos cosas, podríamos empezar por imaginar que ambas geometrías (que estudiaremos en los capítulos 13 y 15, respectivamente) no tienen nada en común, con la excepción de los postulados I y II. Veremos, sin embargo, en el presente capítulo, que hay un núcleo impresionante de proposiciones que pertenece a ambas con toda propiedad. La idea esencial en el núcleo es la de *mediación*, que Euclides empleó en su famosa definición:

Una recta (un segmento de) es aquella que queda uniformemente entre sus extremos.

Esto nos sugiere la posibilidad de que consideremos la mediación como concepto primitivo, de manera que lo apliquemos para definir un segmento de recta como el conjunto de todos los puntos entre dos puntos dados. Y con el mismo espíritu podemos extender el segmento hasta una recta infinita. Entonces, si B está entre A y C, podemos decir que los tres puntos A, B, C se encuentran *ordenados* en su recta. Podemos extender la relación de orden de tres puntos a cuatro o más.

El mismo Euclides no hace uso explícitamente del orden cuando no se relaciona con la medida, al decir que una magnitud puede ser mayor o menor que otra. Fue Pasch, en 1822, el primero en señalar que la geometría del orden se podría desarrollar sin hacer referencia a la medida. Su sistema de axiomas fue mejorado gradualmente por Peano (1889), Hilbert (1899) y Veblen (1904).

Desde el punto de vista etimológico, una "geometría sin medidas" parece una contradicción de términos. Pero veremos que en el paso de axiomas y teoremas sencillos a teoremas "interesantes" se parece al trabajo de Euclides, si no en los detalles, sí en el espíritu.

Esta geometría básica, que es el fundamento común de las gometrías afín y absoluta, tiene suficiente importancia para poseer un nombre propio. El de geometría *descriptiva*, que empleó Bertrand Russell [1, pág. 382] no fue bien elegido, pues la palabra ya tenía un significado diferente. De acuerdo con ello, emplearemos la denominación de Artin [1, pág. 73] y hablaremos de geometría *ordenada*.

Seguiremos el desarrollo riguroso lo suficiente para que el lector pueda

apreciarlo sin que se aburra. La historia completa es bastante larga, y Veblen [1] y Forder [1, capítulo II y el *Canadian Journal of Mathematics*, **19**, (1967), págs. 997–1000] la han relatado adecuadamente.

Es importante que recordemos que, en este tipo de trabajo, habremos de definir todos los conceptos que empleemos (con la excepción de los primitivos) y demostrar todo lo que se afirma (con la excepción de los axiomas), sin que nos importe cuán "obvios" nos parezcan.

EJERCICIOS

1. Consideremos la razón de dos longitudes sobre una recta. ¿Pertenece a la geometría absoluta, a la afín o a ambas? (*Indicación*: en "una dimensión", es decir, cuando consideramos solamente los puntos de una recta, desaparece la distinción entre *afín* y *absoluta*.)

2. Señálese un teorema euclidiano que no pertenezca ni a la geometría afín ni a la absoluta.

3. La concurrencia de las medianas de un triángulo (1.41) es un teorema que pertenece a ambas geometrías, la afín y la absoluta. ¿A qué geometría pertenece el resto de § 1.4?

4. ¿Que geometría se ocupa de (a) los paralelogramos? (b) los polígonos regulares? (c) el problema de Fagnano (§ 1.8)?

12.2 MEDIACION

Un estudio del orden . . . se ha convertido en una necesidad esencial para comprender las bases de las matemáticas.

Bertrand Russell (1872–1970)

[Russell 1, pág. 199]

En el desarrollo de Pasch de la geometría ordenada, simplificado por Veblen, los únicos conceptos primitivos son los *puntos* A, B . . . y la relación de *mediación* $[ABC]$, que nos dice que B está entre A y C. Si B no está entre A y C, decimos simplemente "no $[ABC]$". Hay diez axiomas (12.21–12.27, 12.42, 12.43 y 12.51) que iremos introduciendo según se necesiten entre los diversos teoremas y definiciones.

AXIOMA 12.21 *Hay por lo menos dos puntos.*

AXIOMA 12.22 *Si A y B son dos puntos distintos, hay por lo menos un punto C tal que $[ABC]$.*

AXIOMA 12.23 *Si $[ABC]$, entonces A y C son distintos: $A \neq C$.*

AXIOMA 12.24 *Si $[ABC]$, entonces $[CBA]$ pero no $[BCA]$.*

TEOREMA 12.241 *Si $[ABC]$ entonces no $[CAB]$.*
Demostración. Por el axioma 12.24, $[CAB]$ implicaría no $[ABC]$.

TEOREMA 12.242 *Si $[ABC]$, entonces $A \neq B \neq C$* (es decir, a partir del axioma 12.23, los tres puntos son distintos).
Demostración. Si $B = C$, las dos conclusiones del axioma 12.24 se contradicen. De la misma manera, no podemos tener $A = B$.

DEFINICIONES. Si A y B son dos puntos distintos, el *segmento* AB es el conjunto de los puntos P para los que $[APB]$. Decimos que ese punto P está *en* el segmento. Posteriormente aplicaremos la misma preposición a otros conjuntos, como las "rectas".

TEOREMA 12.243 *Tanto A como B no están en el segmento AB.*
Demostración. Si A o B estuvieran en el segmento, podríamos tener $[AAB]$ o $[ABB]$, lo que contradice 12.242

TEOREMA 12.244 *Segmento AB = segmento BA.*
Demostración. Por el axioma 12.24, $[APB]$ implica $[BPA]$.

DEFINICIONES. El intervalo $\overline{AB}$ es el segmento AB más sus *extremos* A y B:

$$\overline{AB} = A + AB + B.$$

El *rayo* A/B ("desde A y en dirección opuesta a B") es el conjunto de puntos P para los que $[PAB]$. La recta AB es el intervalo $\overline{AB}$ más los dos rayos A/B y B/A:

$$\text{recta } AB = A/B + \overline{AB} + B/A.$$

COROLARIO 12.2441 Intervalo $\overline{AB}$ = intervalo $\overline{BA}$; recta AB = recta BA.

AXIOMA 12.25 *Si C y D son puntos distintos en la recta AB, entonces A está en la recta CD.*

TEOREMA 12.251 *Si C y D son puntos distintos en la recta AB entonces*

$$\text{recta } AB = \text{recta } CD.$$

Demostración. Si A, B, C, D no son todos distintos, supongamos que $D = B$. Para demostrar que la recta AB = la recta BC, sea X un punto cualquiera de BC con la excepción de A y B. Por 12.25, A, como X, está en BC. Por lo tanto, B está en AX, y X está en AB. Así, todos los puntos de AB son también de BC. Así, $AB = BC$. Y finalmente, si A, B, C, D son distintos, tenemos que $AB = BC = CD$.

COROLARIO 12.2511 Dos puntos distintos quedan en una sola recta. Dos rectas distintas (si acaso existen) no tienen más que un punto en común. (El punto común F se llama punto de intersección, y se dice que las rectas se *encuentran* o *cortan* en F.)

COROLARIO 12.2512 Tres puntos distintos cualquiera A, B, C en una recta satisfacen una sola de las relaciones $[ABC]$, $[BCA]$, $[CAB]$.

AXIOMA 12.26 *Si AB es una recta, hay un punto C que no está en ella.*

TEOREMA 12.261 *Si C no está en la recta AB, entonces A no está en BC, ni B en CA: las tres rectas BC, CA, AB son distintas.*
Demostración. Por 12.25, si A estuviera en BC, C estaría en AB.

DEFINICIONES. Los puntos que están en la misma recta reciben el calificativo de *colineales*. Tres puntos no colineales, A, B, C determinan un

triángulo ABC que consiste en estos tres puntos, llamados *vértices*, junto con los tres segmentos BC, CA, AB, que se llaman *lados*.

AXIOMA 12.27 *Si ABC es un triángulo y $[BCD]$ y $[CEA]$, hay, entonces, en la recta DE un punto F para el que $[AFB]$.* (Véase la figura 12.2*a*.)

TEOREMA 12.271 *Entre dos puntos distintos hay otro punto.*

Demostración. Sean A y B nuestros dos puntos. Por 12.26 hay un punto E que no está en la recta AB. Por 12.22 hay un punto C para el que $[AEC]$. Por 12.251, la recta AC es igual que la recta AE. Por 12.261 (aplicado a ABE), B no está en esa recta: por lo tanto, ABC es un triángulo. Nuevamente por 12.22, hay un punto D para el que $[BCD]$. Por 12.27 hay un punto F entre A y B.

TEOREMA 12.272 *En la notación del axioma 12.27, $[DEF]$.*

Demostración. Puesto que F está en la recta DE, tenemos por 12.2512 que hay solamente 5 posibilidades: $F = D$, $F = E$, $[EFD]$, $[FDE]$, $[DEF]$. Cualquiera de las dos primeras hace a A, B, C colineales.

Si $[EFD]$, podemos aplicar 12.27 al triángulo DCE donde $[CEA]$ y $[EFD]$ (figura 12.2*b*), de manera que obtengamos X en AF tal que $[DXC]$. Como AF y CD no pueden encontrarse sino una vez, tenemos $X = B$, de modo que $[DBC]$. Como $[BCD]$, esto contradice 12.24.

De la misma manera (figura 12.2*c*) no podemos tener $[FDE]$. Sólo nos queda como posibilidad $[DEF]$.

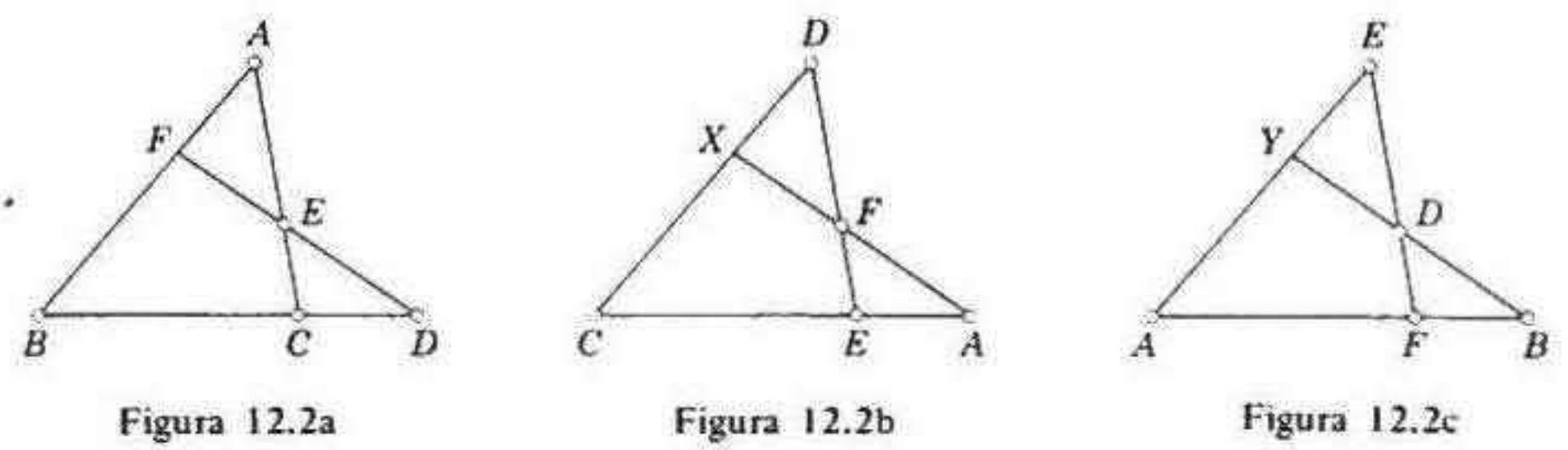


Figura 12.2a Figura 12.2b Figura 12.2c

Esta demostración es muy característica; nos contentaremos entonces con dar los siguientes teoremas sin demostración [Veblen 1, págs. 9–15; Forder 1, págs. 49–55].

12.273 *Una recta no puede cortar los tres lados de un triángulo.* (Recordemos que los "lados" no son intervalos ni rectas, sino solamente segmentos.)

12.274 *Si $[ABC]$ y $[BCD]$, entonces $[ABD]$.*

12.275 *Si $[ABC]$ y $[ABD]$, y $C \neq D$, entonces $[BCD]$ o $[BDC]$ y $[ACD]$ o $[ADC]$.*

12.276 *Si $[ABD]$ y $[ACD]$ y $B \neq C$, entonces $[ABC]$ o $[ACB]$.*

12.277 *Si* $[ABC]$ *y* $[ACD]$, *entonces* $[BCD]$ *y* $[ABD]$.

DEFINICION. Si $[ABC]$ y $[ACD]$, escribiremos $[ABCD]$.

Se advierte en seguida que este orden de cuatro puntos posee todas las propiedades que podríamos esperar, como, por ejemplo, si $[ABCD]$, entonces $[DCBA]$, pero todos los demás órdenes serán falsos.

Un punto cualquiera O en un segmento AB descompone el segmento en otros dos: AO y OB. (El empleo que hacemos aquí de la palabra "descompone" tiene un sentido técnico [Veblen **1**, pág. 21], y queremos decir que todo punto del segmento AB con la excepción de O está en solamente uno de los dos segmentos "menores".) Un punto cualquiera O en un rayo desde A descompone el rayo en un segmento y un rayo: AO y O/A. Un punto cualquiera en una recta la descompone en dos rayos "opuestos"; si AOB, los rayos serán O/A y O/B. El rayo O/A, que contiene a B, recibe en ocasiones la denominación más conveniente del *rayo* OB.

Para un entero cualquiera $n > 1$, hay n puntos colineales distintos que descomponen la recta común a ellos en dos rayos y $n-1$ segmentos. Podemos llamar a los puntos $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ de manera que los dos rayos sean P_1/P_n, P_n/P_1, y los $n-1$ segmentos sean

$$P_1P_2,\ P_2P_3,\ \ldots,\ P_{n-1}P_n,$$

tales que cada uno de ellos no contiene a ninguno de los puntos. Decimos que los puntos están en el *orden* $P_1P_2\ldots P_n$, y escribimos $[P_1P_2\ldots P_n]$. Son condiciones necesarias y suficientes para esto que

$$[P_1P_2P_3],\quad [P_2P_3P_4],\ \ldots\ldots\quad [P_{n-2}P_{n-1}P_n].$$

Naturalmente, el mejor desarrollo lógico de cualquier tema emplea el conjunto más sencillo o "más débil" de axiomas. (Sucede lo peor cuando llegamos al extremo opuesto y lo suponemos todo ¡sin que haya desarrollo alguno!) En su formulación original del axioma 12.27 [Pasch y Dehn **1**, pág. 2 : "IV. Kernsatz"] Pasch hacía esta formulación, mucho más fuerte: si una recta del plano de un triángulo dado encuentra uno de sus lados, también encuentra otro lado (o, de no ser así, pasa por uno de sus vértices). La formulación de Peano, que hemos adoptado, supera a ésta en dos aspectos. La palabra plano (que no definiremos hasta § 12.4) no se emplea en absoluto, y la recta DE penetra el triángulo de una manera especial, a saber, tal que antes de entrar en el lado CA, proviene de un punto D que está en C/B. Con la misma facilidad podría decirse que proviene de un punto en A/B (que es igual en cuanto intercambiamos A y C) o de un punto en B/A o B/C (con lo que todo cambia considerablemente). La última posibilidad (con un ligero cambio de notación) es a la que atiende el teorema siguiente (12.278). El axioma 12.27 es "apenas suficientemente fuerte"; pues, aunque nos permite deducir la afirmación 12.278 que, aparentemente, tiene la misma fuerza, no podríamos invertir los papeles: ¡si intentáramos usar 12.278 como axioma, no podríamos deducir 12.27 como teorema!

TEOREMA 12.278 *Si* ABC *es un triángulo y* $[AFB]$ *y* $[BCD]$, *hay, en la recta* DF, *un punto* E *tal que* $[CEA]$.

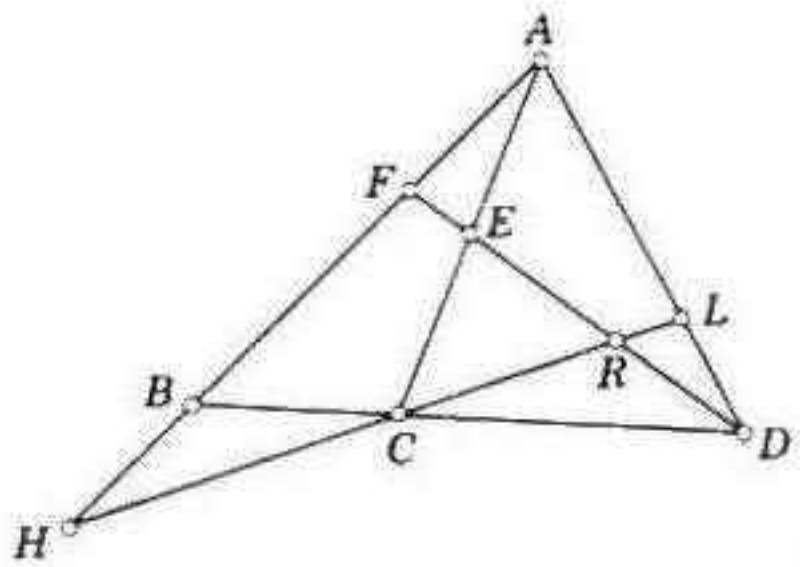


Figura 12.2d

Demostración. Tómese H en B/F, (como se ha hecho en la figura 12.2*d*) y considérese el triángulo DFB donde $[FBH]$ y $[BCD]$. Por 12.27 y 12.272, hay un punto R para el que tenemos $[DRF]$ y $[BCD]$. Por 12.274, $[AFB]$ y $[FBH]$ implican $[AFH]$. Tenemos así un triángulo DAF en el que $[AFH]$ y $[FRD]$. Por 12.27 y 12.272 nuevamente, hay un punto L tal que $[DLA]$ y $[HRL]$. Por 12.277, $[HCR]$ y $[HRL]$ implican $[CRL]$. Tenemos así un triángulo CAL en el que $[ALD]$ y $[LRC]$. Por tercera vez, acudimos a 12.27 para señalar que en la recta DR ($= DF$) hay un punto E para el que $[CEA]$.

EJERCICIOS

1. Una recta contiene una infinidad de puntos.
2. Hemos definido un segmento como un conjunto de puntos. En el desarrollo interior, ¿a partir de qué momento podemos afirmar que este conjunto nunca es el *vacío*? [Forder 1, pág. 50.]
3. Al demostrar 12.272 tuvimos que señalar que la relación $[FDE]$ conduce a una contradicción. Hágase lo mismo por medio de la aplicación de 12.27 al triángulo BFD (en lugar del EAF).
4. Dado un conjunto finito de rectas, hay una infinidad de puntos que no están en ninguna de ellas.
5. Si ABC es un triángulo y $[BLC]$, $[CMA]$, $[ANB]$, hay entonces un punto E para el que $[AEL]$ y $[MEN]$. [Forder 1, pág. 56.]
6. Si ABC es un triángulo, los tres rayos B/C, A/C, A/B tienen una *transversal* (es decir, una recta que los encuentra a todos). (K. B. Leisenring.)
7. Si ABC es un triángulo, los tres rayos B/C, C/A, A/B carecen de transversal.

12.3 EL PROBLEMA DE SYLVESTER ACERCA DE LOS PUNTOS COLINEALES

Casi cualquier campo de las matemáticas ofrecía un mundo de descubrimiento y encanto para Sylvester.

[E. T. Bell 1, pág. 433]

Tal vez algunos lectores piensen que hemos estado empleando axiomas evidentes en sí mismos para demostrar resultados triviales. Este sentimiento

de irritación probablemente desaparezca si señalamos que la maquinaria que hemos desarrollado hasta aquí tiene suficiente potencia para tratar eficazmente la conjetura de Sylvester (§ 4.7), que durante cuarenta años mantuvo a los matemáticos de todo el mundo en el desconcierto. Este problema de colinealidad claramente pertenece a la geometría ordenada. La demostración euclidiana de Kelly acude al concepto de la distancia, que es bastante extraño: equivale a emplear un mazo para partir una almendra. El cascanueces apropiado consiste en el argumento siguiente.

TEOREMA. *Si se tiene que n puntos no son todos colineales, hay por lo menos una recta que contiene exactamente a dos de ellos.*

Demostración. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ los n puntos, y los hemos nombrado de manera que los tres primeros no sean colineales (figura 12.3*a*). Las rectas que unen P_1 con todos los demás puntos del conjunto encuentran la recta P_2P_3 en no más de $n-1$ puntos (donde incluimos a P_2 y P_3). Sea Q *otro* punto cualquiera de la recta. Entonces la recta P_1Q contiene a P_1 pero a ningún otro P_i.

Las rectas que unen los pares de puntos P encuentran la recta P_1Q en no más de $\binom{n-1}{2} + 1$ puntos (donde incluimos a P_1 y Q). Sea P_1A uno de los segmentos que se presentan al descomponer la recta por medio de esos puntos. (Es posible que $A = Q$.) Entonces ninguna de las rectas de unión P_iP_j podrá encontrar el segmento "vacío" P_1A. Por definición, A está por lo

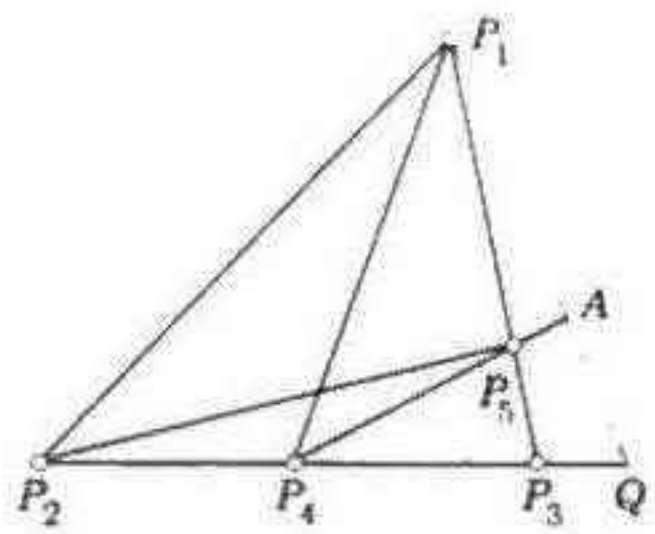


Figura 12.3a

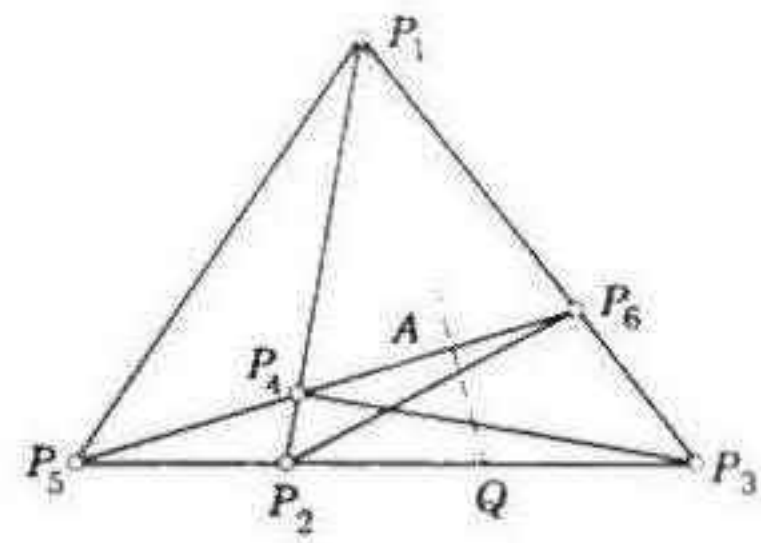


Figura 12.3b

menos en una de las rectas de unión, que puede ser P_4P_5. Si P_4 y P_5 son los únicos puntos P en esta recta (como se tiene en la figura 12.3*a*), nuestra tarea ha terminado. De no ser así, tendremos una recta de unión que pasa por A y contiene por lo menos tres de los puntos P, a los que podemos llamar P_4, P_5, P_6, cuyo orden es tal que el segmento AP_5 contiene a P_4 pero no a P_6. (Puesto que A descompone la recta en dos rayos opuestos, y uno de estos contiene por lo menos a dos de los tres puntos P, esta denominación especial siempre será posible. Véase la figura 12.3*b*.) Podemos demostrar ahora que la recta P_1P_5 no contiene más que dos de estos puntos.

Lo haremos mediante *reductio ad absurdum*. Si la recta P_1P_5 contuviera, digamos, a P_7, mediante 12.27 y 12.278 podemos deducir que el segmento P_1A encuentra una de las rectas de unión, a saber, P_6P_7 o P_4P_7. De hecho, encuentra P_6P_7 si $[P_1P_7P_5]$ (como en la figura 12.3*c*) y

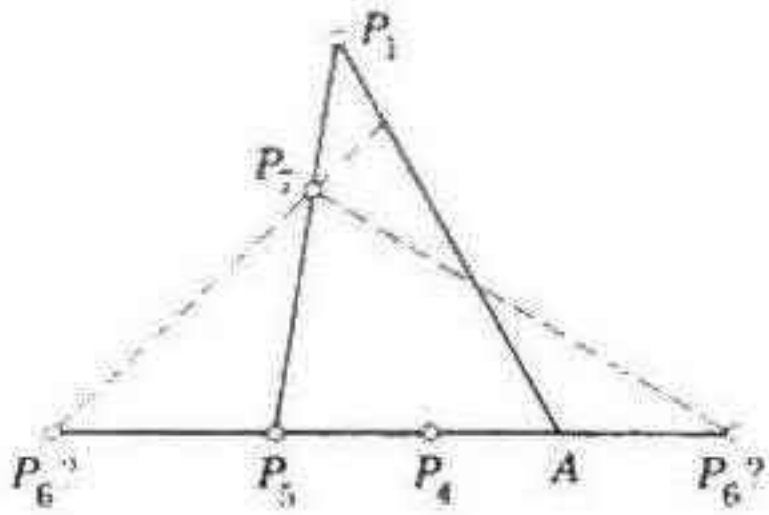


Figura 12.3c

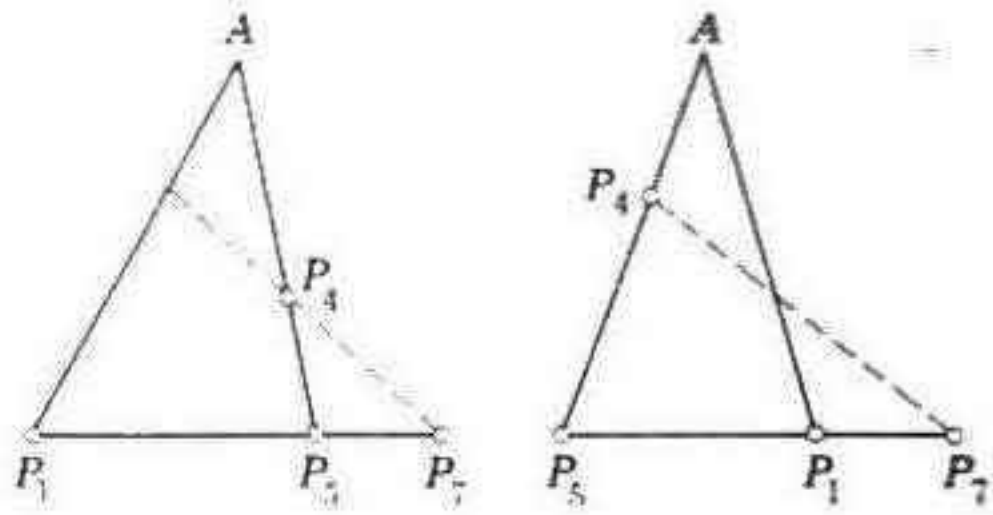


Figura 12.3d

encuentra P_4P_7 si $[P_1P_5P_7]$ o $[P_5P_1P_7]$ (como en la figura 12.3*d*). En ambos casos se contradice nuestra afirmación acerca del segmento "vacío".

De esta manera hemos encontrado en todas las circunstancias posibles una recta (P_4P_5 o P_1P_5) que contiene exactamente dos de los puntos P.

EJERCICIO

Justifíquese la afirmación de que las rectas de unión encuentran la recta P_1Q en no más de $\binom{n-1}{2}+1$ puntos. En el ejemplo que se muestra en la figura 12.3*b*, este número (11 como máximo) es solamente 5; ¿por qué? (El símbolo $\binom{i}{j}$ representa el número de combinaciones de i objetos tomados de j en j; por ejemplo, $\binom{i}{2}$ es el número de pares, a saber $\frac{1}{2}i(i-1)$.)

12.4 PLANOS E HIPERPLANOS

Si se colocan i hiperplanos en n dimensiones de manera que n de ellas tengan un punto común y $n+1$ no lo tengan, el número de regiones en el que descomponen el espacio es

$$\binom{i}{0}+\binom{i}{1}+\binom{i}{2}+\binom{i}{3}+\ldots+\binom{i}{n}=f(n,i).$$

Ludwig Schläfli (1814–1895)

[Schläfli 1, pág. 209]

Es notable que hayamos hecho tanta geometría antes de definir el plano. Pero ahora, como dijo la Morsa, "Ha llegado el momento . . ."

DEFINICIONES. Si A, B, C son tres puntos no colineales, el *plano* ABC es el conjunto de todos los puntos que son colineales con pares de puntos de uno o dos lados del triángulo ABC. Se dice que un segmento, intervalo, rayo o recta está *en* un plano (o es *de* un plano) cuando todos sus puntos lo están.

Los axiomas del 12.21 al 12.27 nos permiten demostrar todas las

propiedades conocidas de la incidencia en un plano, incluso las dos siguientes, que Hilbert tomó como axiomas:

Tres puntos no colineales cualquiera en un plano α lo determinan por completo.

Si dos puntos diferentes de una recta a están en el plano α, entonces todos los puntos de a están en α.

DEFINICIONES. Un *ángulo* está compuesto por un punto O y dos rayos no colineales que parten de O. El punto O es el *vértice* y los rayos son los *lados* del ángulo [Veblen **1**, pág. 21; Forder **1**, pág. 69]. Si los lados son los rayos OA y OB, o a_1 y b_1, el ángulo se denota por $\angle AOB$ o a_1b_1 (o $\angle BOA$, o b_1a_1). El mismo ángulo a_1b_1 se determina por dos puntos cualquiera A y B en sus lados respectivos. Si C es un punto cualquiera entre A y B, se dice que el rayo OC queda *dentro* del ángulo.

A partir de aquí y hasta la afirmación que contiene el axioma 12.41 supondremos que todos los puntos y rectas que consideramos se encuentran en un *plano*.

Una *región convexa* es el conjunto de puntos, dos cualquiera de los que se pueden unir por medio de un segmento compuesto en su totalidad por puntos del conjunto, con la condición adicional de que cada uno de los puntos se encuentra por lo menos en dos segmentos no colineales que se componen en su totalidad por puntos del conjunto. En particular, una región *angular* es el conjunto de todos los puntos de los rayos que quedan dentro de un ángulo, y una región *triangular* es el conjunto de todos los puntos que están entre los pares de puntos de lados distintos de un triángulo. Se dice que una región angular (o triangular) se encuentra *acotada* por el ángulo (o el triángulo).

Se puede demostrar [Veblen **1**, pág. 21] que una recta cualquiera que contenga un punto de una región convexa, la "descompone" en dos regiones convexas. En particular, una recta a descompone el plano (en el que está) en dos *semiplanos*. Se dice que dos puntos están en el *mismo lado* de a si están en el mismo semiplano, o en *lados opuestos* si están en semiplanos opuestos, es decir, si el segmento que los une corta a a. En este último caso, también se dice que a *separa* ambos puntos. (Por desgracia, la palabra "lado" se emplea con dos significados diferentes, ambos muy bien establecidos en la literatura del tema. Sin embargo, el contexto siempre indica cuál estamos considerando al hablar de los dos lados de un ángulo, que son rayos, o de los dos lados de una recta, que son semiplanos.)

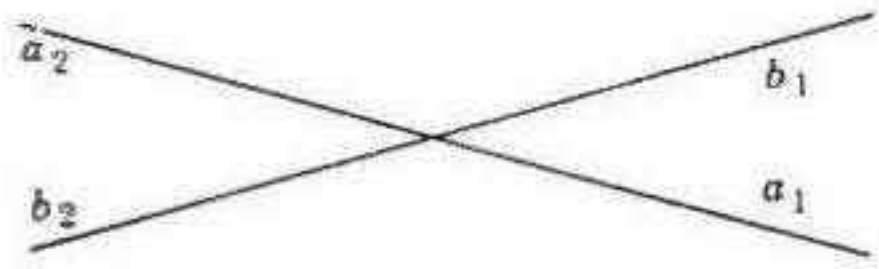


Figura 12.4a

Señalábamos en § 12.2 que un punto cualquiera O de una recta a la descompone en dos rayos, que podemos llamar a_1 y a_2. Cualquier otra recta b que pase por O queda descompuesta de la misma manera en los dos rayos b_1 y b_2, y cada uno de ellos pertenece a uno de los semiplanos que determina a. Cada uno de estos rayos descompone el semiplano que lo contiene en dos regiones angulares. Y así, dos rectas intersecantes cualquiera, a y b, descomponen entre ambas su plano en cuatro regiones angulares, que acotan los ángulos

$$a_1b_1, \quad b_1a_2, \quad a_2b_2, \quad b_2a_1,$$

como podemos observar en la figura 12.4a. Los rayos opuestos, a_1 y a_2 *separan* los rayos b_1 y b_2; y separan de la misma manera a todos los rayos que están dentro de cualquiera de los ángulos a_1b_1, b_1a_2 de todos los rayos que están dentro de cualquiera de los ángulos a_2b_2, b_2a_1. Decimos también que los rayos a_1 y b_1 separan todos los rayos que están entre ellos de a_2, b_2, y de todos los rayos que están dentro de b_1a_2, a_2b_2, o b_2a_1.

Como consecuencia de la definición de la recta, tenemos que dos puntos distintos A y B descomponen su recta en tres partes: el segmento AB y los dos rayos A/B, B/A. Parecidamente, tenemos que dos rectas no intersecantes (pero coplanares) a y b descomponen su plano en tres regiones. Una de estas regiones queda *entre* las otras dos, en el sentido de que contiene el segmento AB para todo A en a y B en b. Se dice que otra recta c está entre a y b si encuentra este segmento AB sin encontrar ni a ni b, y escribimos de manera natural $[acb]$.

12.401 *Si ABC y $A'B'C'$ son dos ternas de puntos colineales, tales que las tres rectas AA', BB', CC' no tienen punto de intersección, y si $[ACB]$, entonces $[A'C'B']$.*

La consideración análoga de una región angular nos hace advertir que

12.402 *Si ABC y $A'B'C'$ son dos ternas de puntos colineales en rectas distintas, tales que las tres rectas AA', BB', CC', tienen un punto común O que no está entre A y A', ni tampoco entre B y B' o C y C', y si $[ACB]$, entonces $[A'C'B']$.*

Necesitaremos uno o más axiomas para determinar el número de *dimensiones*. Si nos limitamos a trabajar en dos dimensiones, diremos

AXIOMA 12.41 *Todos los puntos están en un plano.*

De no ser así [Forder **1**, pág. 60], diremos

AXIOMA 12.42 *Si ABC es un plano, hay un punto D que no pertenece al mismo plano.*

En seguida definimos el tetraedro $ABCD$, compuesto por los cuatro puntos no coplanares A, B, C, D que se llaman *vértices*, los seis segmentos de unión AD, BD, CD, BC, CA, AB, que se llaman *aristas*, y las cuatro regiones triangulares BCD, CDA, DAB, ABC, que se llaman *caras*. El *espacio* (o "espacio 3") $ABCD$ es el conjunto de todos los puntos que

son colineales con pares de puntos de una o dos caras del tetraedro $ABCD$.

Ahora podemos deducir las propiedades conocidas de la incidencia de rectas y planos [Forder 1, págs. 61–65]. En particular, tenemos que cuatro puntos no coplanares cualquiera de un espacio lo determinan, y la recta que une dos puntos cualquiera del espacio está por completo en el espacio. Si Q está en el espacio $ABCD$ y P está en una de las caras del tetraedro $ABCD$, tenemos que PQ vuelve a encontrar el tetraedro en un punto que no es P.

Si nos limitamos a trabajar en tres dimensiones, diremos

AXIOMA 12.43 *Todos los puntos están en el mismo espacio.*

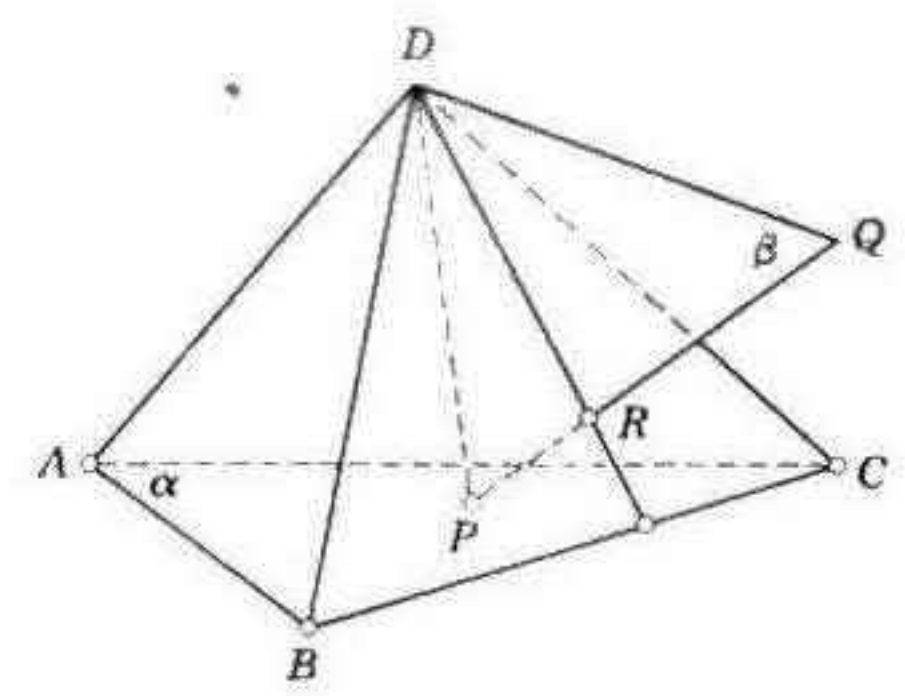


Figura 12.4b

En consecuencia:

TEOREMA 12.431 *Dos planos que se encuentran en un punto se vuelven a encontrar en otro, y así, en una recta.*

Demostración. Sea P el punto común y α uno de los planos. Tómense A, B, C en α de manera que P quede dentro del triángulo ABC. Sea DPQ un triángulo en el otro plano β (figura 12.4*b*). Si D o Q están en α, entonces α y β tienen dos puntos en común. De no ser así, PQ encuentra el tetraedro $ABCD$ en un punto R distinto de P; y DR, en β, encuentra el triángulo ABC en un punto común a α y β.

Si, por otra parte, queremos incrementar el número de dimensiones, reemplazamos 12.43 por

AXIOMA 12.44 *Si $A_0A_1A_2A_3$ es un espacio 3, hay un punto A_4 que no está en este espacio 3.*

En seguida definimos el *simplejo* $A_0A_1A_2A_3A_4$ que tiene 5 vértices A_i, 10 aristas A_iA_j $(i<j)$, 10 caras $A_iA_jA_k$ $(i<j<k)$, y 5 *celdas* $A_iA_jA_kA_l$ (que son regiones tetraedrales). El *espacio* 4 $A_0A_1A_2A_3A_4$ es el conjunto de los puntos que son colineales con respecto a pares de puntos que están en una o dos celdas del simplejo.

La extensión posible a n dimensiones (por medio de la inducción

matemática) se aclara ahora. El espacio n $A_0A_1 \ldots A_n$ se descompone en dos regiones convexas (semiespacios) por medio de un subespacio de $(n-1)$ dimensiones, como $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$, que se llama *hiperplano* (o "primo", o "plano $(n-1)$").

EJERCICIOS

1. 5 puntos coplanares cualquiera, de los que 3 no son colineales, incluyen a 4 que forman un cuadrángulo convexo.

2. Un rayo OC dentro de $\angle AOB$ descompone la región angular en dos regiones angulares, acotadas por los ángulos AOC y COB. [Veblen 1, pág. 24.]

3. Si se encuentran m rectas coplanares distintas en un punto O, descomponen su plano en $2m$ regiones angulares [Veblen 1, pág. 26].

4. Si ABC es un triángulo, las tres rectas BC, CA, AB descomponen su plano en siete regiones convexas, de las que una sola es triangular.

5. Si se colocan m rectas coplanares de manera que cada 2 de ellas pero no 3 tengan un punto en común, descomponen su plano en un número determinado de regiones convexas. Sea este número $f(2, m)$. Entonces

$$f(2, m) = f(2, m-1) + m.$$

Pero $f(2, 0) = 1$. Por lo tanto $f(2, 1) = 2$, $f(2, 2) = 4$, $f(2, 3) = 7$, y $f(2, m) = 1 + m + \binom{m}{2}$.

6. Si se colocan m planos en un espacio 3 de manera que cada 3 de ellos pero no 4 descompongan su espacio en un número (al que llamaremos) $f(3, m)$ de regiones convexas. Entonces

$$f(3, m) = f(3, m-1) + f(2, m-1).$$

Pero $f(3, 0) = 1$. Por lo tanto, $f(3, 1) = 2$, $f(3, 2) = 4$, $f(3, 3) = 8$, $f(3, 4) = 15$, y $f(3, m) = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}$. [Steiner 1, pág. 87.]

7. Obténgase el resultado análogo con respecto a m hiperplanos en un espacio n.

12.5 CONTINUIDAD

> *Nada si no es la geometría proporcionará un cordón que nos guíe por el laberinto de la composición del continuo . . . y nadie alcanzará a poseer una metafísica verdaderamente sólida si no ha pasado por ese laberinto.*
>
> G. W. Leibniz (1646–1716)
>
> [Russell 2, págs. 108–109]

Entre dos números racionales (§ 9.1) cualesquiera hay otro número racional, y por lo tanto una infinidad de números racionales; pero esto no significa que todo número real (§ 9.2) es racional. De la misma manera, entre dos puntos (12.271) cualquiera hay otro punto, y por lo tanto una infinidad de puntos; pero esto no quiere decir que los axiomas de § 12.2 nos sirvan para afirmar que la recta es "continua". De hecho, la continuidad requiere de, por lo menos, un axioma más. Hay dos actitudes muy reconocidas frente a este sutil tema. Una de ellas, que se debe a Cantor y Weierstrass, define una sucesión monótona de puntos, con un axioma que afirma que *toda sucesión monótona acotada tiene un límite* [Coxeter 2, Axioma 10.11]. La otra, que

se debe a Dedekind, obtiene un punto general de una recta como el origen común de dos rayos opuestos [Coxeter 3, pág. 162]. Su contrapartida aritmética se ejemplifica al describir $\sqrt{2}$ como el "corte" entre los números racionales cuyos cuadrados son menores que 2 y los números racionales cuyos cuadrados son mayores que 2. El axioma de Dedekind, aunque de apariencia formidable, es el de más sencilla aplicación: de manera que lo emplearemos aquí:

AXIOMA 12.51 *Para cada división de todos los puntos de una recta en dos conjuntos no vacíos, tal que ningún punto de uno queda entre dos del otro, hay un punto de uno de los conjuntos que está entre todo punto de ese conjunto y todo punto del otro.*

Se advierte de inmediato que este axioma implica varias versiones modificadas de la misma afirmación. En lugar de "los puntos de una *recta*" podríamos hablar de "los puntos de un *rayo*" o de "los puntos de un *segmento*", o de "los puntos de un *intervalo*". (En este último caso, por ejemplo, el resto de la recta está compuesto por dos rayos que se pueden agregar a los dos conjuntos de manera obvia.) Otra versión [Forder 1, pág. 299] es:

TEOREMA 12.52 *Para cada división de todos los rayos dentro de un ángulo en dos conjuntos no vacíos, tal que ningún rayo de uno queda entre dos rayos del otro, hay un rayo de uno de los conjuntos que queda entre todo rayo de ese conjunto y todo rayo del otro conjunto.*

Para demostrar esto en relación con un ángulo $\angle AOB$, consideramos la sección de todos los rayos por medio de la recta AB, y aplicamos la versión "para segmentos" de 12.51 al segmento AB.

12.6 PARALELISMO

> *Durante las últimas semanas he comenzado a escribir mis propias Meditaciones, que en algunas partes ya tienen casi 40 años de existencia. Como nunca las había escrito, he tenido que repasar mentalmente tres o cuatro veces el asunto desde el principio.*
>
> C. F. Gauss (1777–1855)
>
> (Carta a H. K. Schumacher, 17 de mayo de 1831, según la versión inglesa de Bonola [1, pág. 67])

La idea de definir dos rayos paralelos a una recta (en sentidos opuestos) que pasan por el mismo punto, fue desarrollada de manera independiente por Gauss, Bolyai y Lobachevsky. El tratamiento que le daremos aquí se parece sobre todo al punto de vista de Gauss.

TEOREMA 12.61 *Para un punto cualquiera A y una recta cualquiera r que no pase por A, hay precisamente dos rayos que parten de A, en el plano*

Ar, que no encuentran a r y que separan todos los rayos que parten de A y encuentran a r de todos los demás rayos que no lo hacen.

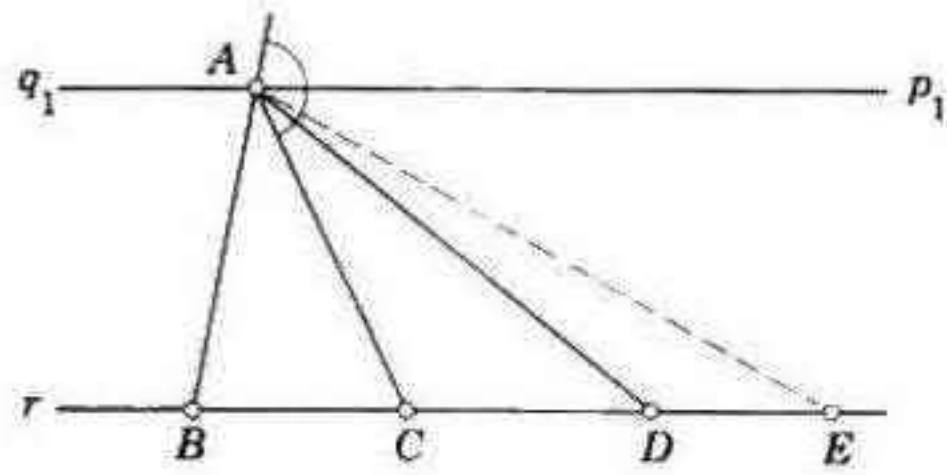


Figura 12.6a

Demostración. Tomemos dos puntos cualquiera distintos B y C en r, y apliquemos 12.52 al ángulo que está entre los rayos AC y A/B (que señala la figura 12.6*a*). Consideramos la división de todos los rayos dentro de este ángulo en dos conjuntos, según encuentren o no el rayo C/B. Es claro que los conjuntos no son el vacío, y que ningún rayo de uno queda entre dos rayos del otro. Concluimos que uno de los conjuntos contiene un rayo especial p_1 que está entre todo rayo de ese conjunto (que no sea él mismo) y todo rayo del otro conjunto.

De hecho, p_1 pertenece al segundo conjunto. Pues tenemos que si encontrara C/B digamos, en D, tendríamos $[BCD]$. Por el axioma 12.22 podríamos tomar un punto E tal que $[CDE]$, con la conlusión absurda de que AE pertenece a ambos conjuntos: al primero porque E está en C/B, y al segundo porque AD está entre AC y AE.

Así, hemos encontrado un rayo p_1 dentro del ángulo que escogimos que es el "primer" rayo que no encuentra al rayo C/B: esto quiere decir que todo rayo entre AC y p_1 encuentra C/B. Al intercambiar los papeles de B y C, obtenemos otro rayo especial q_1, en el otro lado de AB, que se puede describir (conforme a una rotación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj) como el "último" rayo que no encuentra B/C. Como la recta r consiste de los dos rayos B/C, C/B además del intervalo $\overline{BC}$, hemos encontrado dos rayos p_1, q_1 que separan todos los rayos que parten de A y encuentran a r de los demás rayos que no la encuentran (y parten de A). [Forder **1**, pág. 300.]

Estos rayos especiales que parten de A son, según se dice, *paralelos* a la recta r en los dos sentidos: p_1 es paralelo a C/B, y q_1 es paralelo a B/C. (Se dice que dos rayos tienen el mismo sentido si quedan en el mismo lado de la recta que une sus puntos iniciales.)

Con el objeto de completar el tema, definiremos los rayos paralelos a r que parten de un punto A que está en la misma r como los dos rayos en los que A descompone a r. La diferencia entre la geometría afín y la hiperbólica depende de la cuestión de que, al tomar otras posiciones de A, los dos rayos p_1, q_1 sigan siendo las dos mitades de una recta. Cuando lo son, la recta descompone el plano en dos semiplanos, uno de los que contiene por completo a la recta r. Cuando no lo son, las rectas

p y q (que contienen a los rayos) descomponen el plano en las cuatro regiones angulares.

$$p_1q_1, \quad q_1p_2, \quad p_2q_2, \quad q_2p_1.$$

En este caso, por 12.61, r queda por completo en la región p_1q_1.

COROLARIO 12.62 *Para un punto cualquiera A y una recta cualquiera r, que no pase por A, hay por lo menos una recta que pasa por A, en el plano Ar, que no encuentra a r.*

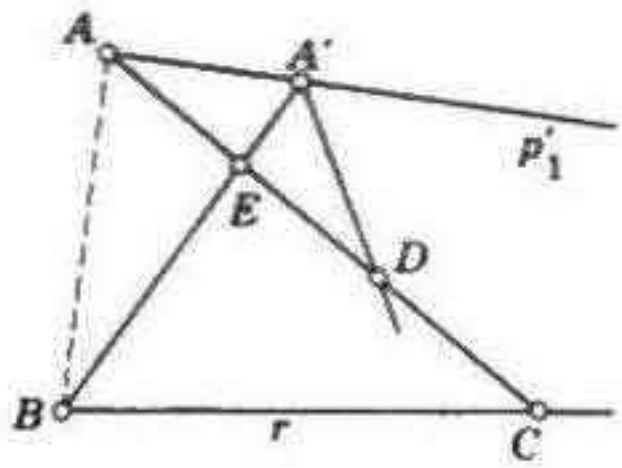


Figura 12.6b

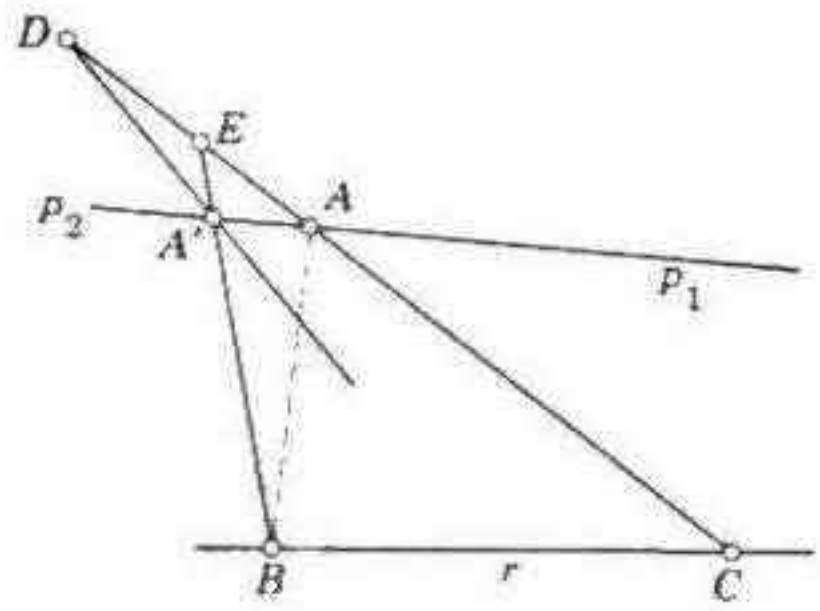


Figura 12.6c

Otra propiedad familiar del paralelismo es la "transmisibilidad":

TEOREMA 12.63 *El paralelismo de un rayo y una recta se mantiene al alterar el punto de partida del rayo por medio de la substracción o la adición de un segmento.*

Demostración [Gauss 1, vol. 8, pág. 203]. Sea p_1 un rayo que parte de A y es paralelo a una recta r que pasa por B, y sea A' un punto cualquiera de este rayo (figura 12.6*b*) o del rayo opuesto p_2 (figura 12.6*c*). El rayo modificado p'_1, que parte de A', es A'/A o $A'A$, respectivamente; es obvio que no encuentra a r. Lo que nos queda por demostrar es que todo rayo que parta de A', dentro del ángulo entre $A'B$ y p'_1 encuentra efectivamente a r. Sea D un punto cualquiera de ese rayo (figura 12.6*b*) o del rayo opuesto (figura 12.6*c*). Puesto que p_1 (que parte de A) es paralelo a r, la recta AD (que contiene un rayo dentro del ángulo entre AB y p_1) encuentra a r, digamos, en C. La recta $A'B$, que separa A de D, encuentra el segmento AD en, digamos, E. Al aplicar el axioma 12.27 al triángulo CBE en el que $[BEA']$ y $[EDC]$ (figura 12.6*b*) o al triángulo BCE donde $[CED]$ y $[EA'B]$ (figura 12.6*c*), tenemos que la recta $A'D$ encuentra BC. Así, p'_1 es paralelo a r.

Esta propiedad de transmisibilidad nos permite decir que la *recta* $p = AA'$ es paralela a la recta $r = BC$, siempre y cuando recordemos que esta propiedad se asocia con un "sentido" definido a lo largo de cada recta.

Busemann [1, pág. 139 (23.5)] ha demostrado que no es posible, en el marco de referencia de la geometría ordenada bidimensional, establecer la "simetría" del paralelismo: que si p es paralela a r entonces r es paralela a p. Para este paso importante necesitamos o bien del axioma 12.42 [como se

emplea en Coxeter **3**, págs. 165–177] o bien del axioma afín del paralelismo (13.11) o de los axiomas absolutos de congruencia (§ 15.1).

TEOREMA 12.64 *Si se tiene que dos rectas son ambas paralelas a una tercera en el mismo sentido, hay una recta que las encuentra a las tres.*

Demostración. Tenemos que demostrar que si las rectas p y s son ambas paralelas a r en el mismo sentido, entonces las tres rectas p, r, s tienen una transversal. Esto es obvio en la geometría afín, de modo que supondremos que la geometría es hiperbólica. De las dos rectas que son paralelas a r y pasan por un punto A en p, una es p misma. Sea q la otra, y consideremos la región angular p_1q_1, en la que está r, de manera que los rayos p_1 y q_1 (que parten de A) serán paralelos a r en sentidos opuestos y s será paralela a r en el mismo sentido de p_1. Sean B y D puntos arbitrarios en r y s, respectivamente.

Si D está en la región p_1q_1, la recta AD es una transversal. Si D está en la región p_1q_2, BD es transversal. Si D está en p_2q_2, tanto AD como BD son transversales. Y, por último, si D está en p_2q_1, AB es transversal.

La geometría hiperbólica estudiada en los capítulos 15, 16 y 20.

EJERCICIOS

1. Si p es paralela a s y tenemos que $[prs]$, entonces, p es paralela a r. (Véase la figura 15.2*c* y tómese s en lugar de q.)

2. Considérense todos los puntos que quedan estrictamente dentro de una circunferencia dada en el plano euclidiano. Tómese el resto de los puntos como si no existiera. Sean nuestras rectas las cuerdas del círculo. Entonces tendremos que todos los axiomas 12.21–12.27, 12.41 y 12.51 se cumplen. Localícense los dos rayos que pasan por un punto dado y son paralelos a una recta dada. Adviértase que forman un ángulo (como en la figura 16.2*b*).

13

Geometría afín

Las tres primeras secciones de este capítulo contienen un desarrollo sistemático de los fundamentos de la geometría afín. Veremos, en particular, la manera de medir la longitud a lo largo de una recta, aunque se necesitan unidades independientes para las rectas que están en direcciones diversas. En §§ 13.4–7 investigaremos temas como el área, las transformaciones afines, las celosías, los vectores, las coordenadas baricéntricas y los teoremas de Ceva y Menelao. Por último, en § 13.8 y § 13.9, extenderemos estas ideas de dos a tres dimensiones.

Según Blaschke [**1**, pág. 31; **2**, pág. 12], fue Euler el que acuñó la palabra "afín" (*affin* en alemán). Pero no fue hasta que Klein lanzó su programa Erlangen (véase el capítulo 5) que se reconoció esta geometría como una disciplina independiente. Tal vez muchas proposiciones ya sean conocidas; de hecho, la mayor parte de los lectores descubrirán que han trabajado a menudo en el plano afín sin saber que podía ser designado de esta manera.

Nuestro tratamiento es un poco más geométrico y menos algebraico que el de la *Geometric Algebra* de Artin [Artin **1**; véanse sobre todo las págs. 58, 63, 71]. Señalemos de paso que nuestro axioma 13.12 (que él llama DP) implica el teorema 13.122 (su D_a): presumiblemente, esto significa que su axioma 4b implica a 4a.

13.1 EL AXIOMA DEL PARALELISMO Y EL AXIOMA "DE DESARGUES"

> *El lenguaje matemático es difícil pero imperecedero. No creo que ningún erudito griego de hoy entienda los tonos idiomáticos de los Diálogos de Platón o los chistes de Aristófanes de manera tan completa como el matemático entiende cada matiz de significado de las obras de Arquímedes.*
>
> M. H. A. Newman
>
> (*Mathematical Gazette* **43**, 1959, pág. 167)

En nuestro tratamiento axiomático, consideraremos el plano real afín como un caso especial del plano ordenado. De acuerdo con esto, los conceptos primitivos son el *punto* y la *mediación*, que satisfacen los axiomas 12.21–12.27, 12.41 y 12.51. La geometría afín se deriva a partir de la geometría ordenada al añadir los dos axiomas adicionales que se citan a continuación:

AXIOMA 13.11 *Para un punto cualquiera A y una recta cualquiera r no hay más de una recta que pasa por A, en el plano Ar, que no encuentra a r.*

AXIOMA 13.12 *Si A, A', B, B', C, C', O son siete puntos distintos tales que AA', BB', CC' son tres rectas diferentes que pasan por O, y si la recta AB es paralela a $A'B'$, y BC es paralela a $B'C'$, entonces también CA es paralela a $C'A'$.*

El axioma afín del paralelismo (13.11) se combina con 12.62 para decirnos que para cualquier punto A y cualquier recta r hay exactamente una recta que pasa por A, en el plano Ar, y no encuentra a r. En consecuencia, los dos rayos que parten de A y son paralelos a r son siempre colineales, y tenemos de aquí que *dos rectas cualesquiera del plano que no se encuentran son paralelas*, y el paralelismo es una *relación de equivalencia*. Este último resultado abarca tres propiedades:

El paralelismo es *reflexivo*. (Toda recta es paralela a sí misma.)

El paralelismo es *simétrico*. (Si p es paralela a r, entonces r es paralela a p.)

El paralelismo es *transitivo*. (Si p y q son paralelas a r, entonces p es paralela a q. Euclides I.30.)

De la manera característica de las relaciones de equivalencia, toda recta pertenece a un *haz* de paralelas cuyos miembros son paralelos entre sí.

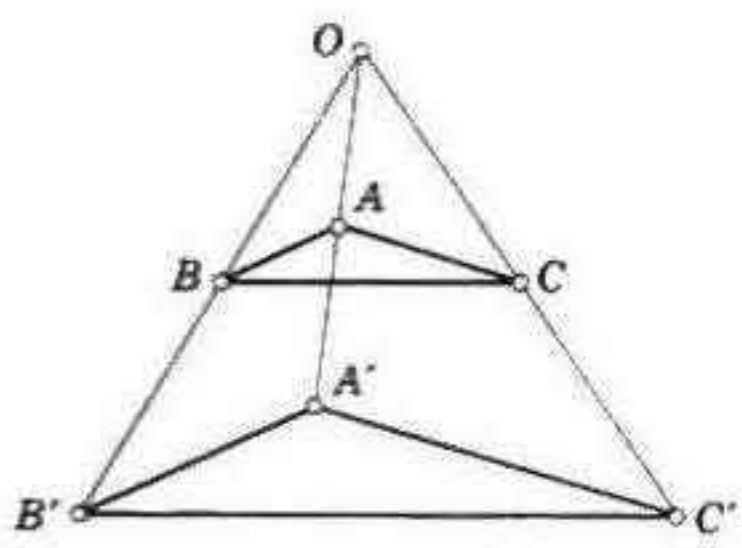


Figura 13.1a

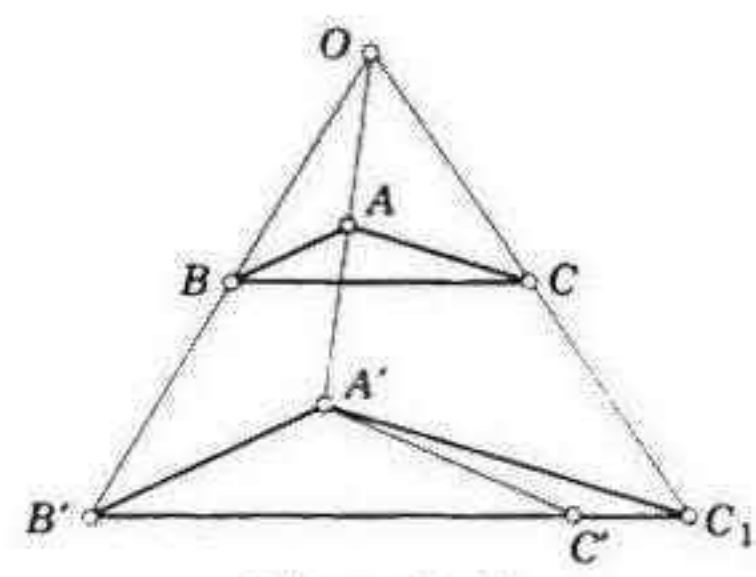


Figura 13.1b

El axioma 13.12 (véase la figura 13.1*a*) probablemente resulte familiar para la mayor parte de los lectores, ya sea como un corolario de Euclides VI.2 como una formulación afín del teorema de Desargues. Veremos que implica

TEOREMA 13.121 *Si ABC y $A'B'C'$ son dos triángulos de vértices*

diferentes, colocados de manera que la recta BC es paralela a $B'C'$, CA es paralela a $C'A'$ y AB también lo es a $A'B'$, entonces las tres rectas son o bien concurrentes o bien paralelas.

Demostración. Si las tres rectas AA', BB', CC' no son todas paralelas, dos de ellas se encuentran. Como la notación es simétrica, podemos suponer que las que se cortan son AA' y BB', que se encuentran en O, como tenemos en la figura 13.1*b*. Sea C_1 el punto en el que OC encuentra a $B'C'$. Por el axioma 13.12, que aplicamos a AA', BB', CC_1, la recta AC es paralela a $A'C_1$, tanto como a $A'C'$. Por el axioma 13.11, C_1 está en $A'C'$, así como en $B'C'$. Como $A'B'C'$ es un triángulo, C_1 coincide con C'. Así, si AA', BB', CC' no son paralelas, serán concurrentes [Forder 1, pág. 158].

A grandes rasgos, el axioma 13.12 es el recíproco de la mitad del teorema 13.121. El recíproco de la otra mitad es

TEOREMA 13.122 *Si A, A', B, B', C, C' con seis puntos distintos en tres rectas paralelas AA', BB', CC', colocados de manera que la recta AB es paralela a $A'B'$ y BC a $B'C'$, entonces también CA será paralela a $C'A'$.*

Demostración. Por A' trácese la paralela $A'C_1$ a AC, que encontrará a $B'C'$ en C_1, como se tiene en la figura 13.1*c*. Al aplicar 13.121 a los triángulos ABC y $A'B'C_1$, puesto que AA' y BB' son paralelas, CC_1 es paralela a ambas y, por lo tanto, también a CC'. Por lo tanto, C_1 está en CC' además de estar en $B'C'$. Puesto que las paralelas BB' y CC' son distintas, B' no puede estar en CC'. Por lo tanto, C_1 coincide con C' y $A'C'$ es paralela a AC.

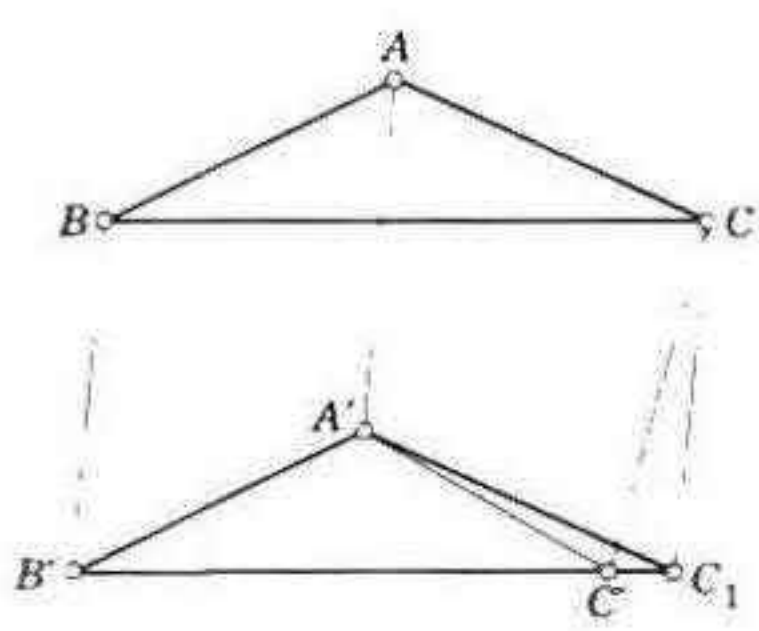


Figura 13.1c

EJERCICIOS

1. Si una recta del plano de dos paralelas encuentra a una de ellas también encontrará a la otra.
2. ¿Podemos decir siempre, acerca de tres rectas paralelas diferentes, que una está entre las otras dos?

13.2 DILATACIONES

Las dilataciones . . . son mapeos uno-a-uno del plano en sí mismo que llevan todos los puntos de una recta a puntos de una recta paralela a ella.

E. Artin [1, pág. 51]

Cuatro puntos no colineales A, B, C, D forman un *paralelogramo* $ABCD$ si la recta AB es paralela a DC, y BC lo es a AD. Sus *vértices* son los cuatro puntos; sus *lados*, los cuatro segmentos AB, BC, CD, DA, y sus *diagonales* son los segmentos AC, BD. Puesto que B y D están en lados opuestos de AC, las diagonales se encuentran (se cortan) en un punto que se llama *centro* [Forder 1, pág. 140].

Como lo hicimos en § 5.1, definimos la *dilatación* al caracterizarla como una transformación que transforma toda recta en su paralela. Pero hemos de examinar más cuidadosamente el importante teorema 5.12, que dice que *dos segmentos dados, AB y $A'B'$, en rectas paralelas, determinan una única dilatación $AB \to A'B'$.*

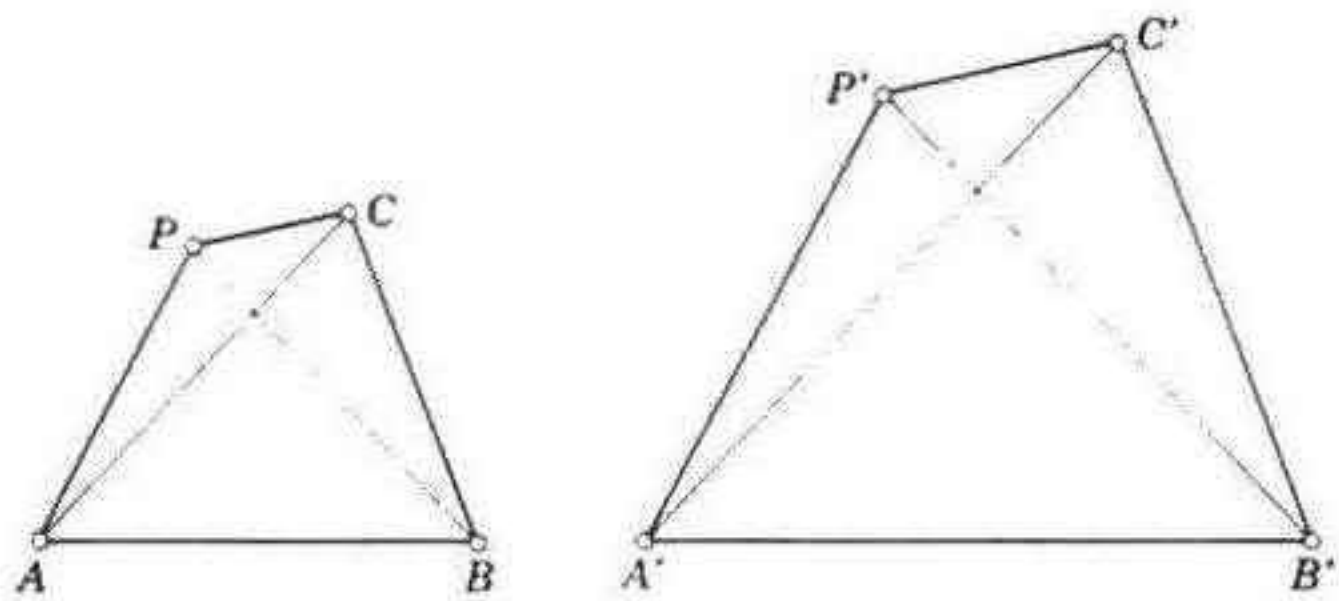


Figura 13.2a

Podemos encontrar para un punto cualquiera P, que no esté en AB, un punto correspondiente P' al trazar la paralela $A'P'$ a AP, y la paralela $B'P'$ a BP, como se ha hecho en la figura 13.2*a*. Por 13.121, las tres rectas AA', BB', CC', son o bien concurrentes, o bien paralelas. Y lo mismo sucede con AA', BB', PP'.

Si las dos paralelas AB y $A'B'$ no coinciden, las cuatro rectas AA', BB', CC', PP' serán o bien concurrentes, o bien paralelas. Entonces, por 13.12 ó por 13.122 (respectivamente), CP y CP' son paralelas, de modo que advertimos que la transformación es evidentemente una dilatación. Si las rectas AB y $A'B'$ coinciden, llegaremos a la misma conclusión al considerar la transformación como $AC \to A'C'$ en lugar de $AB \to A'B'$.

Vemos así que una dilatación dada puede quedar especificada por su efecto en un segmento cualquiera. La *inversa* de la dilatación $AB \to A'B'$ es la dilatación $A'B' \to AB$. El *producto* de dos dilataciones, $AB \to A'B'$ y $A'B' \to A''B''$ es la dilatación $AB \to A''B''$. En particular, tenemos que el producto de una dilatación con su inversa es la *identidad* $AB \to AB$. Así

tenemos que al reunir todas las dilataciones se forma un *grupo* (continuo).

El argumento que empleamos al demostrar 5.13 señala que, con respecto a una dilatación dada, las rectas PP' que unen pares de puntos correspondientes son rectas *invariantes*. El estudio de 5.12 indica que todas estas rectas son o bien concurrentes, o bien paralelas.

Si las rectas PP' son concurrentes, su intersección O es un punto invariante, y tenemos una dilatación *central*.

$$OA \to OA'$$

(donde A' está en la recta OA). El punto invariante O es único; pues si O y O_1 fueran dos de esos puntos, la dilatación sería $OO_1 \to OO_1$, que es la identidad.

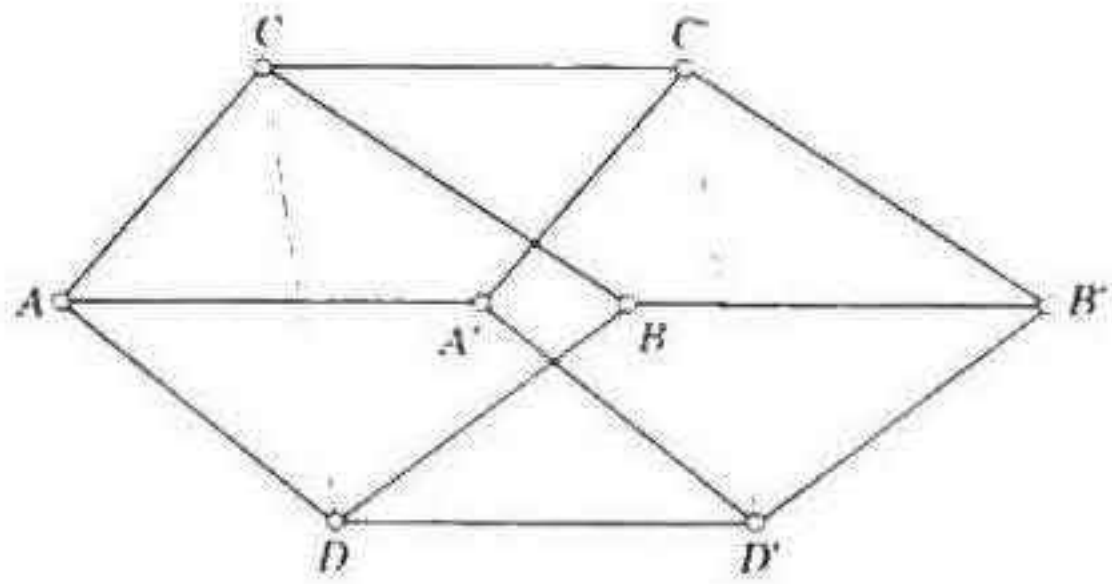


Figura 13.2b

Si, por otra parte, las rectas PP' son paralelas, no hay punto invariante, y tenemos una traslación $AB \to A'B'$, donde no solamente es AB paralela a $A'B'$, sino también AA' es paralela a BB'. Cuando estas dos paralelas son distintas, $AA'B'B$ es un paralelogramo. Cuando no lo son, nos podemos valer de paralelogramos auxiliares, como son $AA'C'C$ y $C'CBB'$ (o $AA'D'D$ y $D'DBB'$), como se ve en la figura 13.2*b*. Con dos aplicaciones de 13.122 basta para demostrar que dados A, B, A', tenemos que B' es independiente de la elección que se haga de C (o D). En consecuencia,

13.21 *Dos puntos cualesquiera A y A' determinan una traslación única $A \to A'$.*

Incluiremos, naturalmente, la identidad $A \to A$ como un caso degenerado. Por lo tanto, una dilatación que no sea la identidad será una traslación si y sólo si carece de punto invariante. Incluso tenemos que una traslación dada se especifica por medio de su efecto en un punto cualquiera que se determine; de hecho, la traslación $A \to A'$ es igual a $B \to B'$ si $AA'B'B$ es un paralelogramo, o si para un paralelogramo cualquiera $AA'C'C$ que se basa en AA' hay otro paralelogramo $C'CBB'$.

A continuación demostraremos que las dilataciones son "transformaciones ordenadas":

13.22 *La dilatación $AB \to A'B'$ transforma a todo punto entre A y B en un punto entre A' y B'.*

Demostración. Si las rectas AB y $A'B'$ son diferentes, el hecho de que $[ACB]$ implica a $[A'C'B']$ es inmediato al considerar 12.401 (en el caso de una traslación) ó 12.402 (en el caso de una dilatación central). Para obtener el resultado análogo con respecto a dos ternas correspondientes en una recta invariante CC', trazamos seis paralelas por los seis puntos, como se hizo en la figura 13.2c, y nos servimos de que $[acb]$ implica $[a'c'b']$.

Para demostrar el teorema 3.21, que dice que *el producto de dos traslaciones es una traslación*, podemos argumentar de la siguiente manera: puesto que las traslaciones son dilataciones, su producto ha de ser desde luego una dilatación. De no ser una traslación, tiene un punto invariante único O. Si la primera de las dos traslaciones dadas lleva O a O', la segunda debe devolver O' a O. Pero la traslación $O' \to O$ es la inversa de $O \to O'$. Así, el único caso en el que el producto de dos traslaciones tiene un punto invariante ocurre cuando las traslaciones son inversas mutuamente. (A partir de nuestra convención, el producto no deja de ser una traslación.) De aquí,

13.23 *El producto de dos traslaciones $A \to B$ y $B \to C$ es la traslación $A \to C$.*

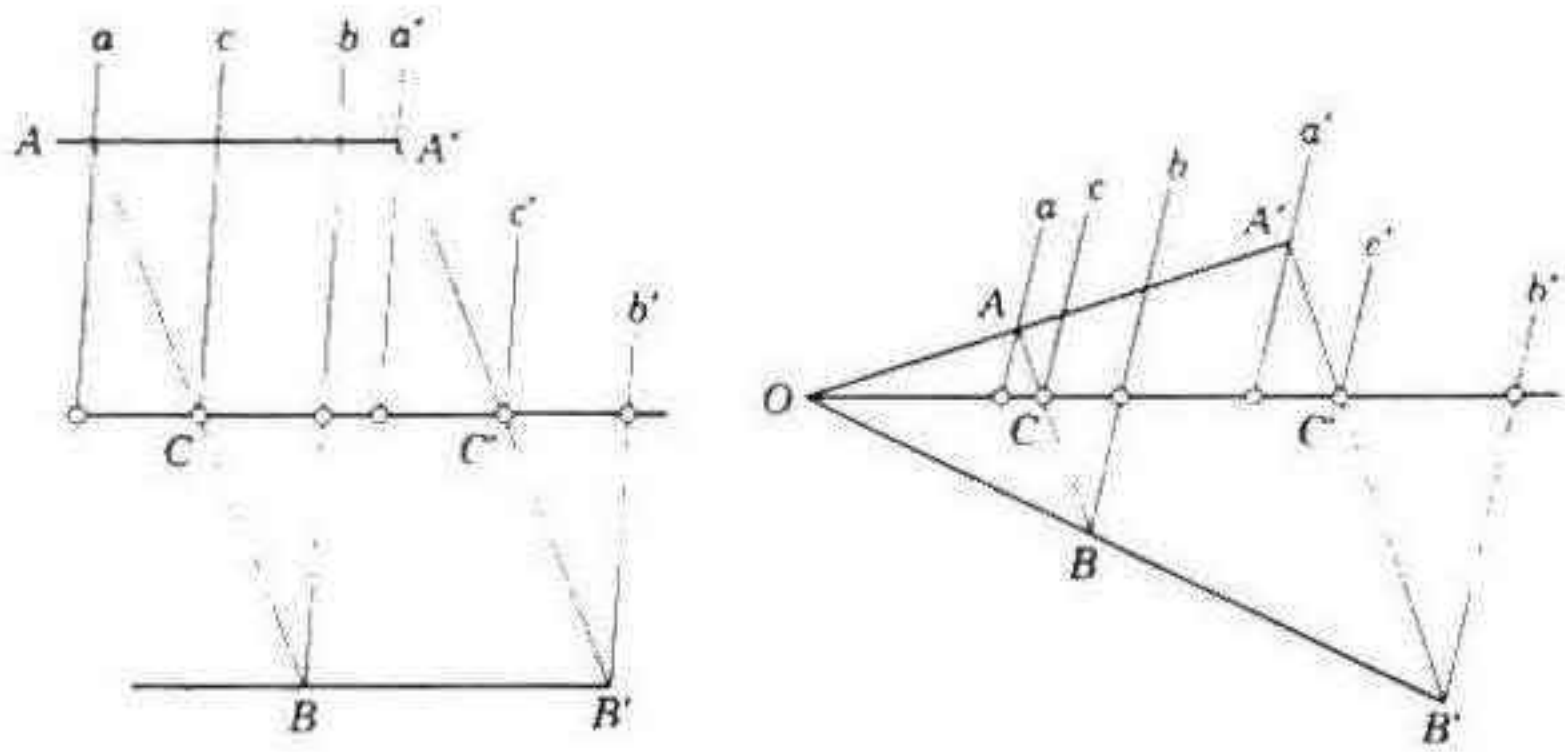


Figura 13.2c

Para demostrar que este producto es *conmutativo* (como teníamos en 3.23), empezaremos por tomar en cuenta el caso fácil en el que las dos traslaciones se encuentran a lo largo de rectas no paralelas. Al completar el paralelogramo $ABCD$ advertiremos que las traslaciones $A \to B$ y $B \to C$ son iguales a $D \to C$ y $A \to D$, respectivamente. Así, su producto en cualquier orden será la traslación $A \to C$:

$$\begin{aligned}(A \to B)(B \to C) &= (A \to D)(D \to C)\\ &= (B \to C)(A \to B).\end{aligned}$$

Para tratar el caso del producto de dos traslaciones T y X a lo largo de la misma recta, sea Y una traslación cualquiera a lo largo de otra recta que no sea paralela a la anterior, de manera que X se puede conmutar con Y y con TY. Entonces

$$\mathrm{TXY} = \mathrm{TYX} = \mathrm{XTY}$$

y, por lo tanto,

$$TX = XT$$

[cf. Veblen y Young **2**, pág. 76].

Vemos, como caso especial de 5.12, que dos puntos distintos cualquiera, A y B, se intercambian por una dilatación única $AB \to BA$, o, si nos expresamos más concisamente,

$$A \leftrightarrow B,$$

que denominamos *semigiro*. (Por supuesto, $A \leftrightarrow B$ es lo mismo que $B \leftrightarrow A$.) Si C es un punto cualquiera que no está en la recta AB, el semigiro transforma a C en el punto D en el que la recta que pasa por B y es paralela a AC encuentra a la recta que pasa por A y es paralela a BC (figura 13.2*d*). Por lo tanto, $ABCD$ es un paralelogramo, y podemos expresar el mismo semigiro como $C \leftrightarrow D$. Las rectas invariantes AB y CD, que son las diagonales del paralelogramo, se intersectan en un punto O, que es el punto invariante del semigiro. En consecuencia, un segmento cualquiera AB tiene un *punto medio*, que se puede definir como el punto invariante del semigiro $A \leftrightarrow B$, y así hemos demostrado que el centro de un paralelogramo es el punto medio de cada diagonal, es decir, que las dos diagonales se "bisecan" mutuamente. Si queremos ver la manera en la que un semigiro transforma un punto arbitrario de AB, no tenemos sino que unir este punto con C (o con D) y entonces trazar una paralela por D (o por C).

Al considerar su efecto en un punto arbitrario cualquiera B, podemos expresar dos semigiros cualquiera como $A \leftrightarrow B$ y $B \leftrightarrow C$. Si su producto tiene un punto invariante O, cada uno de ellos ha de ser susceptible de expresarse en la forma $O \leftrightarrow O'$, es decir, han de coincidir. En todos los demás casos, no existe el punto invariante. En consecuencia,

13.24 *El producto de dos semigiros $A \leftrightarrow B$ y $B \leftrightarrow C$ es la traslación $A \to C$.*

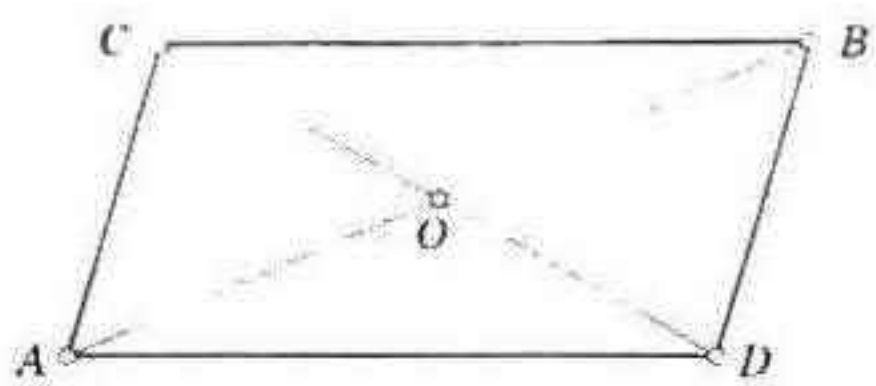


Figura 13.2d

Hemos visto (figura 13.2*d*) que si $ABCD$ es un paralelogramo, el semigiro $A \leftrightarrow B$ es lo mismo que $C \leftrightarrow D$, y que la traslación $A \to D$ es lo mismo que $C \to B$. Esta relación entre los semigiros y las traslaciones sigue siendo válida cuando el paralelogramo se deshace para formar un

arreglo simétrico de cuatro puntos colineales, como se tiene en la figura 13.2*e*:

Figura 13.2e

13.25 *Los semigiros $A \leftrightarrow B$ y $C \leftrightarrow D$ son iguales si y sólo si las traslaciones $A \to D$ y $C \to B$ son iguales.*

De hecho, la relación $(A \leftrightarrow B) = (C \leftrightarrow D)$ implica

$$\begin{aligned}(A \to D) &= (A \leftrightarrow B)(B \leftrightarrow D)\\ &= (C \leftrightarrow D)(D \leftrightarrow B) = (C \to B)\end{aligned}$$

y, al revés la relación $(A \to D) = (C \to B)$ implica

$$\begin{aligned}(A \leftrightarrow B) &= (A \to D)(D \leftrightarrow B)\\ &= (C \to B)(B \leftrightarrow D) = (C \leftrightarrow D).\end{aligned}$$

En el caso especial en el que C y D coinciden, los llamamos C' y deducimos que C' es el punto medio de AB si y sólo si las traslaciones $A \to C'$ y $C' \to B$ son iguales. Aquí interviene la existencia de los paralelogramos $AC'A'B'$ y $A'B'C'B$, como se puede ver en la figura 13.2*f*. Al completar el paralelogramo $B'C'A'C$ obtenemos un triángulo ABC en el que los puntos medios de sus lados son A', B', C'. En consecuencia

13.26 *La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado, y la recta que pasa por el punto medio de uno de los lados y es paralela a otro lado, también pasa por el punto medio del tercero.*

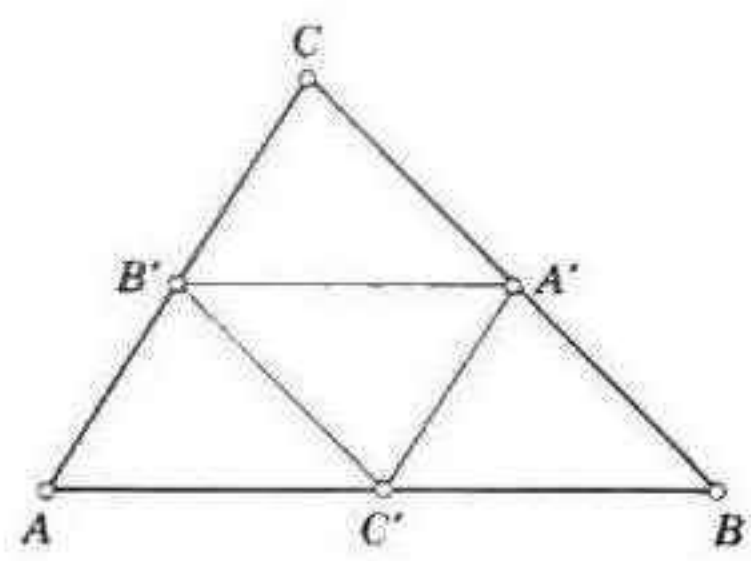


Figura 13.2f

Se dice que dos figuras son *homotéticas* si las relaciona una dilatación, *congruentes* si las relaciona una traslación o un semigiro. En particular, un segmento dirigido AB es congruente con su segmento "opuesto" BA por medio del semigiro $A \leftrightarrow B$. Así, en la figura 13.2*f*, los cuatro triángulos pequeños

$$AC'B', \quad C'BA', \quad B'A'C, \quad A'B'C'$$

son todos congruentes, y cada uno de ellos es homotético con respecto al triángulo mayor, ABC.

EJERCICIOS

1. Las ecuaciones como las que se usaron para demostrar 13.25 se escriben con facilidad si recordamos que en cada una de ellas interviene un número par de flechas de dos puntas (que indican semigiros). Explíquese esta regla.

2. Las traslaciones $A \to C$ y $D \to B$ son iguales si las traslaciones $A \to D$ y $C \to B$ también lo son. (Esto es obvio cuando $ADBC$ es un paralelogramo, pero resulta notable cuando todos los puntos son colineales.)

3. Si hacemos $A = C$ en la ecuación

$$(A \leftrightarrow B)(B \to C) = (A \leftrightarrow C),$$

dedúzcase que un punto dado cualquiera C es el punto invariante de un semigiro $(C \leftrightarrow B)(B \to C)$ que se puede escribir, al extender de manera natural el simbolismo, como

$$C \leftrightarrow C.$$

4. Si las tres diagonales de un exágono (que no tiene que ser necesariamente convexo) tienen todas el mismo punto medio, dos lados opuestos cualquiera serán paralelos (como en la figura 4.1*e*).

5. Por un punto cualquiera A_1 en el lado BC de un triángulo ABC, trácese la paralela A_1B_1 a BA de manera que encuentre a CA en B_1, a continuación la paralela B_1C_1 a CB de manera que encuentra a AB en C_1, y en seguida C_1A_2, que será paralela a AC, de manera que encuentre a BC en A_2. Si A_1 es el punto medio de BC, A_2 coincidirá con él. De no ser así, continúese el proceso y trácense las paralelas A_2B_2 a BA, B_2C_2 a CB y C_2A_3 a AC. Tendremos que se ha cerrado el camino: A_3 coincide

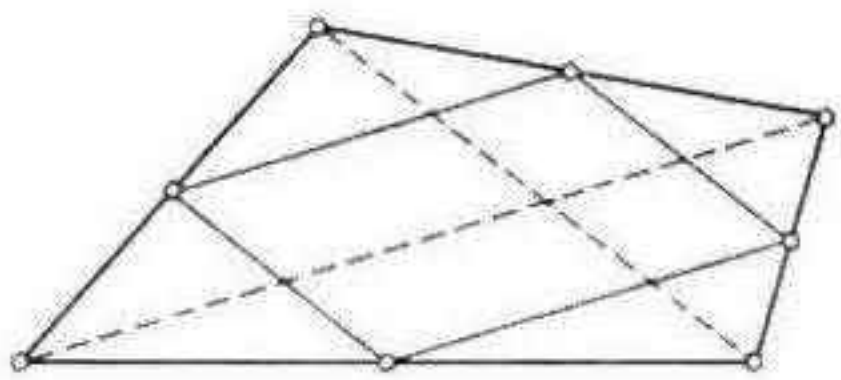


Figura 13.2g

con A_1. (Esto se llama figura de Thomsen. Véase Geometrical Magic, por Nev R. Mind, *Scripta Mathematica*, **19** (1953), págs. 198–200.)

6. Los puntos medios de los cuatro lados de un cuadrángulo simple cualquiera son los vértices de un paralelogramo (figura 13.2*g*; cf. figura 4.2*c*). Este teorema lo descubrió Pierre Varignon (1654–1722). Nos señala que las *bimedianas*, que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrángulo se bisecan mutuamente. Así, el corolario del teorema de Hjelmslev (§ 3.6) se convierte en un teorema afín cuando reemplazamos la hipótesis 3.61 por

$$AB = BC, \quad A'B' = B'C'.$$

7. Los puntos medios de los seis lados de un cuadrángulo completo cualquiera son los vértices de un exágono simétrico con respecto a su centro (de simetría central) (de la clase que consideramos en el ejercicio 4).

13.3 AFINIDADES

"Claro, claro," dijo el Unicornio, . . . "¿Qué podemos medir? . . . Somos expertos en la teoría de la medición, no en la práctica."

J. L. Synge [2, pág. 51]

Podemos resumir los resultados de § 13.2 al afirmar que todas las traslaciones del plano afín forman un grupo abeliano continuo, que es un subgrupo de índice 2 del grupo de las traslaciones y los semigiros; y este último es un subgrupo (de índice infinito) del grupo de las dilataciones [Veblen y Young 2, págs. 79, 93].

Además, el grupo de las traslaciones es un subgrupo *normal* (o subgrupo "autoconjugado")* del grupo de las dilataciones, es decir que si T es una traslación mientras S es una dilatación, entonces $S^{-1}TS$ será una traslación [Artin 1, pág. 57]. Para demostrar esto, supongamos que fuera posible que la dilatación $S^{-1}TS$ tuviera un punto invariante. Puesto que el punto invariante se podría haber derivado a partir de un punto conveniente O al aplicar S, podemos denotarlo por O^S. Así tenemos que $S^{-1}TS$ conserva invariante a O^S. Pero $S^{-1}TS$ transforma a O^S en O^{TS}. Por lo tanto, $O^{TS} = O^S$. Al aplicar S^{-1}, deducimos que $O^T = O$, resultado absurdo, puesto que T no tiene ningún punto invariante.

Si T es $A \to B$ y S es $AB \to A^SB^S$, entonces $S^{-1}TS$ es $A^S \to B^S$. De acuerdo con esto, es conveniente en ocasiones escribir T^S en lugar de $S^{-1}TS$ [véase, por ejemplo, Coxeter 1, pág. 39] y afirmar que la dilatación S *transforma* la traslación T en la traslación T^S. (Puesto que A^SB^S es paralela a AB, T^S tiene la misma dirección que T.) Dicho de otro modo, una dilatación transforma el grupo de las traslaciones en sí mismo a la manera de un *automorfismo*: si transforma a T en T^S y a otra traslación U en U^S, transformará el producto TU en $(TU)^S = T^SU^S$ y a una potencia cualquiera de T en la misma potencia de T^S.

Es conveniente el empleo de la letra T en cursiva para denotar el punto en el que la traslación T transforma un punto inicial (u origen) que se escoge de manera arbitraria, que llamaremos I. Entonces, si una dilatación central S tiene a I como punto invariante, no solamente transforma a T en T^S sino también a T en T^S.

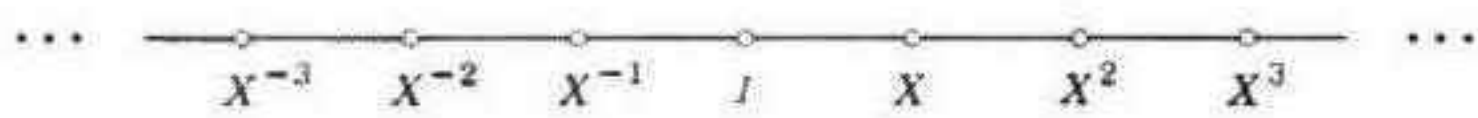


Figura 13.3a

Si aplicamos al punto arbitrario I todas las potencias enteras de una traslación dada X, obtenemos una *celosía unidimensional*, que consta de una infinidad de puntos "a espacios iguales" a lo largo de una recta, como en la figura 13.3*a*. Podemos considerar a todo punto de estos, X^μ como derivado del punto X por medio de una dilatación $IX \to IX^\mu$ (que conserva invariante el punto I). Empezamos por tomar μ como entero; pero como la misma dilatación transforma a cada X^n en

$$(X^\mu)^n = X^{\mu n},$$

* Birkhoff y MacLane 1, pág. 141; Coxeter 1, pág. 42.

podemos extender consistentemente el significado de X^μ de manera que μ tome cualquier valor racional al principio, y por último, cualquier valor real. Dicho de otra manera, podemos interpolar puntos nuevos entre los de la celosía unidimensional y entonces definir X^μ, donde μ es cualquier número real, como la traslación $I \to X^\mu$. Los detalles se dan a continuación.

Con respecto a cada número racional $\mu = a/b$ (donde a es un entero y b un entero positivo) derivamos del punto X un nuevo punto X^μ por medio de la dilatación $IX^b \to IX^a$. Una manera conveniente de construir este punto X^μ consiste en emplear la celosía de las potencias de una traslación arbitraria Y a lo largo de otra recta que pase por el punto inicial I, al trazar una recta por el punto Y que sea paralela a la recta de unión de los puntos Y^b y X^a, como se ha hecho en la figura 13.3*b* (cf. figura 9.1*c*).

Para verificar que el orden de estos puntos X^μ concuerda con el orden de los números racionales μ, tomamos tres de ellos y reducimos sus μ a un común denominador, con el fin de expresarlos como $X^{a_1/b}$, $X^{a_2/b}$, $X^{a_3/b}$. Si $a_1 < a_2 < a_3$, de manera que $[X^{a_1}\ X^{a_2}\ X^{a_3}]$, podemos aplicar 13.22 a la dilatación $IX^b \to IX$, con lo que llegaremos a la conclusión de que

$$[X^{a_1/b}\ X^{a_2/b}\ X^{a_3/b}].$$

Si μ es irracional, definimos X^μ como el punto de separación de un corte de Dedekind entre todos los puntos racionales $X^{a/b}$ para los que $a/b < \mu$ y todos aquellos para los que $a/b > \mu$. Con más precisión, si suponemos para el objeto de nuestra definición que μ es positivo, aplicamos la versión para "rayos" de 12.51 de dos conjuntos de puntos tales que uno está compuesto por todos los puntos cuyos exponentes son números racionales y positivos menores que μ y todos los puntos que se encuentran entre pares de éstos,

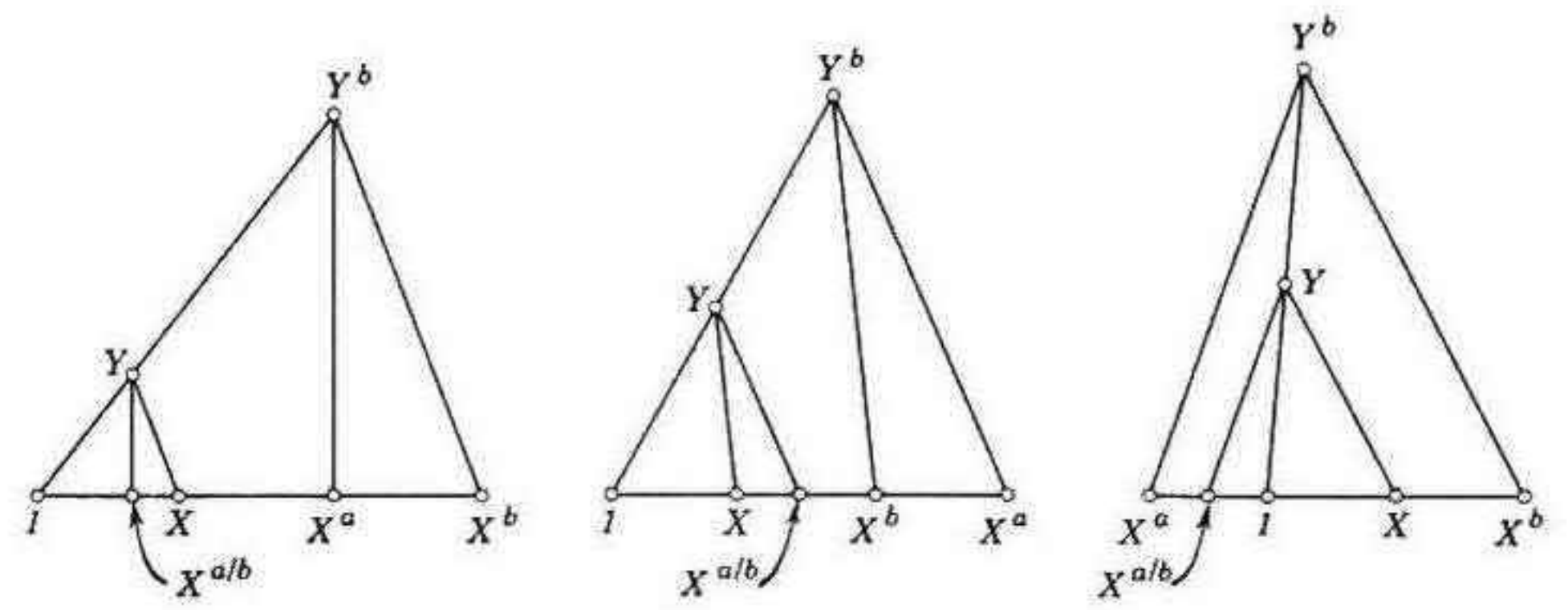


Figura 13.3b

mientras el otro conjunto consta del resto del rayo "positivo" IX. (Si μ es negativo, hacemos la misma división del rayo "negativo" I/X.) Por último tenemos que X^μ es, por definición, la traslación $I \to X^\mu$.

Ya hemos interpretado el símbolo X^μ para todos los valores reales de μ (incluso 0 y 1, en los que $X^0 = I$ y $X^1 = X$). Y, al contrario, *todo punto de la recta IX se puede expresar en la forma X^μ.*

Esto resulta obvio cuando se aplica a un punto cualquiera del intervalo que va de X^{-1} a X. Cualquier otro punto T cumple o bien $[I\ X\ T]$ o bien $[I\ X^{-1}\ T]$. Si tenemos que $[I\ X\ T]$, la dilatación $IT \to IX$ transforma a X en un punto entre I y X, al que llamaremos X^{λ}. La dilatación inversa $IX^{\lambda} \to IX$ transforma a X en $X^{1/\lambda}$; por lo tanto, $T = X^{1/\lambda}$. Si por otra parte, tenemos que $[I\ X^{-1}\ T]$, empleamos análogamente $IT \to IX^{-1}$ En los dos casos llegamos a una expresión de T como potencia de X.

Y así, a partir del axioma de Dedekind, hemos demostrado el "axioma de Arquímedes":

13.31 *Con respecto a un punto cualquiera T (que no sea I) en la recta de una traslación X, existe un entero n tal que T queda entre los puntos I y* X^n.

El exponente μ proporciona la medida de las distancias a lo largo de la recta IX. De hecho, tenemos que el segmento $X^{\nu}X^{\mu}$ $(\nu < \mu)$ tiene una longitud de $\mu - \nu$ en términos del segmento IX, que se toma como unidad:

$$\frac{X^{\nu}X^{\mu}}{IX} = \mu - \nu.$$

A lo largo de otra recta IY (figura 13.3c) tenemos una unidad independiente. Puesto que la dilatación $IX \to IX^{\mu}$ transforma el punto Y en Y^{μ}, donde la recta $X^{\mu}Y^{\mu}$ es paralela a XY, tenemos que

$$\frac{IX^{\mu}}{IX} = \frac{IY^{\mu}}{IY}$$

lo que concuerda con Euclides VI.2 (véase § 1.3). Así, podemos definir las razones de longitudes en una recta, o en rectas paralelas, y podemos comparar esas razones en rectas diferentes. Pero la geometría afín carece de maquinaria para comparar longitudes en direcciones diferentes: no tiene sentido preguntar si la traslación Y es más larga o más corta que X.

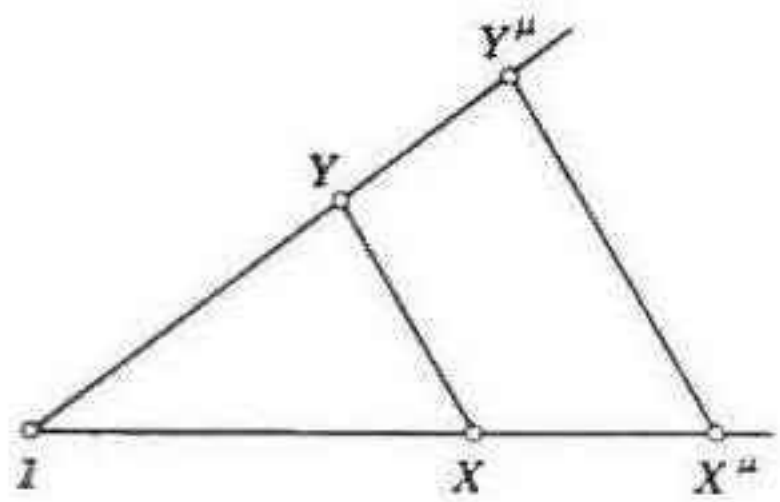


Figura 13.3c

La definición anterior de la longitud del segmento $X^{\nu}X^{\mu}$ $(\nu < \mu)$ sugiere la propiedad de permitir que el segmento opuestamente dirigido $X^{\mu}X^{\nu}$ tenga la longitud negativa $\nu - \mu$. Por medio de esta convención, podemos escribir $\mu = IX^{\mu}/IX$ para los valores tanto negativos como positivos de μ,

y sumar longitudes de segmentos colineales de acuerdo con fórmulas como

$$AB + BC = AC, \qquad BC + CA + AB = 0,$$

al margen del orden en que se encuentren sus extremos A, B, C.

Con el objeto de construir un sistema de *coordenadas afines* en el plano, denotemos por (x, y) el punto en el que se transforma el origen I por medio de la traslación $X^x Y^y$. Con este sencillo recurso se establece una correspondencia uno-a-uno entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales. En particular, el punto X^x es $(x, 0)$ y Y^y es $(0, y)$, y el origen es $(0, 0)$. Cuando x y y son enteros, los puntos (x, y) forman una *celosía bidimensional*, como tenemos en la figura 4.1*b*. Los puntos restantes (x, y) se distribuyen entre los puntos de la celosía de la manera obvia.

En las coordenadas afines (como en las cartesianas) una recta tiene una ecuación lineal. Las potencias de la traslación $X^{-b}\ Y^a$ transforman el origen en los puntos $(-\mu b, \mu a)$ cuyo lugar geométrico es la recta $ax + by = 0$. Las potencias transforman (x_1, y_1) en los puntos

$$(x_1 - \mu b, y_1 + \mu a)$$

cuyo lugar geométrico es

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

Y así podemos expresar una recta en cualquiera de las formas estándares 8.11, 8.12, 8.13.

La dilatación es un caso especial de una *afinidad*, que es una transformación (de todo el plano afín en sí mismo) que preserva la colinealidad. Así, tenemos que una afinidad transforma paralelas en paralelas y conserva las razones de las distancias a lo largo de rectas paralelas. También preserva la mediación (compárese con 13.22).

13.32 *Una afinidad se determina de manera única a partir de su efecto en un triángulo cualquiera.*

Pues si tenemos que transforma a un triángulo IXY en $I'X'Y'$, transforma también el punto (x, y) referido al primer triángulo en el punto que tiene *las mismas* coordenadas referidas al otro. Aquí IXY y $I'X'Y'$ pueden ser dos triángulos *cualquiera* [Veblen y Young 2, pág. 72], y es natural que hablemos de "la afinidad $IXY \to I'X'Y'$". En particular, si ABC y ABC' son dos triángulos que tienen un lado común, $ABC \to ABC'$ se llama *ruptura* o *deformación* según sea la recta CC' paralela a AB o no lo sea. Hay una clase de deformación que tiene la suficiente importancia para recibir un nombre y un símbolo especiales: la *reflexión afín* $A(CC')$ o $B(CC')$, que surge cuando el punto medio de CC' está en AB. Dicho de otra manera, un triángulo cualquiera ACC' determina una reflexión afín $A(CC')$ cuyo *espejo* (o "eje") es la mediana que pasa por A en la *dirección* de todas las rectas paralelas a CC'.

En el lenguaje del programa Erlangen (véase la pág. 95), el grupo principal de la geometría afín es el grupo de todas las afinidades.

EJERCICIOS

1. La ruptura o deformación $ABC \to ABC'$ conservan invariantes todos los puntos de la recta AB. ¿Qué efecto tienen un punto P de posición general?

2. Toda afinidad de período 2 es o bien un semigiro, o bien una reflexión afín.

3. Si con respecto a una afinidad dada se tiene que todo punto no invariante está por lo menos en una recta invariante, entonces la afinidad es o bien una dilatación, o bien una ruptura, o bien una deformación.

4. En términos de coordenadas afines, las afinidades son las "transformaciones afines"

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + l, \\ y' &= cx + dy + m, \end{aligned} \qquad ad \neq bc. \tag{13.33}$$

5. Descríbanse las transformaciones

(i) $x' = x + 1,\ y' = y$; (ii) $x' = ax,\ y' = ay$;
(iii) $x' = x = by,\ y' = y$; (iv) $x' = ax,\ y' = y$.

13.4 EQUIAFINIDADES

Pues él, a escala geométrica,
*Tomaba la medida a los jarros de cerveza.**

Samuel Butler (1600–1680)

(*Hudibras*, I.1)

Estamos preparados para demostrar que la comparación de las longitudes sobre rectas paralelas se puede extender a la comparación de las áreas en una posición cualquiera [cf. Forder **1**, págs. 259–265; Coxeter **2**, págs. 125–128]. Con el objeto de ser sencillos, nos limitaremos a considerar regiones *poligonales*. (Se pueden incluir otras formas por medio de un proceso adecuado de límites como los que se usan en el cálculo integral.) Es claro que se puede dividir cualquier región poligonal en un número finito de triángulos.† De acuerdo con H. Hadwiger y P. Glur [*Elemente der Mathematik*, **6** (1951), págs. 97–120], afirmaremos que dos de esas regiones son *equivalentes* si se pueden dividir en un número finito de piezas que son congruentes de dos en dos (por medio de traslaciones o semigiros). En otras palabras, dos regiones poligonales serán equivalentes cuando se puedan derivar una de otra mediante divisiones y rearreglos. Al superponer dos divisiones diferentes, veremos que esta clase de equivalencia, que obviamente es reflexiva y simétrica, es también transitiva: dos polígonos equivalentes al mismo polígono son también equivalentes entre sí.

Los paralelogramos $OPQR$ y $OP'Q'R$ de la figura 13.4*a* son equivalentes, pues cada uno de ellos está compuesto por el trapezoide $OP'QR$ más uno de los dos triángulos congruentes OPP', RQQ'. En algunos de

* *For he, by Geometrick scale*
Could take the size of Pots of Ale. (*T*)
† N. J. Lennes, *American Journal of Mathematics*, 33 (1911), pág. 46.

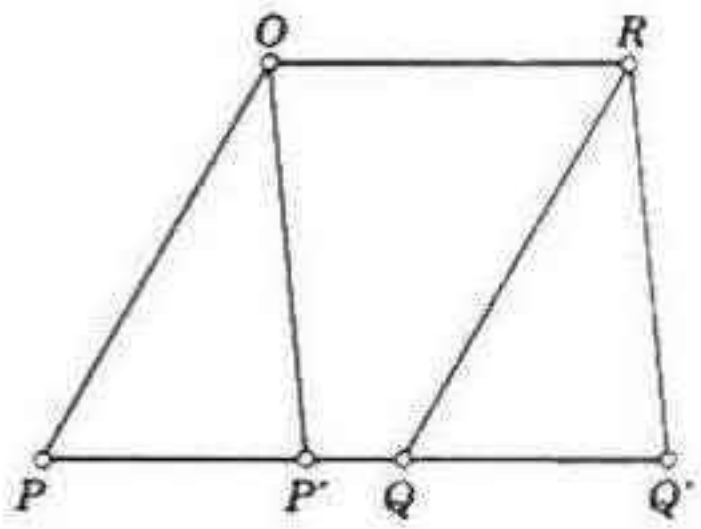


Figura 13.4a

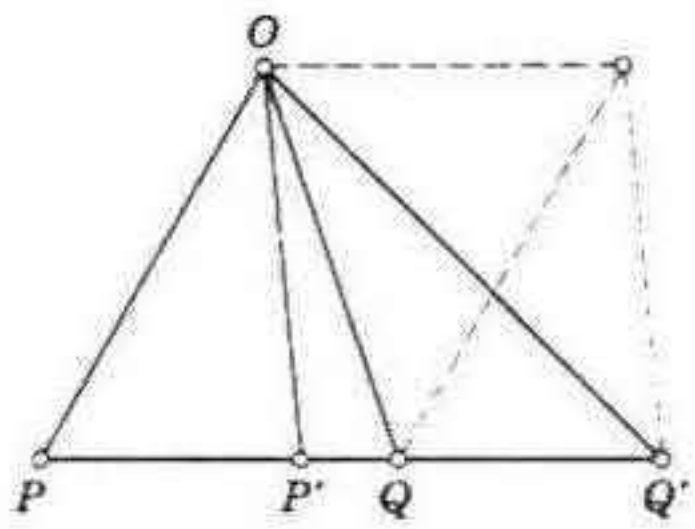


Figura 13.4b

estos casos se necesitan más de dos piezas, pero acabamos por encontrar que:

13.41 *Dos paralelogramos son equivalentes si tienen un par de lados opuestos de la misma longitud y en el mismo par de paralelas.*

Puesto que se puede dividir un paralelogramo por su diagonal y tener dos triángulos que son congruentes mediante un semigiro, tenemos que dos triángulos (como OPQ y $OP'Q'$ en la figura 13.4*b*) son equivalentes cuando tienen un vértice común mientras los lados opuestos a dicho vértice son segmentos congruentes de una recta. En particular, si los puntos P_0, $P_1 \ldots, P_n$ están a espacios iguales en una recta (que no pase por O), de manera que los segmentos P_0P_1, $P_1P_2, \ldots$ sean todos congruentes, como se ve en la figura 13.4*c*, entonces los triángulos OP_0P_1, $OP_1P_2, \ldots$ son todos equivalentes, y decimos con naturalidad que el *área* de OP_0P_n es n veces el área de OP_0P_1. Al interpolar nuevos puntos en la misma recta, podemos extender la idea a todos los valores reales de n, y concluimos que si Q está en el lado PQ' de un triángulo OPQ', como tenemos en la figura 13.4*d*, la *ceviana* OQ divide el área del triángulo en la misma razón que el punto Q divide el lado:

13.42
$$\frac{OPQ}{OPQ'} = \frac{PQ}{PQ'}.$$

Es natural que consideremos esta razón como negativa cuando P está entre Q y Q', es decir, cuando los dos triángulos tienen orientaciones opuestas.

Por medio de estas ideas podemos definir el área de un polígono de manera que *los polígonos equivalentes tengan áreas iguales*, y cuando dos polígonos se agregan para formar un polígono mayor, las áreas se sumen. Para calcular el área de un polígono dado en términos de un triángulo tipo OAB como unidad de medida, dividimos el polígono en triángulos y sumamos las áreas de las piezas, que se calculan de la manera que veremos a continuación.

Si aplicamos una traslación adecuada, un triángulo cualquiera se desplazará de manera que uno de sus vértices coincida con el vértice O del triángulo tipo OAB. Según esta idea, tomamos un triángulo OPQ. Sea la recta PQ

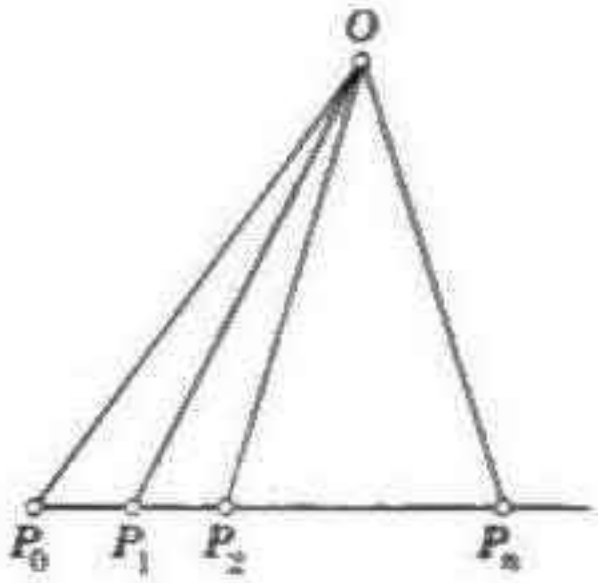


Figura 13.4c

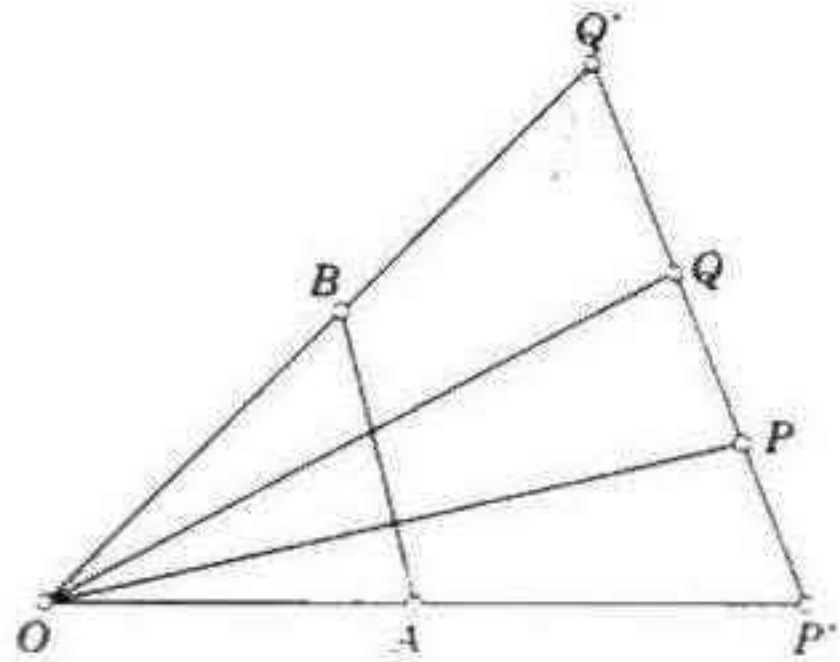


Figura 13.4d

tal que corte a OA en P', y a OB en Q', como está en la figura 13.4*d*. Al multiplicar las tres razones

$$\frac{OPQ}{OP'Q'} = \frac{PQ}{P'Q'}, \quad \frac{OP'Q'}{OAQ'} = \frac{OP'}{OA}, \quad \frac{OAQ'}{OAB} = \frac{OQ'}{OB}$$

obtenemos la razón que buscamos

13.43 $$\frac{OPQ}{OAB} = \frac{PQ}{P'Q'}\,\frac{OP'}{OA}\,\frac{OQ'}{OB}.$$

Con el objeto de obtener una expresión analítica del área de un triángulo OPQ con respecto a los ejes del vértice O, tomamos las coordenadas de los puntos

$$O, \quad A, \quad B, \quad P, \quad Q, \quad P', \quad Q'$$

como

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (p, 0), (0, q),$$

respectivamente. Puesto que la ecuación

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

de la recta PQ es satisfecha por (x_1, y_1) y (x_2, y_2), tenemos

$$\frac{1 - y_1/q}{x_1} = \frac{1}{p} = \frac{1 - y_2/q}{x_2},$$

de donde $$q = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}.$$

Al tomar el producto de

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{x_1 - x_2}{p}, \quad \frac{OP'}{OA} = p, \quad \frac{OQ'}{OB} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2},$$

obtenemos

13.44 $$\frac{OPQ}{OAB} = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Y deducimos, como se hizo en § 8.2, que un triángulo

$$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2)\,(x_3, y_3),$$

de posición general, tiene por área PQR, donde

13.45 $$\frac{PQR}{OAB} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Puesto que la transformación lineal homogénea

$$x' = ax + by, \qquad y' = cx + dy$$

lleva al triángulo OAB a

$$(0, 0)(a, c)(b, d),$$

concluimos que la afinidad 13.33 *preserva el área* si y sólo si

$$ad - bc = 1.$$

Una afinidad que preserva el área se llama *equiafinidad* (o "colineación equiafín" [Veblen y Young **2**, págs. 105–113]). El grupo de todas las equiafinidades, como el de todas las dilataciones, incluye el grupo de todas las traslaciones y semigiros como subgrupo normal, y además constituye un subgrupo normal del grupo de todas las afinidades. Las equiafinidades pueden ser de muchas clases. He aquí algunos ejemplos:

La *rotación hiperbólica* (o "transformación de Lorentz" o "dilatación de Procusto")

13.46 $$x' = \mu^{-1}x, \quad y' = \mu y \qquad (\mu > 0, \quad \mu \neq 1),$$

en la que $x'y' = xy$, conserva invariante cada rama de la hipérbola $xy = 1$. La *rotación hiperbólica cruzada*

13.47 $$x' = -\mu^{-1}x, \quad y' = -\mu y \qquad (\mu > 0, \quad \mu \neq 1)$$

intercambia las dos ramas. La *rotación parabólica*

13.48 $$x' = x + 1, \quad y' = 2x + y + 1,$$

en la que $x'^2 - y' = x^2 - y$, conserva invariante la parábola $y = x^2$. La *rotación elíptica*

13.49 $$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad y' = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta$$

conserva invariante la elipse $x^2 + y^2 = 1$, y es periódica cuando θ es conmensurable con π.

En § 2.8 (pág. 62) derivamos un polígono regular $P_0P_1P_2 \ldots$ a partir de un punto P_0 (distinto del centro) al aplicar repetidamente la rotación que recorre $2\pi/n$. (La rotación lleva P_0 a P_1, P_1 a P_2, y así sucesivamente.) Aunque la medida de ángulos carece de sentido en la geometría afín, podemos definir un *polígono regular desde el punto* de vista afín cuyos vértices P_j se derivan de un punto adecuado P_0 al aplicar repetidamente una equiafinidad. Se dice que el polígono es del tipo $\{n\}$ cuando la equiafinidad es una rotación elíptica 13.49, donde $\theta = 2\pi/n$ y n es racional, de manera que P_j tiene las coordenadas afines

$$(\cos j\theta, \mathrm{sen}\, j\theta) \qquad (\theta = 2\pi/n).$$

En la figura 13.4*e* podemos ver un pentagrama ($n = 5/2$) y un pentágono ($n = 5$) que son regulares desde el punto de vista afín.

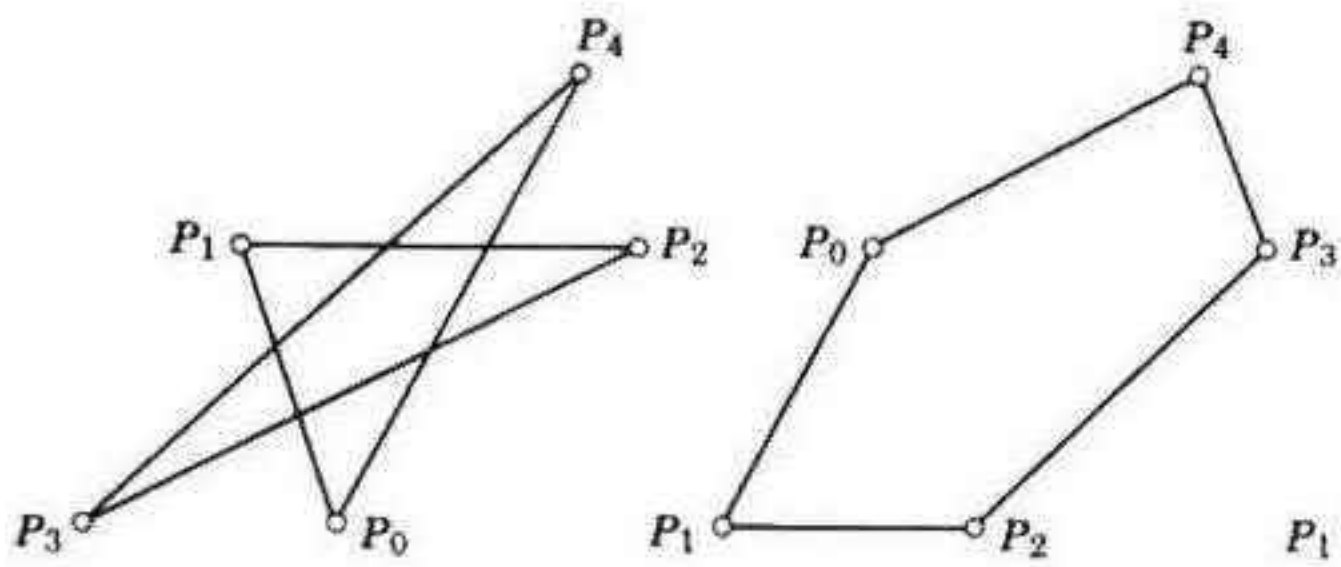


Figura 13.4e

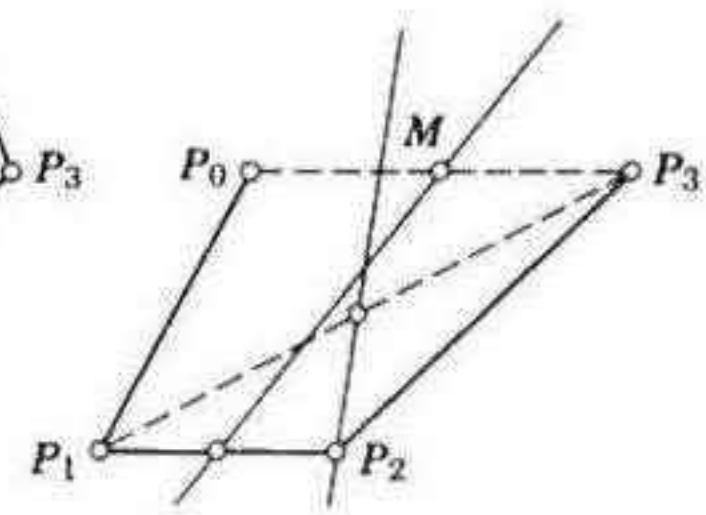


Figura 13.4f

EJERCICIOS

1. Dos triángulos con un lado común (como tenemos a ABC y BCD en la figura 13.2*d*) tienen la misma área si y sólo si la recta que une los demás vértices es paralela al lado común (es decir, si AD es paralela a BC).
2. Si un pentágono tiene cuatro de sus diagonales paralelas a cuatro de sus lados, la otra diagonal será también paralela al otro lado.
3. ¿Cuándo es una dilatación una equiafinidad?
4. ¿Cuándo es una ruptura una equiafinidad?
5. ¿Cuándo es una deformación una equiafinidad?
6. El producto de un número cualquiera de reflexiones afines es una equiafinidad.
7. Una traslación, semigiro o ruptura cualesquiera se pueden expresar como producto de dos reflexiones afines.
8. Si una equiafinidad no es una traslación ni un semigiro, ni una ruptura, se puede expresar como $P_0P_1P_2 \to P_1P_2P_3$ donde P_0P_3 es paralela a P_1P_2. (Véase la figura 13.4*f*.)
9. Se puede expresar toda equiafinidad como producto de dos reflexiones afines. (Veblen.)
10. En un polígono regular desde el punto de vista afín $P_0P_1P_2 \ldots$, las rectas P_iP_j y P_hP_k son paralelas siempre que $i + j = h + k$.

11. ¿Por qué hablamos de $x^2 + y^2 = 1$ como elipse y no como circunferencia (un poco después de 13.49)?
12. ¿Qué triángulos y qué cuadrángulos son regulares desde el punto de vista afín?
13. Constrúyase, un exágono regular desde el punto de vista afín.
14. Calcúlese la razón P_0P_3/P_1P_2 para un polígono regular desde el punto de vista afín de tipo $\{n\}$.
15. ¿Qué valores de n hacen a un polígono regular desde el punto de vista afín de tipo $\{n\}$ susceptible de ser construido con una regla de paralelas?

13.5 CELOSIAS BIDIMENSIONALES

A Farey le han dedicado veinte renglones en el Dictionary of National Biography . . . . *Su biógrafo omite lo único de su vida que le ha sobrevivido.*

G. H. Hardy

[Hardy y Wright 1, pág. 37]

El tratamiento que dimos a las celosías en § 4.1 (hasta la descripción de la figura 4.1*d*) es puramente afín. De hecho, una celosía es el conjunto de puntos cuyas coordenadas afines son enteros. Cualquiera de los puntos puede ser el origen O.

Sea A' un punto cualquiera de la celosía, y sea A el primer punto de la celosía en el rayo OA'. De acuerdo con Hardy y Wright [1, pág. 29], decimos que A es un punto *visible*, porque no hay ningún punto de la celosía entre O y A que obstruya la visión de A de un observador colocado en O. En términos de coordenadas afines, una condición necesaria y suficiente para que (x, y) sea visible consiste en que los enteros x y y sean primos entre sí, es decir, que no tengan divisor común mayor que 1. Los tres puntos visibles

$$(1, 0), \quad (1, 1), \quad (0, 1)$$

forman con el origen un paralelogramo. A éste se le llama *celda unitaria* (o "paralelogramo típico") de la celosía, puesto que las traslaciones la transforman en una infinidad de celdas iguales que llenan el plano sin traslaparse y sin dejar intersticios: es una región fundamental del grupo de las traslaciones. Y así nos sirve de unidad conveniente para calcular el área de una región.

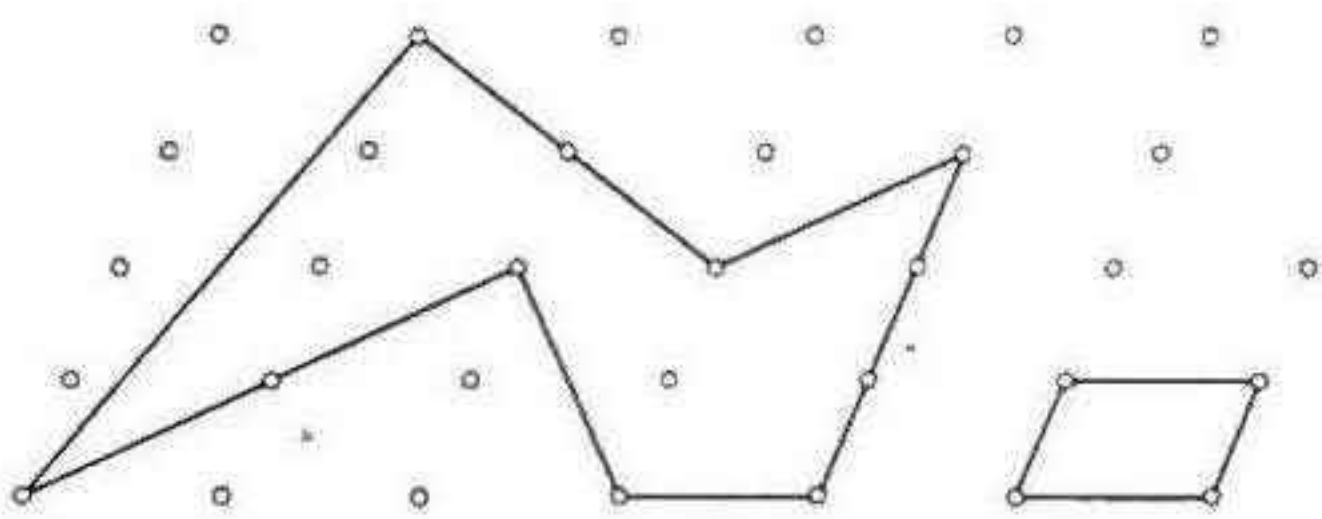


Figura 13.5a

Según Steinhaus [2, págs. 76–77, 260] se debe a Pick el descubrimiento del teorema siguiente, en 1899:*

13.51 *El área de un polígono simple cualquiera cuyos vértices son puntos de la celosía se determina por medio de la fórmula*

$$\tfrac{1}{2}b + c - 1,$$

donde b es el número de puntos de la celosía en la cota mientras c es el número de puntos dentro de ella.

(Por polígono "simple" entendemos uno tal que sus lados no se cortan. En la figura 13.5*a* se puede ver un ejemplo en el que $b = 11$, $c = 3$.)

Demostración. Empezamos por observar que la expresión $\frac{1}{2}b + c - 1$ es aditiva cuando se yuxtaponen dos polígonos. De hecho, dos polígonos en los que intervengan respectivamente $b_1 + c_1$ y $b_2 + c_2$ puntos de la celosía, tendrán un lado común que ha de contener n ($\geqslant 0$) puntos de la celosía además de los dos vértices en los extremos; entonces los valores de b y c para el polígono combinado son

$$b = b_1 + b_2 - 2n - 2, \qquad c = c_1 + c_2 + n,$$

de manera que

$$\tfrac{1}{2}b + c - 1 = (\tfrac{1}{2}b_1 + c_1 - 1) + (\tfrac{1}{2}b_2 + c_2 - 1).$$

En seguida, observemos que la fórmula es válida para un paralelogramo que carezca de puntos de la celosía en sus lados (de manera que $b = 4$ y la expresión se reduce a $c + 1$). Cuando N paralelogramos de ésos se colocan juntos, cuatro en cada vértice, para llenar una región grande, el número de puntos de la celosía que quedan implicados (al margen de un error periferial despreciable) es $N(c + 1)$, y este número ha de ser igual al de celdas unitarias que se necesitan para llenar la misma región.

Al partir el paralelogramo en dos triángulos congruentes por medio de una diagonal, vemos que la fórmula también es válida para un triángulo que carezca de puntos de la celosía en sus lados. Un triángulo que tenga puntos de la celosía en uno de sus lados puede reducirse al caso que hemos descrito al unir esos puntos con el vértice opuesto, de manera que se divida en triángulos menores. Este procedimiento tal vez haya de repetirse, pero es obvio que no habrá que hacerlo más que un número finito de veces. Por último, como señalábamos en la pág. 239, un polígono cualquiera puede ser dividido en triángulos; entonces, se suman las expresiones de las piezas que resultan para obtener el resultado que se busca.

En particular, tenemos que un paralelogramo cualquiera en el que $b = 4$ y $c = 0$ tiene por área 1 y nos puede servir de celda unitaria. Si los vértices de un paralelogramo así (en el orden del sentido contrario al de las manecillas del reloj) son

$$(0, 0), \quad (x, y), \quad (x + x_1, y + y_1), \quad (x_1, y_1),$$

* Una extensión a tres dimensiones se puede encontrar en J. E. Reeve, On the volume of lattice polyhedra, *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), 7 (1957), págs. 378-395.

vemos, a partir de 13.44, que

13.52 $$xy_1 - yx_1 = 1.$$

En otras palabras, esta es la condición que deben cumplir los puntos

13.53 $$(0, 0), \quad (x, y), \quad (x_1, y_1)$$

para formar un triángulo "vacío" de orientación positiva y de área de $\frac{1}{2}$, que podría usarse también para generar la celosía, como (0, 0) (1, 0), (0, 1). Así, tenemos que una celosía queda completamente determinada, si hacemos caso omiso de su posición, por el área de la celda unitaria que le corresponde. Es más, aunque hay una infinidad de puntos visibles en una celosía dada, todos tienen el mismo papel. (Estas propiedades de la geometría afín contrastan marcadamente con las de la geometría euclidiana, donde la forma de una celosía admite variaciones ilimitadas y los puntos visibles de cada celosía están a una infinidad de distancias diferentes.)

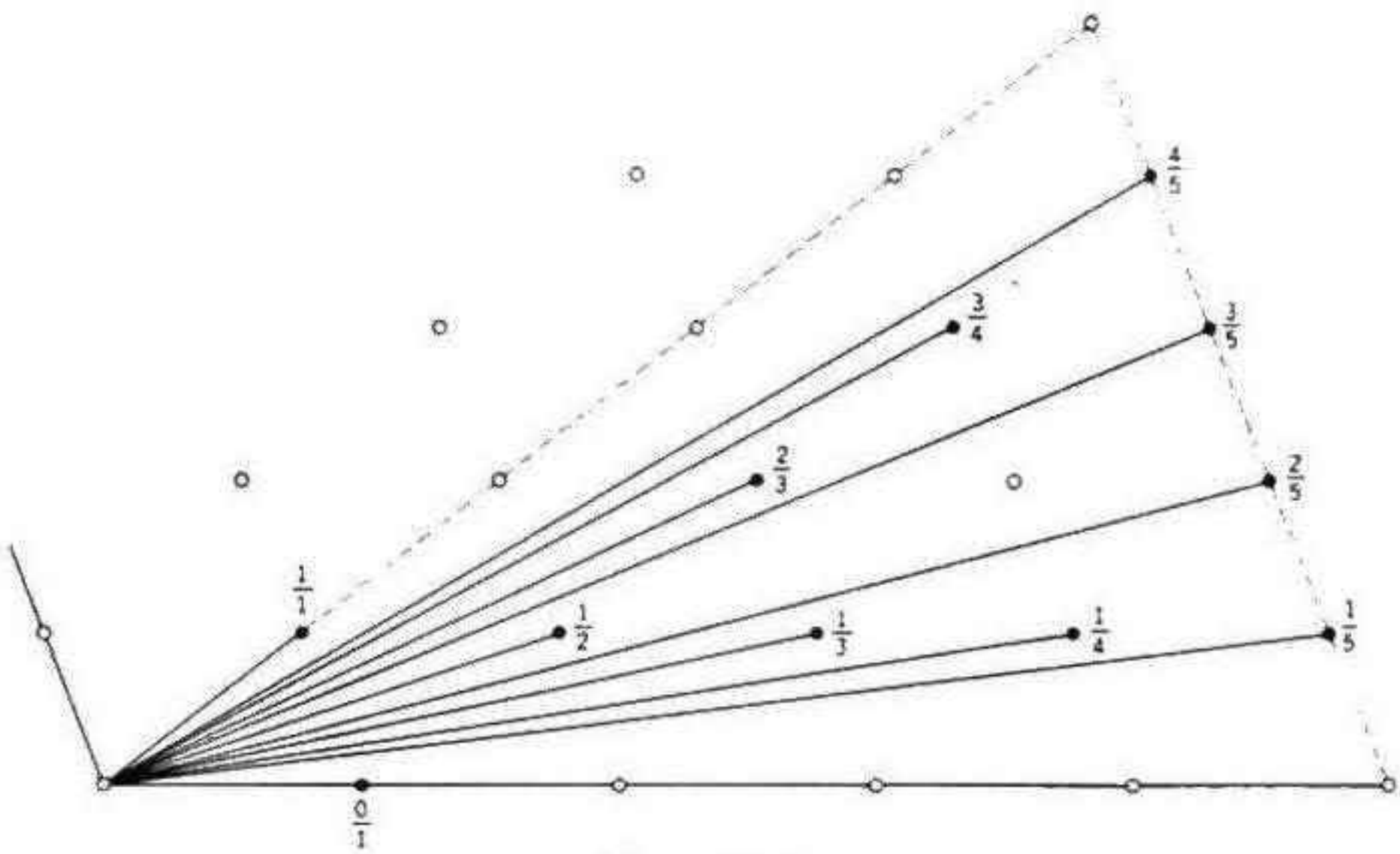


Figura 13.5b

George Polya* aplicó 13.52 a un lema de la teoría de los números que tiene utilidad. La *serie de Farey* F_n de orden n es la sucesión ascendente de las fracciones de 0 a 1 tales que sus denominadores no exceden n. Así, tenemos que x/y pertenece a F_n cuando x y y son primos entre sí y

13.54 $$0 \leqslant y \leqslant x \leqslant n.$$

Por ejemplo, F_5 es

$$\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{1}.$$

* *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae*, Sectio Scientiarum Mathematicarum, **2** (1925), págs. 129-133.

La propiedad esencial de una sucesión de éstas, a partir de la que se deducen muchas otras propiedades por medio del álgebra, es que 13.52 es válido para dos fracciones adyacentes cualquiera

$$\frac{y}{x} \quad \text{y} \quad \frac{y_1}{x_1}.$$

Para demostrar esto, representaremos cada término y/x de la sucesión por (x, y), un punto de una celosía. Por ejemplo, los términos de F_5 son los puntos de la celosía que se han señalado en la figura 13.5*b* (donde, por conveniencia, se ha tomado el ángulo que forman los ejes como obtuso). Puesto que las fracciones han de estar reducidas a sus "menores términos", los puntos son visibles. Por 13.54, pertenecen al triángulo $(0, 0)$ $(n, 0)$ (n, n). Un rayo que parte del origen, que gira en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj, pasa por los puntos representativos en el orden adecuado. Si tenemos que y/x y y_1/x_1 son términos consecutivos de la sucesión, entonces (x, y) y (x_1, y_1) son puntos visibles tales que el triángulo que los une con el origen no contiene puntos de la celosía en su interior. En consecuencia, este triángulo es la mitad de una celda unitaria, y 13.52 es válida, como se afirmaba.

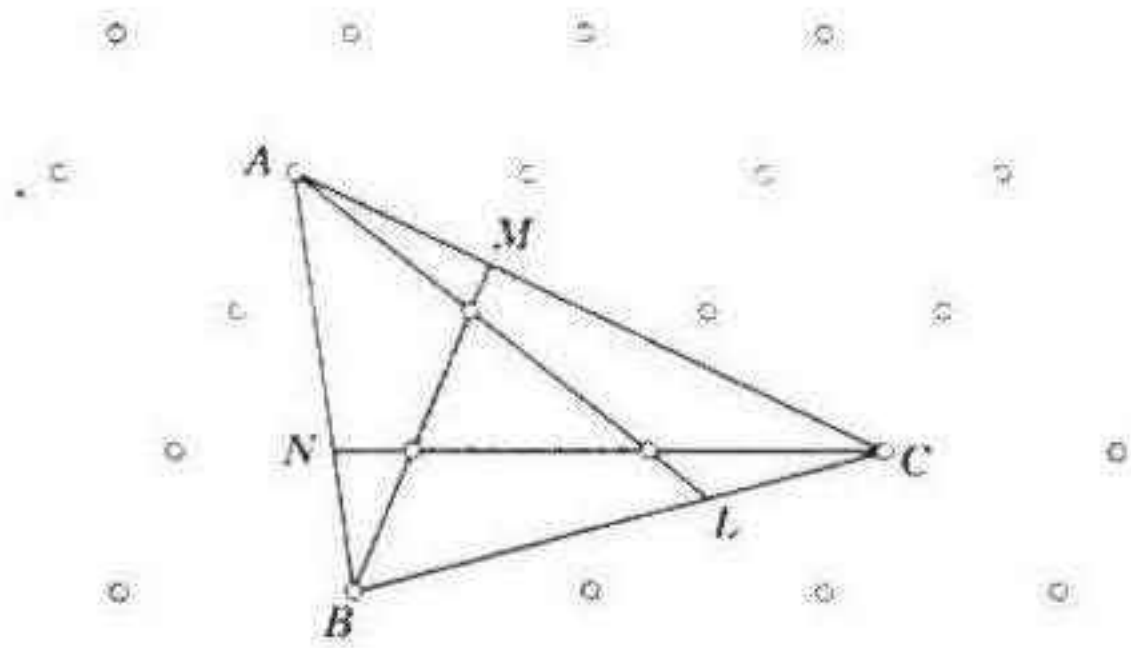


Figura 13.5c

Otro resultado que pertenece a la geometría afín es

13.55 *Si los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC se dividen en L, M, N en las razones correspondientes* $\lambda : 1$, $\mu : 1$, $\nu : 1$, *las cevianas AL, BM, CN forman un triángulo cuya área es*

$$\frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(\lambda\mu + \lambda + 1)(\mu\nu + \mu + 1)(\nu\lambda + \nu + 1)}$$

veces la de ABC.

Esto fue descubierto por Routh [**1**, pág. 82; véase también Dörrie **1**, págs. 41–42]. Daremos la demostración general en § 13.7, pero es interesante observar que, cuando $\lambda = \mu = \nu$, de manera que la razón de las áreas es $(\lambda - 1)^3/(\lambda^3 - 1)$, el resultado se puede deducir de 13.51. Por ejemplo, cuando $\lambda = \mu = \nu = 2$, de manera que cada lado se triseca [Steinhaus **2**, pág. 8], el triángulo central es un séptimo del total, y esto se ve de inmediato si

referimos la figura a una celosía, como se ha hecho en la figura 13.5*c*. Puesto que en el triángulo central $b = 3$, $c = 0$ mientras en ABC $b = 3$, $c = 3$ la razón de las áreas es $\frac{1}{2}/\frac{7}{2} = \frac{1}{7}$.

EJERCICIOS

1. Si y/x y y_1/x_1 son términos consecutivos de una serie de Farey, x y x_1 son primos entre sí.

2. Si y_0/x_0, y/x, y_1/x_1 son tres términos consecutivos de una serie de Farey,

$$\frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = \frac{y}{x}.$$

(C. Haros, 1802.)

3. Los puntos A, B, C de la figura 13.5*c* pertenecen a una celosía cuya celda unitaria es la de la celosía básica. (Un estudio de la teoría euclidiana de celosías compuestas se encuentra en Coxeter, Configurations and maps, *Reports of a Mathematical Colloquium* (2), **8** (1948), págs. 18–38, sobre todo las figuras i, v, vii.)

4. Por medio de celosías, demuéstrese 13.55 cuando (*a*) $\lambda = \mu = \nu = 3$, (*b*) $\lambda = \mu = \nu = \frac{3}{2}$.

5. Únanse los vértices A, B, C, D de un paralelogramo con los puntos medios de los lados correspondientes BC, CD, DA, AB, de manera que se forme un paralelogramo más pequeño en el centro. Su área es la quinta parte de la de $ABCD$. Se obtiene otro paralelogramo así al unir A, B, C, D con los puntos medios de CD, DA, AB, BC. La parte común de los dos paralelogramos pequeños es un octágono con simetría central, cuya área es la sexta parte de la de $ABCD$ [Dörrie 1, pág. 40].

6. En la notación de 13.55, el área del triángulo LMN es

$$\frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)}$$

veces la de ABC. (*Indicación*: Se puede calcular el área relativa de CLM, etc., por medio de 13.42.)

7. De los cuatro triángulos ANM, BLN, CML, LMN, el último no puede tener la menor área a menos que L, M, N sean los puntos medios de BC, CA, AB. (H. Debrunner.*)

13.6 VECTORES Y CENTROIDES

> *Un vector es en realidad lo mismo que una traslación, aunque usamos fraseologías diferentes al hablar de vectores y al hablar de traslaciones. En lugar de decir: la traslación $A \to A'$ que lleva el punto A a A', se dice: el vector $\overrightarrow{AA'}$. . . . Si se hace partir el mismo vector de B de manera que su otro extremo esté en B', tendremos que la traslación que lleva A a A' también lleva B a B'.*
>
> H. Weyl [1, pág. 45]

Como vimos en § 2.5, un *grupo* es un sistema asociativo que contiene una identidad y, para cada elemento, un inverso. Los ejemplos aritméticos consisten en los números racionales positivos, los reales positivos, los números

* *Elemente der Mathematik*, **12** (1957), pág. 43, Aufgabe 260.

complejos de módulo 1 y todos los números complejos, con la excepción de 0, combinados, en cada caso, por la multiplicación común. Estos casos son la causa de que resulte natural la adopción de una notación multiplicativa con respecto a todos los grupos, de manera que la combinación de S y T sea ST, la inversa de S sea S^{-1}, y la identidad sea 1. Sin embargo, suele ser conveniente, sobre todo en el caso de los grupos abelianos (es decir, conmutativos) emplear la notación aditiva, en la que la combinación de S y T será $S + T$, la inversa de S, $-S$ y la identidad, 0. Si buscamos casos comparables de la misma sencillez en la aritmética con respecto a esta otra notación, no tenemos sino que considerar los enteros, los racionales, los reales y los complejos, que en cada caso se combinan por medio de la adición ordinaria.

La transición de un grupo multiplicativo a otro aditivo correspondiente es la base de la teoría de los logaritmos [Infeld 1, págs. 97 - 100].

Cuando salimos del dominio de la aritmética, la elección entre la adición y la multiplicación no es sino un problema de notación. En particular, el grupo abeliano de traslaciones, que hemos expresado como grupo multiplicativo, se convierte en el grupo aditivo de los *vectores*.

En esta notación, 13.21 afirma que dos puntos cualquiera A y A' determinan un vector único $\overrightarrow{AA'}$ (que va de A a A'), la figura 13.2*b* representa una situación en la que

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}.$$

13.23 afirma que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

y 3.23 señala que, para dos vectores cualquiera **a** y **b**,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Al proseguir con el mismo espíritu, llamaremos O al origen en lugar de I, y el vector cero quedará denotado por **0**. Los múltiplos enteros de un vector cualquiera distinto de cero proceden del origen a los puntos de una celosía unidimensional. Se dice que dos vectores **e** y **f** son *independientes* cuando ninguno es múltiplo (real) del otro, es decir, cuando los únicos números que satisfacen la ecuación vectorial

$$x\mathbf{e} + y\mathbf{f} = \mathbf{0}$$

son $x = 0$ y $y = 0$. Dos de estos vectores (que corresponden a las traslaciones X y Y de la figura 4.1*c*) constituyen la base de un sistema de coordenadas afines: nos permiten definir las coordenadas de un punto cualquiera como los coeficientes de la expresión

$$x\mathbf{e} + y\mathbf{f}$$

con respecto al *vector de posición* que va del origen al punto dado. En otras

palabras, al referirnos al triángulo OAB, las coordenadas afines de un punto P serán los coeficientes de la expresión

$$\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}.$$

Encontraremos que resulta útil tomar de la estática el concepto del centroide (o "centro de gravedad") de un conjunto de números que se han "pesado", es decir, de puntos a cada uno de los que se les asocia de un modo especial un número real. Por conveniencia, diremos que estos números son masas, aunque cuando algunos de ellos sean negativos el concepto de carga eléctrica resulte más ilustrativo.

Asociemos las masas $t_1, \ldots, t_k$ a k puntos distintos $A_1, \ldots, A_k$; sea O un punto cualquiera (que posiblemente coincida con alguno de los puntos A) y considérese el vector

$$t_1\,\overrightarrow{OA_1} + \ldots + t_k\,\overrightarrow{OA_k}.$$

Si $t_1 + \ldots + t_k = 0$, este vector es independiente de la elección de O. Pues tenemos que, al substraer de él el resultado de usar O' obtendremos

$$t_1\,(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{O'A_1}) + \ldots + t_k\,(\overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{O'A_k})$$
$$= (t_1 + \ldots + t_k)\,\overrightarrow{OO'} = \mathbf{0}.$$

Pero es más interesante advertir que si

$$t_1 + \ldots + t_k \neq 0,$$

tendremos

$$t_1\,\overrightarrow{OA_1} + \ldots + t_k\,\overrightarrow{OA_k} = (t_1 + \ldots + t_k)\,\overrightarrow{OP},$$

donde el punto P es independiente de la elección de O. Pues si efectuamos el mismo procedimiento con O' en lugar de O, de modo que resulte P' en lugar de P, tendremos, por substracción,

$$(t_1 + \ldots + t_k)\,\overrightarrow{OO'} = (t_1 + \ldots + t_k)(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O'P'})$$

de donde
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OP},$$

de manera que P' coincide con P. Este punto P, que está dado por

$$\Sigma t_i\,\overrightarrow{OP} = \Sigma t_i\,\overrightarrow{OA_i},$$

se llama *centroide* (o "baricentro") de las k masas t_i en A_i.

Puesto que hemos determinado P, podemos dar a O su posición, y tendremos

$$\Sigma t_i \overrightarrow{PA_i} = \mathbf{0}.$$

Si solamente hay dos puntos,

$$t_1 \overrightarrow{PA_1} = -t_2 \overrightarrow{PA_2}.$$

de manera que P queda en la recta A_1A_2 y divide el segmento A_1A_2 en la razón de $t_1 : t_2$. En particular, si $t_1 = t_2$, P es el punto medio de A_1A_2.

Con respecto a un triángulo $A_1A_2A_3$, tenemos

$$\begin{aligned}(t_1 + t_2 + t_3)\overrightarrow{OP} &= t_1\overrightarrow{OA_1} + t_2\overrightarrow{OA_2} + t_3\overrightarrow{OA_3}\\ &= t_1\overrightarrow{OA_1} + (t_2 + t_3)\overrightarrow{OQ}.\end{aligned}$$

donde Q es el centroide de t_2 en A_2 y de t_3 en A_3. Así, al buscar el centroide de tres masas, podemos reemplazar dos de ellas por medio de la masa combinada en su propio centroide. (La generalización a más de tres masas es obvia.) En particular, cuando $t_1 = t_2 = t_3$ (= 1, por ejemplo), Q es el punto medio de A_2A_3, y P divide a A_1Q en la razón de 2 : 1. Así, el "centroide" G de un triángulo (§ 1.4) es el centroide de masas iguales en sus tres vértices.

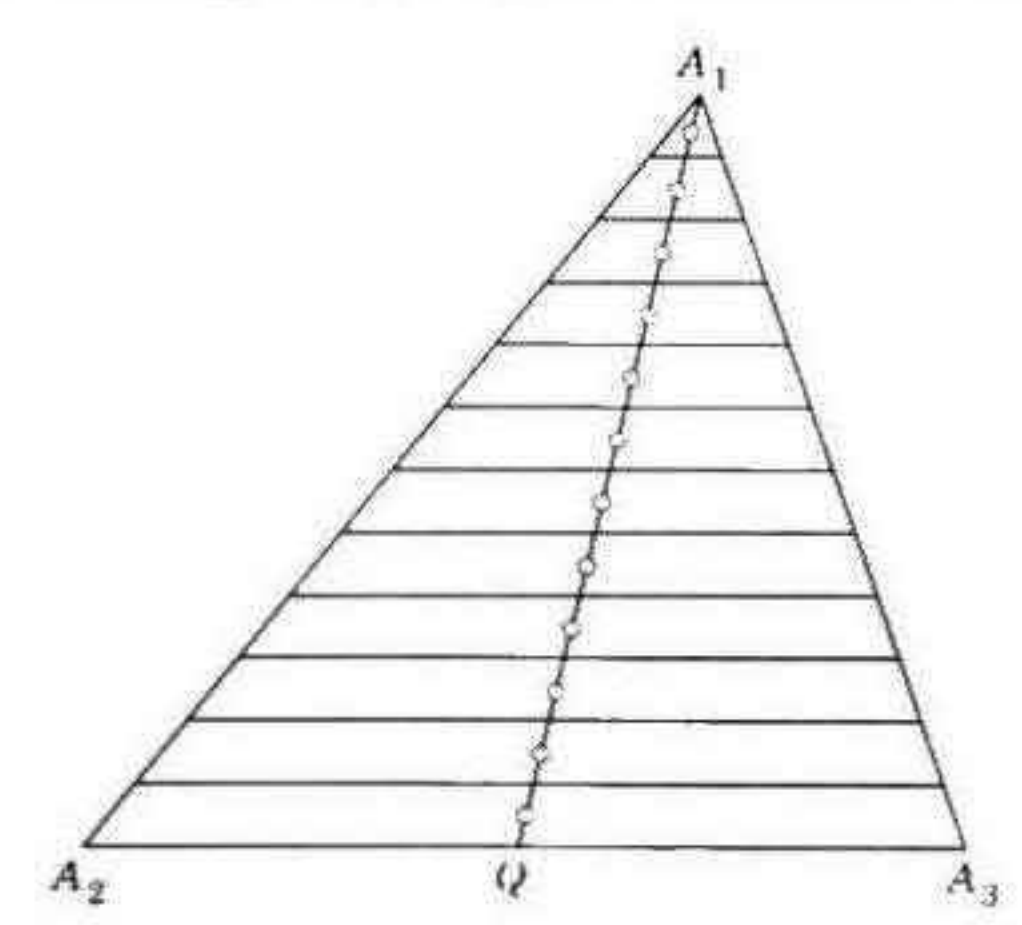


Figura 13.6a

Este mismo punto G donde concurren las medianas, es también el centroide de una *lámina* o "placa" triangular de densidad uniforme. (En un sentido estricto, en esta idea interviene el cálculo integral.) Pues podemos dividir el triángulo en franjas estrechas que sean paralelas al lado A_2A_3, como se ve en la figura 13.6*a*. Los centroides de estas franjas quedan evidentemente en la mediana A_1Q. En consecuencia, el centroide de toda la lámina está en esta mediana, así como en las otras. (Arquímedes se valió de este argumento en el siglo tercero a. J. C.)

EJERCICIOS

1. Verifíquese detalladamente que
(i) los números racionales positivos,
(ii) los números reales positivos,
(iii) los números complejos de módulo 1,
(iv) todos los complejos con la excepción de 0
forman grupos multiplicativos, y que
(v) los enteros,
(vi) los números racionales,
(vii) los números reales,
(viii) los números complejos
forman grupos aditivos. Explíquese la razón por la que los cuatro primeros conjuntos no constituyen grupos aditivos, mientras los cuatro últimos no forman grupos multiplicativos.

2. Si A, B, C están en la misma recta y A', B', C' en otra, donde

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}},$$

entonces los puntos que dividen los segmentos AA', BB', CC' son o bien colineales o bien coincidentes (cf. § 3.6). (*Indicación*: Considérese el centroide de las masas adecuadas en A, C, A', C'.)

3. El centroide de masas iguales en los vértices de un cuadrángulo es el centro del paralelogramo de Varignon (figura 13.2*g*).

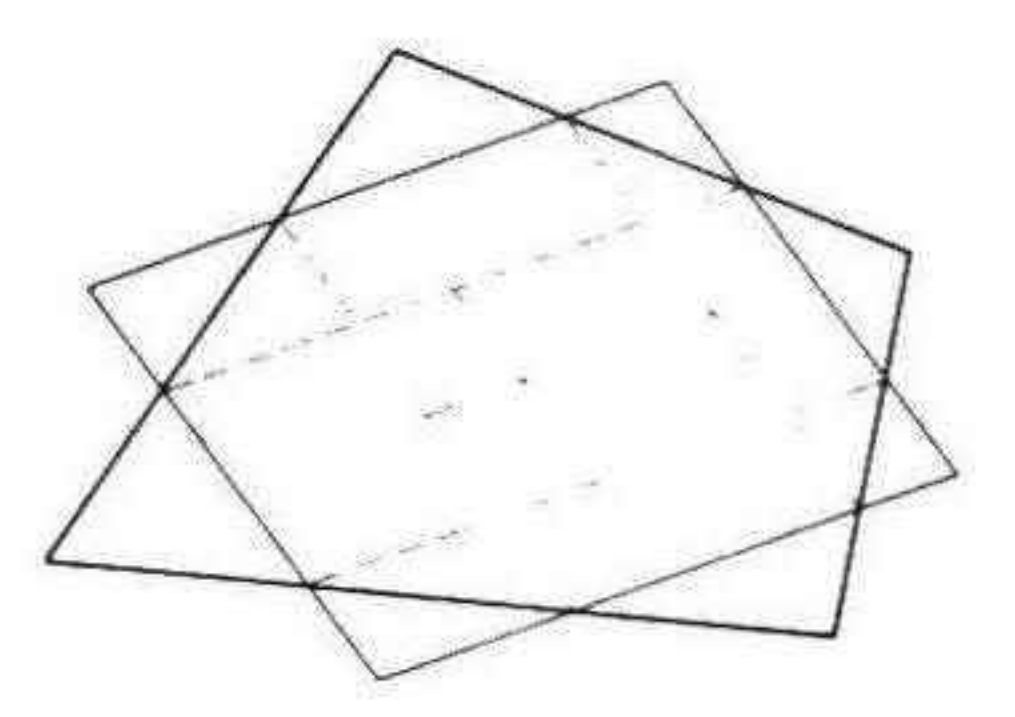


Figura 13.6b

4. El centroide de una lámina cuadrangular es el centro del paralelogramo de Wittenbauer, en el que los lados unen puntos adyacentes de trisección de los lados originales, como se ve en la figura 13.6*b*. Este teorema se debe a F. Wittenbauer (1857–1922) [Blaschke 2, pág. 13], y fue redescubierto por J. J. Welch y V. W. Foss.*

5. ¿En qué clase de cuadrángulo tendremos que los centroides que hemos descrito en los dos últimos ejercicios coincidirán?

13.7 COORDENADAS BARICENTRICAS

Si $t_1 + t_2 \neq 0$, las masas t_1 y t_2 en dos puntos fijos A_1 y A_2 determinan un centroide único P, como se tiene en la figura 13.7*a*. Este punto será el

* *Mathematical Gazette*, **42** (1958), pág. 55; **43** (1959), pág. 46.

mismo A_1 cuando $t_2 = 0$, o será A_2 cuando $t_1 = 0$. Está en el segmento A_1A_2 cuando las masas t son ambas positivas (o son ambas negativas), y en el rayo A_1/A_2 cuando

$$t_1 > -t_2 > 0,$$

y en el rayo A_2/A_1 cuando $\quad t_2 > -t_1 > 0.$

Figura 13.7a

Y, al revés, si se nos da un punto P en la recta A_1A_2, hemos de poder encontrar los números t_1 y t_2 tales que

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{A_1P}{PA_2} \quad \text{o} \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{PA_2}{A_1P};$$

entonces P será el centroide de las masas t_1 y t_2 en A_1 y A_2. Puesto que las masas μt_1 y μt_2 (donde $\mu \neq 0$) determinan el mismo punto que determinaban t_1 y t_2, estas *coordenadas baricéntricas* son homogéneas:

$$(t_1, t_2) = (\mu t_1, \mu t_2) \qquad (\mu \neq 0).$$

De la misma manera, como observó Mobius en 1827, podemos disponer coordenadas baricéntricas en el plano de un *triángulo de referencia* $A_1A_2A_3$. Si $t_1 + t_2 + t_3 \neq 0$, las masas t_1, t_2, t_3 en los tres vértices determinan un punto P (el centroide) de coordenadas (t_1, t_2, t_3). En particular, $(1, 0, 0)$ es A_1, $(0, 1, 0)$ es A_2, $(0, 0, 1)$ es A_3 y $(0, t_2, t_3)$ es el punto en A_2 y A_3 cuyas coordenadas unidimensionales con respecto a A_2 y A_3 son (t_2, t_3). Para encontrar las coordenadas de un punto dado P de posición general, encontramos t_2 y t_3 a partir de un punto Q, como el que se ha descrito, de la recta A_1P, como se ve en la figura 13.7*b*, y a continuación determinamos t_1 como la masa en A_1 que equilibra la masa $t_2 + t_3$ en Q de manera que P sea el centroide. Y nuevamente, como teníamos en el caso unidimensional, las coordenadas son homogéneas:

$$(t_1, t_2, t_3) = (\mu t_1, \mu t_2, \mu t_3) \qquad (\mu \neq 0).$$

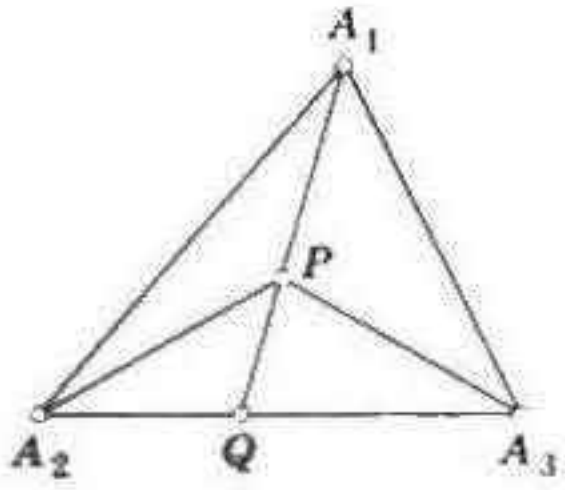


Figura 13.7b

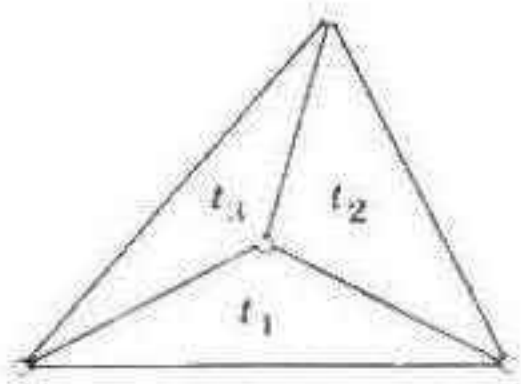


Figura 13.7c

Al unir P con A_1, A_2, A_3, descomponemos $A_1A_2A_3$ en tres triángulos grandes con un vértice común, P. *Las áreas de estos triángulos son proporcionales a las coordenadas baricéntricas de P*, como se advierte en la figura 13.7*c*. Esto es inmediato a partir de 13.42, puesto que

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{A_2Q}{QA_3} = \frac{A_1A_2Q}{A_1QA_3} = \frac{PA_2Q}{PQA_3} = \frac{A_1A_2Q - PA_2Q}{A_1QA_3 - PQA_3} = \frac{PA_1A_2}{PA_3A_1},$$

y lo mismo tenemos al considerar t_1/t_3, t_2/t_1. Las posiciones de P fuera del triángulo se abarcan también en lo dicho mediante una convención con respecto al área de un triángulo dirigido.

La desigualdad

$$t_1 + t_2 + t_3 \neq 0$$

nos capacita para normalizar las coordenadas, de modo que

13.71 $$t_1 + t_2 + t_3 = 1.$$

(No hay sino que dividir cada coordenada por la suma de las tres.) Las coordenadas baricéntricas que se han normalizado de esta manera se llaman coordenadas *de área*, pues son simplemente las áreas de los triángulos PA_2A_3, PA_3A_1, PA_1A_2, que se expresan en términos del área del triángulo total $A_1A_2A_3$ como unidad de medida. Las coordenadas de área no son homogéneas, sino "redundantes": la posición de un punto está determinada por dos de las tres coordenadas, y la que queda se conserva por considerar la simetría. Sin embargo, una expresión cualquiera en la que intervengan puede convertirse en homogénea si se le insertan las potencias adecuadas de $t_1 + t_2 + t_3$ en los lugares adecuados.

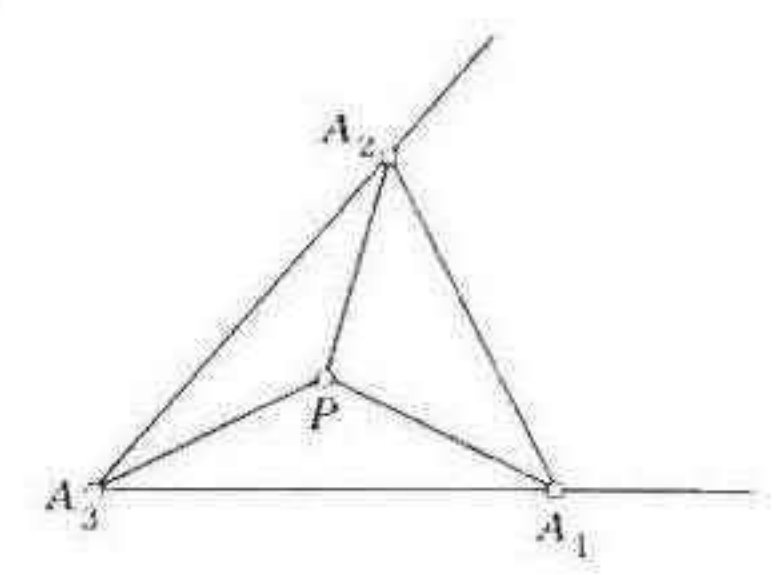


Figura 13.7d

Hemos visto que en las coordenadas afines una recta tiene una ecuación lineal. Veremos enseguida que en las coordenadas baricéntricas *una recta tiene una ecuación lineal homogénea.* Con este propósito nos valdremos de los segmentos A_3A_1 y A_3A_2 a manera de ejes de coordenadas afines, como se tiene en la figura 13.7*d*, de modo que las coordenadas de P, A_1, A_2, A_3 que antes eran

$$(t_1, t_2, t_3), \quad (1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1),$$

serán ahora

$$(x, y), \qquad (1, 0), \qquad (0, 1), \qquad (0, 0).$$

Por 13.44, las áreas de PA_2A_3 y PA_3A_1, como fracciones del triángulo "unitario" $A_1A_2A_3$ son precisamente

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} = y.$$

Por substracción, el área de PA_1A_2 es $1 - x - y$. Por lo tanto, las coordenadas *de área* de P se relacionan con las coordenadas afines por medio de las fórmulas sencillas

$$t_1 = x, \quad t_2 = y, \quad t_3 = 1 - x - y.$$

La recta general, cuya ecuación afín es 8.11, tiene la ecuación de área

$$at_1 + bt_2 + c = 0.$$

Al convertirla en homogénea por medio de la inserción de $t_1 + t_2 + t_3$, deducimos la ecuación baricéntrica

$$at_1 + bt_2 + c(t_1 + t_2 + t_3) = 0$$

ó

$$(a + c)t_1 + (b + c)t_2 + ct_3 = 0$$

o, si empleamos una notación más simétrica

13.72 $$T_1t_1 + T_2t_2 + T_3t_3 = 0.$$

Así, toda recta tiene una ecuación lineal homogénea. En particular, las rectas A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 tendrán las ecuaciones

13.73 $$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0.$$

La recta que pasa por dos puntos dados (r) y (s) de coordenadas

$$(r_1, r_2, r_3) \quad \text{y} \quad (s_1, s_2, s_3),$$

tiene la ecuación

13.74 $$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pues tenemos que esta ecuación es lineal en lo que a t respecta, y se satisface al reemplazar t por r ó s. El mismo resultado se obtiene al buscar los puntos fijos (r) y (s) tales que forman con el punto variable (t) un "triángulo" cuya área es cero. En términos de las coordenadas de área, donde el triángulo de referencia es la unidad, el área del triángulo (r) (s) (t) es, por 13.45 y 13.71,

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & 1 \\ s_1 & s_2 & 1 \\ t_1 & t_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_1 + r_2 + r_3 \\ s_1 & s_2 & s_1 + s_2 + s_3 \\ t_1 & t_2 & t_1 + t_2 + t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}.$$

En consecuencia, el área en las coordenadas baricéntricas generales es este último determinante divido por

$$(r_1 + r_2 + r_3)(s_1 + s_2 + s_3)(t_1 + t_2 + t_3).$$

Podemos ahora demostrar el teorema de Routh, 13.55, en su nivel más general. Si identificamos ABC con $A_1A_2A_3$ de manera que los puntos L, M, N sean

$$(0, 1, \lambda), \quad (\mu, 0, 1), \quad (1, \nu, 0),$$

podemos expresar las rectas AL, BM, CN como

$$\lambda t_2 = t_3, \quad \mu t_3 = t_1, \quad \nu t_1 = t_2.$$

Se cortan de dos en dos en tres puntos, que son

$$(\mu, \mu\nu, 1), \quad (1, \nu, \nu\lambda), \quad (\lambda\mu, 1, \lambda),$$

de manera que forman un triángulo cuya área, en términos de la del triángulo de referencia, es el resultado de dividir el determinante

$$\begin{vmatrix} \mu & \mu\nu & 1 \\ 1 & \nu & \nu\lambda \\ \lambda\mu & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda\mu\nu - 1)^2$$

por $(\mu + \mu\nu + 1)(1 + \nu + \nu\lambda)(\lambda\mu + 1 + \lambda)$, de acuerdo con lo que se afirmó en 13.55.

Tenemos un caso especial de importancia en el

TEOREMA DE CEVA. *Sean los lados de un triángulo ABC con divisiones en L, M, N en las razones correspondientes de $\lambda : 1$, $\mu : 1$, $\nu : 1$. Entonces las tres rectas AL, BM, CN serán concurrentes si y sólo si $\lambda\mu\nu = 1$.*

La recta general 13.72 encuentra los lados 13.73 del triángulo de referencia en los puntos

$$(0, T_3, -T_2), \quad (-T_3, 0, T_1), \quad (T_2, -T_1, 0),$$

que los dividen en las razones de

$$-\frac{T_2}{T_3}, \quad -\frac{T_3}{T_1}, \quad -\frac{T_1}{T_2},$$

cuyo producto es -1. Y, al revés, tres números cualquiera tales que su producto sea -1 se pueden expresar de esta manera con respecto a valores adecuados de T_1, T_2, T_3. En consecuencia,

TEOREMA DE MENELAO. *Divídanse los lados de un triángulo en L, M, N en las razones respectivas de $\lambda : 1$, $\mu : 1$, $\nu : 1$. Entonces, los tres puntos L, M, N serán colineales si y sólo si $\lambda\mu\nu = -1$.*

Los coeficientes T_1, T_2, T_3 en la ecuación 13.72 de una recta se llaman en ocasiones *coordenadas tangenciales* con respecto a la recta. Estas "coordenadas" homogéneas tienen una interpretación geométrica sencilla [Salmon **1**, pág. 11]: se pueden considerar como *las distancias de A_1, A_2, A_3 a la recta*,

que se miden en una dirección cualquiera (pero igual en cada caso). Para demostrar esto, sean A_1F_1, A_2F_2, A_3F_3 estas distancias, como se tiene en la figura 13.7*c*. Puesto que

$$\frac{A_1N}{NA_2} = -\frac{T_1}{T_2},$$

los triángulos homotéticos NA_1F_1 y NA_2F_2 resultan en

$$\frac{A_1F_1}{A_2F_2} = \frac{A_1N}{A_2N} = \frac{T_1}{T_2}.$$

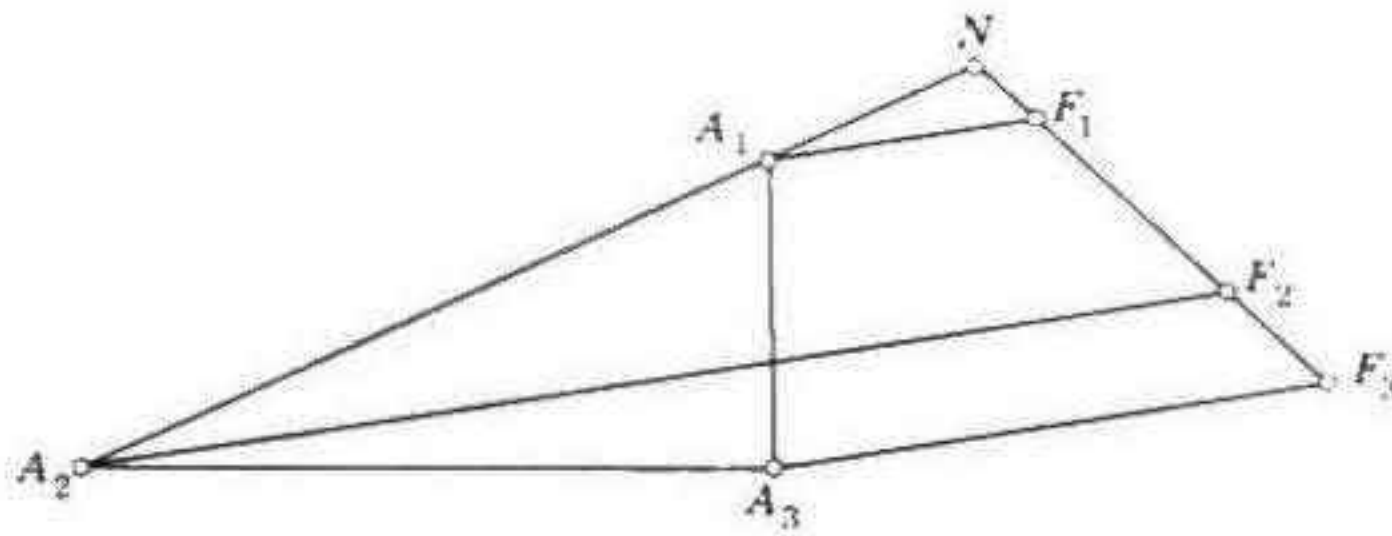


Figura 13.7c

Por lo que

$$\frac{A_1F_1}{T_1} = \frac{A_2F_2}{T_2},$$

y, de la misma manera, cada una de estas expresiones es igual a $\dfrac{A_3F_3}{T_3}$.

La invención de Möbius de las coordenadas homogéneas constituye una de las ideas de mayores alcances en la historia de las matemáticas: se puede comparar con la invención, por parte de Leibniz, de las diferenciales, que permiten escribir la ecuación

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

en la forma homogénea

$$df(x) = f'(x)\, dx$$

(por ejemplo, $d \operatorname{sen} x = \cos x\, dx$).

EJERCICIOS

1. Trácense las siete regiones en las que descomponen el plano las rectas A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 y márquese cada una de acuerdo con el signo de las tres coordenadas de área.

2. Verifíquese que a partir de 13.45 se tiene $1 - x - y$ como área del triángulo PA_1A_2 en la figura 13.7*d*.

3. En coordenadas de área, el punto medio de $(s_1, s_2, s_3)(t_1, t_2, t_3)$ es

$$\left(\frac{s_1 + t_1}{2}, \frac{s_2 + t_2}{2}, \frac{s_3 + t_3}{2}\right).$$

4. El controide de las masas σ y τ en puntos de coordenadas de área (s_1, s_2, s_3) y (t_1, t_2, t_3) es el punto de coordenadas baricéntricas

$$(\sigma s_1 + \tau t_1,\ \sigma s_2 + \tau t_2,\ \sigma s_3 + \tau t_3).$$

5. En coordenadas baricéntricas, un punto cualquiera de la recta $(s)(t)$ se puede expresar en la forma

$$(\sigma s_1 + \tau t_1,\ \sigma s_2 + \tau t_2,\ \sigma s_3 + \tau t_3).$$

6. Aplíquense coordenadas baricéntricas al ejercicio 6 al final de § 13.5. ¿Qué pasa con el resultado cuando L, M, N son colineales?

7. ¿De qué manera dependen los signos de T_1, T_2, T_3 de la posición de la recta 13.72 en relación con el triángulo de referencia? Cuando T_1 y T_2 son positivos, considérense los casos $T_2 < T_3$, $T_2 = T_3$, $T_2 > T_3$. Y descríbanse.

13.8 EL ESPACIO AFIN

¡Dame algo qué construir, y seré Dios mientras lo haga: apartaré a todos los obstáculos, obtendré duramente los conocimientos que necesite para la construcción . . . avanzaré como Dios a mi objetivo!

J. L. Synge [**2**, pág. 162]

La geometría afín se puede extender de dos a tres dimensiones por medio de los axiomas 12.42 y 12.43 en lugar de 12.41. El número total de axiomas no se incrementa, pues 13.12 se convierte en un teorema demostrable [Forder **1**, págs. 155–157]. Se dice que una recta y un plano, o dos planos, son *paralelos* si carecen de un punto común (o si la recta está en el plano, o si los dos planos coinciden). Así, un plano cualquiera que encuentra a dos planos paralelos los corta en rectas paralelas; si dos planos son paralelos, una recta cualquiera de uno de ellos es paralela al otro plano; si dos rectas son paralelas, un plano cualquiera que pase por cualquier recta es paralelo a la otra recta.

La existencia de planos paralelos queda afirmada por el teorema siguiente (cf. axioma 13.11):

13.81 *Para un punto cualquiera A y un plano cualquiera γ que no pase por A hay un solo plano por A que es paralelo a γ.*

Demostración. Sean q y r dos rectas que se intersectan en γ. Y sean q' y r' las paralelas correspondientes que pasan por A. Entonces, el plano $q'r'$ es paralelo a γ. De no ser así, por 12.431 tendríamos que los dos planos se encontrarían en una recta l. Como q' y r' son paralelas a γ, no pueden cortar a l. Y así, q' y r' son dos paralelas a l que pasan por A, lo que contradice 13.11. Y esto demuestra que $q'r'$ es paralelo a γ. Y, aún más, $q'r'$ es el único plano que pasa por A paralelo a γ. Pues de haber dos de ellos, se encontrarían en una recta s' que pasara por A, y obtenemos una contradicción al considerar su intersección con el plano As, donde s es una recta en γ que no es paralela a s'.

El paralelismo de las rectas es transitivo en el espacio, como lo era en el plano:

13.82 *Si p y q son ambas paralelas a r, también son paralelas entre sí.*

Demostración. [Forder **1**, pág. 140]. Cuando las tres rectas están en un mismo plano, el teorema es una consecuencia inmediata de 13.11, de modo que supondremos que no lo están. Para todo punto Q de q, los

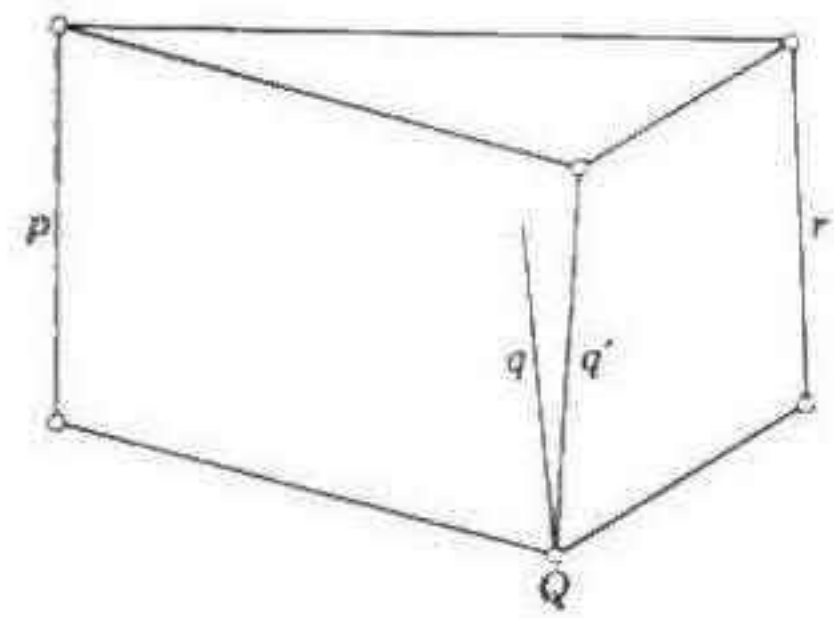


Figura 13.8a

planos Qp y Qr se encuentran en una línea, sea q' (figura 13.8*a*). Cualquier punto común de q' y r estaría en ambos planos Qp, Qr, y, por lo tanto, en su recta común p; pero esto es imposible, puesto que p es paralela a r. En consecuencia, q' es paralela a r. Pero la única paralela a r que pasa por Q es q. Así, q coincide con q', y es coplanar con respecto a p. Cualquier punto común de p y q tendrá que estar también en r. En consecuencia, p y q son paralelas.

La transitividad del paralelismo fundamenta una demostración alterna de 13.81. Con el objeto de establecer la imposibilidad de que el punto O esté en los dos planos γ y $q'r'$, nos representamos dos rectas que pasen por O y sean paralelas a q (y a q'), a r (y a r'). Los planos γ y $q'r'$, tales que cada uno contiene a ambas rectas, coincidirían, lo que contradice nuestra hipótesis de que A no está en γ.

Los tres planos de las caras OBC, OCA, OAB de un tetraedro $OABC$ forman con los planos correspondientes paralelos a ellos que pasan por A, B, C un paralelepípedo, cuyas caras son seis paralelogramos, como se ve en la figura 13.8*b* [Forder **1**, pág. 155].

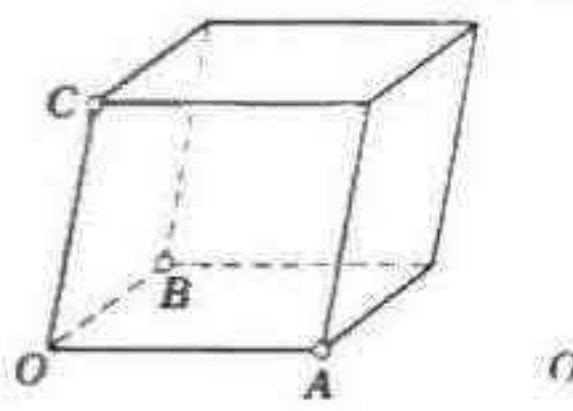


Figura 13.8b

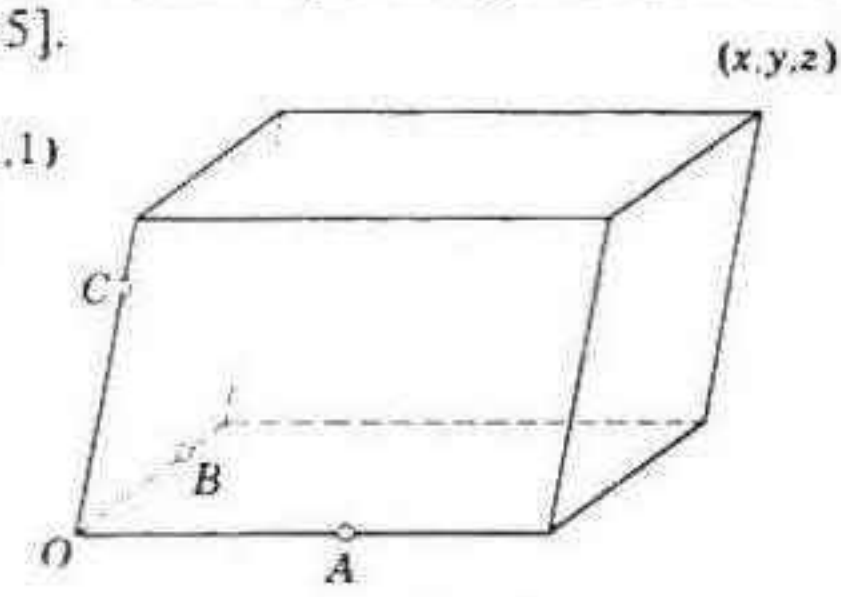


Figura 13.8c

Resulta fácil construir ahora la teoría tridimensional de dilataciones, traslaciones y vectores. Se dice que tres vectores **d**, **e**, **f** son *dependientes* cuando son coplanares, y en cada uno de estos casos se puede expresar como la combinación lineal de los otros dos. Y se dice que tres vectores **e**, **f**, **g** son *independientes* si la única solución de la ecuación vectorial

$$x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

es $x = y = z = 0$. Tres vectores de estos constituyen la base de un sistema de *coordenadas afines* tridimensionales. De hecho, cuando

$$\mathbf{e} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{f} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{g} = \overrightarrow{OC},$$

como se tiene en la figura 13.8c, se puede exhibir el vector general $\overrightarrow{OP}$ como diagonal del paralelepípedo que forman los tres planos paralelos a OBC, OCA, OAB que pasan por P. Entonces,

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g},$$

donde los términos de la suma son los vectores a lo largo de tres aristas del paralelepípedo.

En el espacio, como teníamos al trabajar en el plano, el centroide P de las masas t_i en puntos A_i queda determinado por un vector $\overrightarrow{OP}$ tal que

$$\Sigma t_i \, \overrightarrow{OP} = \Sigma t_i \, \overrightarrow{OA_i} \qquad (\Sigma t_i \neq 0).$$

Si $\overrightarrow{OA_i} = x_i\mathbf{e} + y_i\mathbf{f} + z_i\mathbf{g}$, deducimos

$$\Sigma t_i \, \overrightarrow{OP} = \Sigma t_i x_i \mathbf{e} + \Sigma t_i y_i \mathbf{f} + \Sigma t_i z_i \mathbf{g}.$$

En consecuencia, al expresarnos mediante coordenadas afines,

13.83 *El centroide de k masas t_i $(\Sigma t_i \neq 0)$ en puntos (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, \ldots, k)$ es*

$$\left(\frac{\Sigma t_i x_i}{\Sigma t_i}, \quad \frac{\Sigma t_i y_i}{\Sigma t_i}, \quad \frac{\Sigma t_i z_i}{\Sigma t_i}\right).$$

En particular, si $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, el centroide de tres masas en los puntos

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

es (t_1, t_2, t_3). En consecuencia,

13.84 *Las coordenadas afines de un punto cualquiera del plano $x + y + z = 1$ son iguales a sus coordenadas de área con respecto al triángulo que retiran de este plano las intersecciones con los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.*

Así, tenemos que hay una recta

$$\frac{x}{t_1} = \frac{y}{t_2} = \frac{z}{t_3}$$

que pasa por el origen (en el espacio afín) con respecto a cada punto de coordenadas baricéntricas (t_1, t_2, t_3). Por otra parte, las rectas que están en el plano $x + y + z = 0$ no tienen puntos correspondientes en el plano paralelo $x + y + z = 1$, a menos que acordemos extender el plano afín al postular una recta en el infinito

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

de modo que formemos el plano proyectivo. Esta posibilidad ya se mencionó en § 6.9; la examinaremos de manera más sistemática en el capítulo 14.

EJERCICIOS

1. Si tenemos que una recta a es paralela a un plano α, y el plano que pasa por a se encuentra a α en b, entonces a y b son rectas paralelas entre sí.
2. Si α, β, γ son planos que se cortan en las rectas $\beta \cdot \gamma = a$, $\gamma \cdot \alpha = b$, $\alpha \cdot \beta = c$, y a es paralela a b, entonces a, b, c son paralelas entre sí.
3. Todas las rectas que pasan por A y son paralelas a α están en un plano paralelo a α [Forder 1, pág. 155].
4. Cada una de las seis aristas de un tetraedro está en un plano que une esa arista con el punto medio de la arista opuesta. Los seis planos que se construyen así pasan todos por un punto: el centroide de las masas iguales en los cuatro vértices.
5. Desarróllese la teoría de coordenadas baricéntricas tridimensionales con respecto a un tetraedro $A_1A_2A_3A_4$.

13.9 CELOSIAS TRIDIMENSIONALES

El pequeño paralelepípedo que se construye sobre las tres traslaciones que se han escogido como unitarias . . . se conoce con el nombre de celda unitaria . . . La totalidad de la estructura de los cristales se genera por medio de la repeticion, mediante las tres traslaciones unitarias, de la materia que contiene en su volumen la celda unitaria.

M. J. Buerger (1903–)

[Buerger 1, pág. 5]

La teoría del volumen en el espacio afín es más difícil que la del área en el plano afín debido a la complicación que introdujo M. Dehn al observar que dos poliedros de igual volumen no son necesariamente derivables el uno del otro por medio de divisiones y rearreglos. Un tratamiento válido, que sugirió la Sra. Sally Ruth Struik, podrá describirse muy brevemente de la manera siguiente. Se tiene que dos tetraedros se relacionan por medio de una *afinidad* única $ABCD \to A'B'C'D'$ que transforma todo el espacio en sí mismo de manera que la colinealidad se preserva. En particular, un tetraedro $ABCC'$ se transforma en $ABC'C$ por medio de la *reflexión afín*

$$AB(CC'),$$

que intercambia C y C' mientras conserva invariante a todo punto del plano que une AB con el punto medio de CC'. Se dirá que dos tetraedros tienen el mismo *volumen* si uno se puede transformar en el otro por medio de una

equiafinidad: el producto de un número par de reflexiones afines. Esta comparación se extiende con facilidad de los tetraedros a los paralelepípedos, puesto que un paralelepípedo se puede descomponer en seis tetraedros de volúmenes iguales.

En tres dimensiones, como en dos, se puede considerar una *celosía* como el conjunto de los puntos cuyas coordenadas afines son enteros. Sin embargo, como es independiente del sistema de coordenadas que se elija, se describe de manera más simétrica como un conjunto discreto de puntos cuyo conjunto de vectores de posición es *cerrado bajo la substracción* es decir, que junto a dos vectores cualquiera el conjunto incluye también el resultado de restar uno de otro. Al substraer cualquiera de los vectores de sí mismo, obtenemos el vector cero

$$\mathbf{c} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

y también, por lo tanto, $\mathbf{0} - \mathbf{b} = -\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{a} = 2\mathbf{a}$, y así sucesivamente: el conjunto de los vectores, ya que contiene la diferencia de dos cualquiera, también contiene la suma de dos cualquiera, y todos los múltiplos enteros de cualquiera. La celosía es uni, bi, o tridimensional según el número de vectores independientes. En el caso tridimensional, el conjunto de tres vectores independientes $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ se llama *base* de la celosía cuando todos los vectores se pueden expresar en la forma

13.91 $$x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g},$$

donde x, y, z son enteros. Si tres de estos vectores, por ejemplo, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ forman otra base de la misma celosía, debe haber 18 enteros

$$a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

tales que

$$\mathbf{r}_\alpha = a_\alpha \mathbf{e} + b_\alpha \mathbf{f} + c_\alpha \mathbf{g}, \quad \mathbf{e} = \Sigma A_\alpha \mathbf{r}_\alpha, \quad \mathbf{f} = \Sigma B_\alpha \mathbf{r}_\alpha, \quad \mathbf{g} = \Sigma C_\alpha \mathbf{r}_\alpha$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{r}_\alpha = a_\alpha \Sigma A_\beta \mathbf{r}_\beta + b_\alpha \Sigma B_\beta \mathbf{r}_\beta + c_\alpha \Sigma C_\beta \mathbf{r}_\beta,$$

de donde

$$a_\alpha A_\beta + b_\alpha B_\beta + c_\alpha C_\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Puesto que el producto de dos determinantes se obtiene al combinar las hileras de uno con las columnas de otro, tenemos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Puesto que los dos determinantes de la izquierda son enteros cuyo producto es 1, cada uno de ellos ha de ser ± 1. Y, al revés, si a_α, b_α, c_α se dan de manera que su determinante sea ± 1, podremos derivar A_α, B_α, C_α al

"invertir la matriz", y tendremos que la base original **e**. **f**. **g** proporcionará como resultado la base igualmente efectiva $\mathbf{r}_a$. En consecuencia,

Una condición necesaria y suficiente para que dos ternas de vectores independientes

$$\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g} \qquad y \qquad a_a\,\mathbf{e} + b_a\,\mathbf{f} + c_a\,\mathbf{g} \qquad (a = 1, 2, 3)$$

sean bases alternas de la misma celosía consiste en que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{13.92}$$

[cf. Hardy y Wright **1**, pág. 28; Neville **1**, pág. 5].

En otras palabras, una celosía se deriva a partir de cualquiera de sus puntos al aplicar un *grupo discreto de traslaciones*: uni, bi o tridimensionales según sean las traslaciones colineales, coplanares pero no colineales o no coplanares. En el caso unidimensional, la traslación generatriz es única (con la excepción de que es reversible), pero en los otros casos, los dos o tres generadores, es decir, los vectores básicos, se pueden escoger de una infinidad de maneras diferentes. Una vez que los hemos escogido, podemos emplearlos para construir un sistema de coordenadas afines de manera que en el caso tridimensional el vector 13.91 parte del origen (0, 0, 0) al punto (x, y, z) y la celosía consta de los puntos cuyas coordenadas son enteros. Los ocho puntos

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1),$$

que se derivan a partir de los ocho vectores

$$\mathbf{0},\ \mathbf{e},\ \mathbf{f},\ \mathbf{g},\ \mathbf{f}+\mathbf{g},\ \mathbf{g}+\mathbf{e},\ \mathbf{e}-\mathbf{f},\ \mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g},$$

forman evidentemente un paralelepípedo, que constituye una *celda unitaria* de la celosía. Si argumentamos de modo análogo al que empleamos con respecto a la celosía bidimensional en § 4.1, *dos celdas unitarias cualquiera de la misma celosía tienen volúmenes iguales.*

Una recta cualquiera que una dos de los puntos de la celosía contiene a una infinidad de ellos, que forman una subcelosía unidimensional de la celosía tridimensional. De hecho, la recta que une (0, 0, 0) y (x, y, z) contiene también a (nx, ny, nz) para todo entero n. Si x, y, z tienen como máximo común divisor al número d, el punto de la celosía

$$(x/d, y/d, z/d)$$

estará en esta misma recta, y la traslación correspondiente genera el grupo de la celosía unidimensional. El punto de la celosía (x, y, z) será *visible* si y sólo si los tres enteros no tienen divisor común mayor que 1.

Un triángulo cualquiera de puntos de la celosía determina un plano que contiene una celosía bidimensional. Pues tenemos que si los vectores

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{e} + y_1\mathbf{f} + z_1\mathbf{g} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{e} + y_2\mathbf{f} + z_2\mathbf{g}$$

tienen componentes enteros, lo mismo sucede con $t_1\mathbf{r}_1 + t_2\mathbf{r}_2$ para cualesquiera enteros t_1 y t_2. El plano paralelo que pasa por cualquier otra celosía contendrá una subcelosía congruente. Y así podemos considerar que todos los puntos de la celosía se hallan distribuidos entre una sucesión infinita de planos paralelos, que se llaman *planos racionales* [Buerger **1**, pág. 7].

Cualquiera de esos planos, debido a que une tres puntos cuyas coordenadas son números enteros, tiene una ecuación de la forma

$$Xx + Yy + Zz = N, \tag{13.93}$$

donde los coeficientes X, Y, Z, N son todos enteros, de modo que los puntos de intersección (o intercepciones) con los ejes coordenados han de tener los valores racionales N/X, N/Y, N/Z. (De aquí proviene el nombre de "planos racionales".) Podemos suponer que el máximo común divisor de X, Y, Z es 1; de lo contrario, cualquier factor común de X, Y, Z sería también factor de N y entonces podríamos dividir ambos miembros de la ecuación por este número, de manera que nos quedaríamos con una ecuación más sencilla e igualmente efectiva del mismo plano.

Y, al revés, cualquier ecuación de ésas (las que tienen como máximo común divisor de X, Y, Z a 1) representa un plano que contiene una subcelosía bidimensional. Esto es obvio cuando $X = 1$, puesto que entonces podemos asignar valores enteros y arbitrarios a y, z, y resolver 13.93 para x. Cuando X, Y, Z son todos mayores que 1, consideramos el conjunto de los números

$$xX + yY + zZ,$$

donde x, y, z son enteros y varían mientras X, Y, Z permanecen constantes. Este conjunto (como el de los vectores de la celosía) es *ideal*: contiene la diferencia de dos cualquiera de sus miembros y (por lo tanto) a todos los múltiplos de cualquiera. Denotemos por d al miembro positivo menor que le pertenece, y por N a otro miembro cualquiera. Entonces, N ha de ser múltiplo de d: de no ser así, dividiríamos N por d y obtendríamos un residuo $N - qd$, que sería un miembro menor que d. Así, tenemos que todo miembro del conjunto es múltiplo de d. Pero X, Y, Z son miembros también. Por lo tanto, d, que es su divisor común, tiene que ser igual a 1, y el conjunto no es sino el de los enteros. En otras palabras, la ecuación 13.93 tiene una solución entera (y, por lo tanto, una infinidad de ellas) [cf. Uspensky y Heaslet **1**, pág. 54].

Para cada terna de enteros X, Y, Z, que han de ser primos entre sí en el sentido que se acaba de señalar (pero no necesariamente primos entre sí dos de ellos), tenemos una sucesión de planos paralelos 13.93, a espacios iguales, donde a cada plano corresponde un entero N. Puesto que todo punto de la celosía está en uno de los planos, la región infinita situada entre dos planos consecutivos queda vacía por completo. Uno de los planos, a saber, aquel

para el que $N = 0$, pasa por el origen. Los siguientes, que están determinados por $N = 1$, son llamados con propiedad *primeros* planos racionales [Buerger **1**, pág. 9]. Tendremos ocasión de considerarlos de nuevo en § 18.3.

EJERCICIOS

1. ¿Cómo se ha de dividir un paralelepípedo de manera que resulten seis tetraedros de volúmenes iguales?
2. Indentifíquese la transformación $(x, y, z) \to (x, y, -z)$ con la reflexión afín que conserva invariante el plano $z = 0$ mientras intercambia los puntos $(0, 0, \pm 1)$.
3. Una celosía se transforma en sí misma por medio de la inversión central que intercambia dos de sus puntos.
4. Todos los puntos de un primer plano racional de la celosía son visibles.
5. ¿Será todo plano racional que pase por un punto visible un primer plano racional?
6. Encuéntrese un triángulo de puntos de la celosía en el primer plano racional

$$6x + 10y + 15z = 1.$$

7. Obténgase una fórmula que determine todos los puntos de la celosía de este plano.
8. El origen es el único punto de la celosía en el plano

$$x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z = 0.$$

14

Geometría proyectiva

Hemos visto que en la geometría afín el paralelismo desempeña un papel principal. En la geometría proyectiva, por otra parte, no hay paralelismo: todo par de rectas coplanares es un par de rectas intersecantes. El conflicto con 12.61 se explica a partir de que el plano proyectivo no es "ordenado". El conjunto de los puntos de una recta, como el de las rectas que pasan por un punto, es cerrado: al determinar tres de ellas, no podemos tomar una que esté "entre" las otras dos. A primera vista se puede pensar que una geometría sin círculos, distancias, ángulos, mediación, ni paralelismo resultará gris, en cierta medida. Pero, de hecho, surge una colección muy bella e intrincada de proposiciones: proposiciones en las que Euclides jamás soñó, pues su interés en la medida lo llevaba en otra dirección. Unas cuantas de estas proposiciones sin métrica las descubrió Papo de Alejandría en el cuarto siglo A.C. Otras han quedado asociadas con los nombres de dos franceses: el arquitecto Girard Desargues (1591–1661) y el filósofo Blaise Pascal (1623–1662). Antes, el tema relacionado de la perspectiva fue estudiado por artistas como Leonardo da Vinci (1452–1519) y Albrecht Dürer (1471–1528).

Gracias a la invención de los puntos en el infinito, debida a Kepler, se pudo considerar el plano proyectivo como el plano afín con la adición de los puntos en el infinito. El *Traité des proprietés projectives des figures*, de Poncelet (1822), y la *Geometrie der Lage* de von Staudt (1847) sugerían una relación inversa, en la que la geometría proyectiva aparecía como una ciencia independiente, de manera que se podía considerar el plano afín como el plano proyectivo menos una recta arbitraria o, para de allí pasar a concebir el plano euclidiano como el plano afín con una regla especial para asociar los pares de puntos de o (en "direcciones perpendiculares") [Coxeter 2, págs. 115, 138]. En 1899 esta posición se aclaró aún más, cuando Mario Pieri colocó el tema en sus bases axiomáticas. Autores subsecuentes han propuesto otros sistemas de axiomas diferentes al de Pieri. El sistema particular del que

nos serviremos y que se cita en § 14.1 fue sugerido por Bachmann 1, págs. 76–77. Con el objeto de comprobar la consistencia de un sistema de axiomas se le aplica a un "modelo", en el que los conceptos primitivos se representan por medio de ideas familiares, con propiedades que nos encontramos dispuestos a aceptar [Coxeter 2, págs. 186–187]. En el caso presente, un modelo conveniente del plano proyectivo lo constituye el plano afín, si le agregamos la recta en el infinito (§ 6.9). Extenderemos las coordenadas baricéntricas de § 13.7 a las coordenadas proyectivas generales, de manera que se elimine el papel especial de la recta en el infinito. Como resultado, se tiene un modelo puramente algebraico en el que un *punto* es una terna ordenada de números (x_1, x_2, x_3), que no han de ser todos cero, donde una regla señala que $(\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3)$ será el mismo punto con respecto a cualquier $\mu \neq 0$, junto con la *recta*, que es una ecuación lineal homogénea. Una ventaja del modelo descrito consiste en que los números x_a y μ no han de ser necesariamente reales. Los axiomas que se eligen tienen suficiente generalidad para que las coordenadas pertenezcan a un *campo* cualquiera: en lugar de los reales, podemos emplear racionales, complejos o incluso un campo finito, como las clases residuales módulo un número primo. Según lo que acabamos de decir, hablaremos del plano proyectivo real, el plano proyectivo racional, el plano proyectivo complejo o un plano proyectivo finito.

14.1 AXIOMAS DEL PLANO PROYECTIVO GENERAL

> *Un método más sistemático que podría haberse empleado en esta memoria introductoria . . . habría consistido en ignorar por completo las ideas de distancia y geometría métrica. . . . La geometría métrica es una parte de la geometría descriptiva, y la geometría descriptiva es toda la geometría.*
>
> Arthur Cayley* (1821–1895)

Ya mencionamos el plano proyectivo en § 6.9. Tomamos como conceptos primitivos los de *punto*, *recta* y la relación de *incidencia*. Si un punto y una recta son incidentes, se dice que el punto *está en* la recta y que la recta *pasa por* el punto. Las palabras relacionadas de *unir*, *cortar* (o "encontrar", o "intersectar"), *concurrente* y *colineal* se usan en el sentido habitual. Tres puntos no colineales están en los vértices de un *triángulo* cuyos lados son rectas completas. (Los "segmentos" no están definidos.) Un *cuadrángulo completo* se define junto con sus cuatro vértices, sus seis lados

* *Collected Mathematical Papers*, 2 (Cambridge, 1889), pág. 592. Cayley empleó en 1859 la palabra "descriptiva" donde nosotros decimos hoy "proyectiva". Su idea de la supremacía de la geometría proyectiva debe considerarse actualmente un poco exagerada. Es verdad que la geometría proyectiva incluye a las geometrías afín, euclidiana y no euclidiana; sin embargo, no incluye a la geometría riemanniana general, ni a la topología.

y sus tres puntos diagonales como se hizo en § 1.7. El exágono $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ tiene seis vértices $A_1, B_2, \ldots, C_2$ y seis lados

$$A_1B_2,\ B_2C_1,\ C_1A_2,\ A_2B_1,\ B_1C_2,\ C_2A_1.$$

Los lados *opuestos* se definen de la manera obvia; por ejemplo, A_2B_1 es opuesto a A_1B_2. Después de estas definiciones preliminares, pasemos a enunciar los cinco axiomas.

AXIOMA 14.11 *Dos puntos distintos cualesquiera inciden en una sola recta.*

NOTACION. La recta que une los puntos A y B se denota por AB.

AXIOMA 14.12 *Dos rectas cualesquiera son incidentes en por lo menos un punto.*

TEOREMA 14.121 *Dos rectas cualesquiera diferentes son incidentes en un solo punto.*

NOTACION. Se denota el punto de intersección de las rectas a y b por $a \cdot b$; y el de AB y CD por $AB \cdot CD$. La recta que une $a \cdot b$ y $c \cdot d$ se denota por $(a \cdot b)(c \cdot d)$.

AXIOMA 14.13 *Existen cuatro puntos tales que tres de ellos no son colineales.*

AXIOMA 14.14 (Axioma de Fano) *Los tres puntos diagonales de un cuadrángulo completo no son nunca colineales.*

AXIOMA 14.15 (Teorema de Papo) *Si los seis vértices de un exágono están alternadamente en dos rectas, los tres puntos de intersección de los pares de lados opuestos son colineales.*

Una de las propiedades más elegantes de la geometría proyectiva es el *principio de dualidad* que afirma, en el plano proyectivo, que toda definición conserva su sentido y todo teorema mantiene su validez cuando intercambiamos de manera consistente las palabras *punto* y *recta* (y por lo tanto, también intercambiamos *estar en* y *pasar por*, *unir* y *intersectar*, *colineal* y *concurrente*, etc.). Para establecer este principio no hay sino que comprobar que *los axiomas implican sus propios duales*. Y así, a partir de un teorema y su demostración, de inmediato podemos afirmar el teorema dual; podríamos escribir mecánicamente la demostración del segundo al dualizar cada paso de la demostración del teorema original.

El dual del axioma 14.11 es el teorema 14.121, que el lector demostrará fácilmente (con ayuda del 14.12). El dual del axioma 14.12 es la mitad de 14.11. El dual del axioma 14.13 afirma la existencia de un *cuadrilátero completo*, que es el conjunto de cuatro rectas (que se llaman *lados*) que se intersectan por pares de seis puntos distintos (que se llaman *vértices*). Se dice que dos vértices son *opuestos* cuando no los une un lado. Las tres rectas de unión de los pares de vértices opuestos se llaman *diagonales*. Si $PQRS$ es un cuadrángulo cuyos lados son

$$p = PQ,\quad q = PS,\quad r = RS,\quad s = QR,\quad w = PR,\quad u = QS.$$

como se puede ver en la figura 14.1*a*, entonces *pqrs* es un cuadrilátero cuyos vértices son

$$P = p \cdot q, \quad Q = p \cdot s, \quad R = r \cdot s, \quad S = q \cdot r, \quad W = p \cdot r, \quad U = q \cdot s.$$

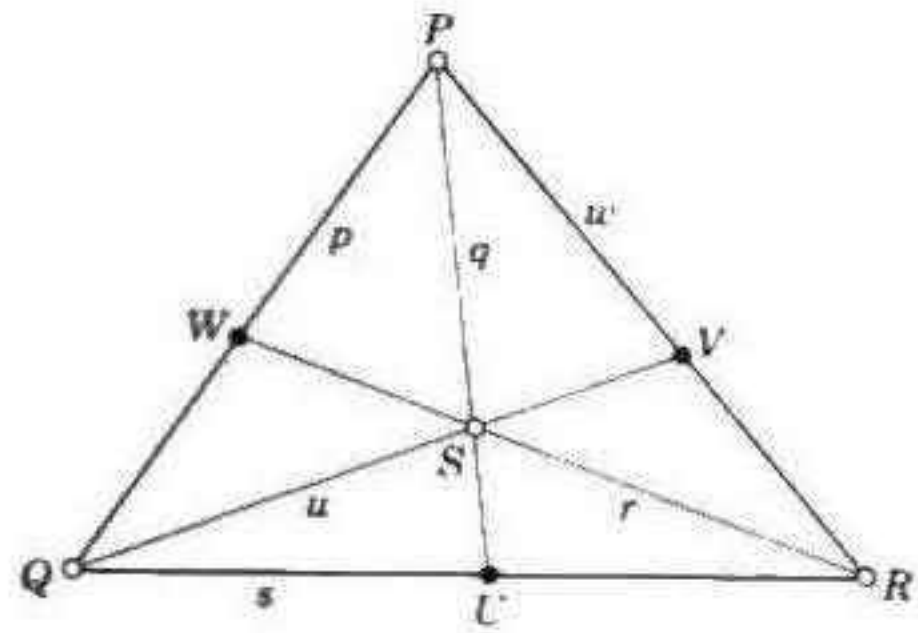


Figura 14.1a

El axioma 14.14 nos dice que los tres puntos diagonales

$$U = q \cdot s, \quad V = w \cdot u, \quad W = p \cdot r$$

no son colineales. El dual de éste nos dice que las tres diagonales de un cuadrilátero completo nunca concurren. Si esto fuera falso, debería haber un cuadrilátero particular tal que sus diagonales concurran. Llamémoslo *pqrs*, cuyas diagonales son

$$u = QS, \quad v = WU, \quad w = PR.$$

Puesto que concurren, el punto $w \cdot u = V$ ha de estar en v, lo que contradice nuestra afirmación de que U, V, W no son colineales.

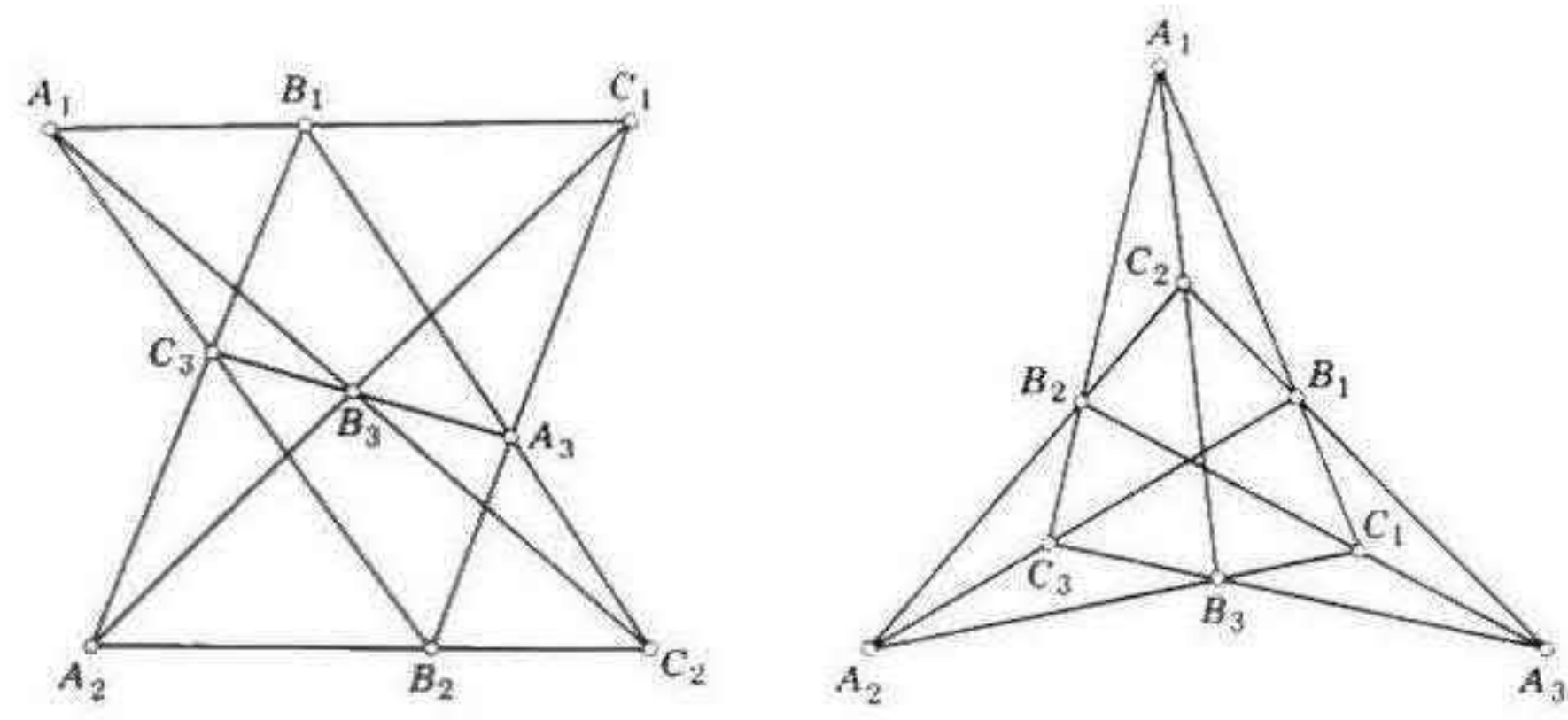


Figura 14.1b

En el axioma 14.15 intervienen nueve puntos y nueve rectas, que son susceptibles de trazarse de *muchas maneras (que en apariencia son distintas, pero que desde el punto de vista proyectivo resultan equivalentes)*, como las dos que se muestran en la figura 14.1*b*. $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ es un exágono

cuyos vértices quedan alternadamente en las dos rectas $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Los puntos de intersección de los pares de lados opuestos son

$$A_3 = B_1C_2 \cdot B_2C_1,\ B_3 = C_1A_2 \cdot C_2A_1,\ C_3 = A_1B_2 \cdot A_2B_1.$$

El axioma afirma que los tres puntos son colineales. Hemos creado nuestra notación de manera que los tres puntos A_i, B_j, C_k sean colineales siempre que

$$i + j + k \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3).^*$$

Otra manera de expresar el mismo resultado consiste en arreglar los 9 puntos en la forma de una *matriz*

14.151
$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix}$$

Si tuviéramos aquí un determinante y quisiéramos evaluarlo, procederíamos a multiplicar sus elementos por ternas. Estas seis ternas "diagonales", así como las dos primeras hileras de la matriz, indican ternas de puntos colineales. El axioma afirma que los puntos que están en la hilera inferior son también colineales. La dualidad inherente de esta afirmación se comprende al considerar una matriz análoga de rectas

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}$$

Estas rectas se pueden escoger de muchas maneras, una de las que consiste en lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_3B_1C_2, & b_1 &= A_1B_3C_2, & c_1 &= A_2B_2C_2, \\ a_2 &= A_2B_3C_1, & b_2 &= A_3B_2C_1, & c_2 &= A_1B_1C_1, \\ a_3 &= A_1B_2C_3, & b_3 &= A_2B_1C_3, & c_3 &= A_3B_3C_3. \end{aligned}$$

Y esto viene a completar nuestra demostración del principio de dualidad.

EJERCICIOS

1. Toda recta es incidente, por lo menos, con tres puntos distintos. (Esta afirmación, junto con la existencia de un punto y una recta que no son incidentes, se usan a veces como axiomas en lugar de 14.13 [Robinson 1, pág. 10; Coxeter 2, pág. 13.]

2. Un conjunto de m puntos y n rectas se llaman configuración (m_c, n_d) cuando c de las n rectas pasan por cada uno de los puntos mientras d de los m puntos están en cada una de las rectas. Los cuatro números no son independientes, pero cumplen la ecuación $cm = dn$. La dual de (m_c, n_d) es (n_d, m_c).

En el caso de una configuración auto-dual, tenemos que $m = c$, $c = d$, y el símbolo (n_d, n_d) se abrevia por conveniencia como n_d. Ejemplos sencillos los constituyen el triángulo 3_2, el cuadrángulo completo $(4_3, 6_2)$ y el cuadrilátero completo $(6_2, 4_3)$. El axioma 14.14 afirma la inexistencia de la *configuración de Fano*† 7_3. Los puntos y las rectas que se presentan en el axioma 14.15 (figura 14.1*b*) forman la

* Coxeter, Self-dual configurations and regular graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **56** (1950), pág. 432.

† Coxeter, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **56** (1950), págs. 423-425.

configuración de Papo 9_3, que puede considerarse (¿de cuántas maneras?) como un ciclo de tres triángulos

$$A_1B_1C_2, \quad A_2B_2C_3, \quad A_3B_3C_1,$$

tales que cada uno de ellos está inscrito en el siguiente (cf. figura 1.8*a*, donde UVW está inscrito en ABC). La autodualidad es evidente.

Al cambiar la notación de la manera adecuada, se puede expresar el axioma 14.15 así: *Si AB, CD, EF son concurrentes y DE, FA, BC son también concurrentes, entonces AD, BE, CF son concurrentes.*

3. Un *plano proyectivo finito* particular, en el que solamente existan 13 "puntos" y 13 "rectas", se puede definir de manera abstracta al denominar los puntos como P_i y las rectas como p_i $(i = 0, 1, \ldots, 12)$ con la regla de que P_i y p_j "inciden" si y sólo si

$$i + j \equiv 0, 1, 3 \text{ o } 9 \qquad (\text{mod } 13).$$

Elabórese una tabla con el objeto de indicar los 4 puntos que están en cada recta y las 4 rectas que pasan por cada punto [Veblen y Young 1, pág. 6]. Compruébese que se satisfacen todos los axiomas; por ejemplo, $P_0P_1P_2P_5$ es un cuadrángulo completo cuyos lados son

$$P_0P_1 = p_0, \quad P_0P_2 = p_1, \quad P_1P_5 = p_8, \quad P_0P_5 = p_9, \quad P_2P_5 = p_{11}, \quad P_1P_2 = p_{12}$$

y que tiene los puntos diagonales $P_3 = p_0 \cdot p_{11}$, $P_4 = p_9 \cdot p_{12}$, $P_8 = p_1 \cdot p_8$. Una matriz posible en relación con el axioma 14.15 es

$$\begin{Vmatrix} P_0 & P_2 & P_8 \\ P_3 & P_4 & P_6 \\ P_9 & P_{10} & P_5 \end{Vmatrix}.$$

La primera hilera puede consistir en un conjunto cualquiera de tres puntos colineales. La segunda puede ser uno cualquiera de esos conjuntos en una recta que no incida en uno de los puntos de la primera hilera. La última hilera queda ya determinada; en el caso anterior, por ejemplo consiste en

$$P_2P_6 \cdot P_4P_8 = P_9, \qquad P_3P_8 \cdot P_0P_6 = P_{10}, \qquad P_0P_4 \cdot P_2P_3 = P_5.$$

Esto difiere de la "matriz general de Papo" de 14.151 en que los conjuntos de puntos colineales no solamente ocurren en las hileras y en las diagonales generalizadas, sino también en las columnas. Dicho de otra manera, los 9 puntos forman una configuración que no es solamente 9_3 sino $(9_4, 12_3)$. Al omitir uno cualquiera de los 9 puntos, los 8 restantes forman una configuración autodual 8_3 que se puede considerar como un par de cuadrángulos inscritos mutuamente (como es el caso de $P_0P_9P_5P_8$ y $P_2P_3P_{10}P_6$). [Hilbert y Cohn Vossen 1, págs. 101–102.]

4. La geometría que describe el ejercio 3 se conoce por el símbolo $GP(2, 3)$. Al hablar más en general, tenemos que $GP(2, p)$ es un plano finito en el que cada recta contiene $p + 1$ puntos. Y, en consecuencia, cada punto está en $p + 1$ rectas. Hay $p^2 + p + 1$ puntos (y el mismo número de rectas) en total. En otras palabras, la totalidad de la geometría es una configuración n_d donde $n = p^2 + p + 1$ y $d = p + 1$. (En realidad, p no es arbitraria, aunque puede ser una potencia cualquiera de un número primo impar, por ejemplo, 5, 7 ó 9, y no 6.)* La posibilidad de existencia de estos planos finitos nos señala que la geometría proyectiva que definen los axiomas del 14.11 al 14.15 no es *categórica*: no es una sola geometría, sino muchas, y de hecho, una infinidad de ellas.

5. En una geometría proyectiva cualquiera, el teorema de Sylvester (§ 4.7) resulta falso.

* Si no insistimos en conservar el axioma 14.14, podemos desarrollar una "geometría de característica 2", en la que p sea una potencia de 2. Si no insistimos en el axioma 14.15, podemos desarrollar un plano "no Desarguesiano". Una aplicación de esto al caso de los cuadrados latinos mutuamente ortogonales, se encuentra en Robinson 1, pág. 161, Apéndice II.

14.2 COORDENADAS PROYECTIVAS

¡El álgebra moderna no parece tan terrible si se la expresa en estos términos geométricos!

G. de Robinson (1906–)

[Robinson 1, pág. 94]

Hemos visto (en § 13.7) que tres números reales sirven como coordenadas baricéntricas t_1, t_2, t_3 de un punto en el plano afín (con respecto a un triángulo de referencia cualquiera) si y sólo si

$$t_1 + t_2 + t_3 \neq 0.$$

También servirá una ecuación lineal homogénea de la forma 13.72 como ecuación de una recta si y sólo si los coeficientes T_1, T_2, T_3 no son todos iguales. Los comentarios que se hicieron un poco después de enunciar 13.84 señalan que estas restricciones artificiales se pueden evitar al extender el plano real afín al plano proyectivo real por medio de la adición de la recta en el infinito.

14.21 $$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

y de todos sus puntos (que son los puntos en el infinito en diversas direcciones).

Al interpretar T_1, T_2, T_3 como la distancia desde $A_1A_2A_3$ a la recta

$$T_1t_1 + T_2t_2 + T_3t_3 = 0,$$

es obvio que se obtiene una paralela al añadir el mismo número a los tres coeficientes T. Por lo tanto, el punto de intersección de dos paralelas cumple 14.21, es decir, está en la recta en el infinito.

Con el fin de subrayar el hecho de que en la geometría proyectiva la recta en el infinito no tiene un papel especial, abandonaremos las coordenadas baricéntricas (t_1, t_2, t_3) para establecer las coordenadas *proyectivas* generales (x_1, x_2, x_3) que están dadas por

$$t_1 = \mu_1x_1, \quad t_2 = \mu_2x_2, \quad t_3 = \mu_3x_3,$$

donde μ_1, μ_2, μ_3 son constantes, $\mu_1\mu_2\mu_3 \neq 0$. Así, (x_1, x_2, x_3) es el centroide de las masas $\mu_\alpha x_\alpha$ en A_α $(\alpha = 1, 2, 3)$, y la recta en el infinito tiene la ecuación, carente de rasgos particulares

$$\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3 = 0.$$

El contraste entre estas dos clases de coordenadas también se puede expresar de la manera siguiente. Tenemos que las coordenadas baricéntricas se pueden referir a un triángulo dado cualquiera; los puntos "más sencillos"

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

son los vértices, y el punto unitario (1, 1, 1), el centroide. Un aspecto más útil de las coordenadas proyectivas consiste en que se pueden referir ¡a cualquier cuadrángulo dado! Si tomamos tres de los cuatro vértices de

manera que se forme un sistema de coordenadas baricéntricas, podemos decir que el cuarto vértice es (μ_1, μ_2, μ_3). Al usar cada coordenada μ con el objeto de efectuar la transición a las coordenadas proyectivas, el nuevo vértice recibe las coordenadas nuevas $(1, 1, 1)$. Así como en la geometría afín todos los triángulos eran parecidos, tenemos en la geometría proyectiva que *todos los cuadrángulos son parecidos.*

Con el objeto de demostrar que las coordenadas proyectivas constituyen un modelo (en el plano afín aumentado) del plano proyectivo abstracto que se definió en § 14.1, podemos tomar cada uno de nuestros axiomas geométricos y demostrarlo de manera analítica (es decir, algebraica).

Para demostrar 14.11, no tenemos más que observar que la recta que une los puntos (y_1, y_2, y_3) y (z_1, z_2, z_3) es

14.22 $$\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

De la misma manera, en lo que se refiere a 14.12 (o, mejor dicho, 14.121), el punto de intersección de las rectas $\Sigma Y_\alpha x_\alpha = 0$ y $\Sigma Z_\alpha x_\alpha = 0$ es

$$\left(\begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \right)$$

En relación con 14.13, podemos usar los cuatro puntos

14.23 $$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (1, 1, 1).$$

Los puntos diagonales del cuadrángulo que se ha formado son

$$(0, 1, 1), \quad (1, 0, 1), \quad (1, 1, 0).$$

Si estos tres puntos están en una recta $\Sigma X_\alpha x_\alpha = 0$, habremos de tener

14.24 $$X_2 + X_3 = 0, \quad X_3 + X_1 = 0, \quad X_1 + X_2 = 0,$$

de donde $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, que es absurdo. Así se ha demostrado 14.14.

Por último, con el fin de demostrar 14.15, empleamos las coordenadas 14.23 para los cuatro puntos

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad C_1.$$

En las rectas C_1A_1, C_1A_2, C_1A_3, *que son*

$$x_2 = x_3, \quad x_3 = x_1, \quad x_1 = x_2,$$

tomamos puntos B_1, B_3, B_2 que serán

$$(p, 1, 1), \quad (1, q, 1), \quad (1, 1, r).$$

Las tres rectas A_3B_1, A_1B_3, A_2B_2, puesto que son

$$x_1 = px_2, \quad x_2 = qx_3, \quad x_3 = rx_1,$$

pasan todas por el mismo punto C_2 si

14.25 $$pqr = 1.$$

Las tres rectas A_3B_3, A_2B_1, A_1B_2, puesto que son

$$x_2 = qx_1, \quad x_1 = px_3, \quad x_3 = rx_2,$$

pasan todas por el mismo punto C_3 si

$$qpr = 1.$$

Tenemos que esta condición concuerda con 14.25, y en consecuencia, ha terminado la demostración. Sin embargo, es importante que señalemos que la deducción anterior puede llevarse a cabo en la situación más general, cuando las coordenadas no pertenecen a un *campo* sino a un *anillo de división* arbitrario [Birkhoff y MacLane 1, pág. 222]. Podemos seguir hablando de puntos y rectas, pero el axioma 14.15 tendrá que ser reemplazado por una afirmación más débil si el anillo coordenado incluye elementos p y q tales que

$$pq \neq qp.$$

Por ejemplo, podríamos tener que $p = k$ y $q = j$ en una "geometría de cuaternios" de coordenadas que como base tuvieran las "unidades" i, j, k, que cumplieran

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Cuando los puntos A y B se eligen de esa manera, 14.15 resulta falso. Hemos establecido así una relación importante entre la geometría y el álgebra: el descubrimiento de Hilbert, consistente en que si se usan coordenadas homogéneas en un plano que satisfaga los primeros cuatro axiomas, *el teorema de Papo es equivalente a la ley conmutativa de la multiplicación.*

EJERCICIOS

1. A partir de cinco puntos, de los que tres no son colineales, podemos asignar las coordenadas 14.23 a cualesquiera cuatro de ellos, y entonces tendremos que las coordenadas (x_1, x_2, x_3) del quinto quedan determinadas (al margen de la posibilidad de multiplicarlas todas por una constante). Si las razones mutuas de las tres coordenadas x son racionales, podemos multiplicar por un "denominador común", de manera que tengamos enteros. En este caso, el quinto punto se puede derivar de los primeros cuatro por medio de una construcción lineal, en la que interviene una sucesión finita de operaciones de unir dos puntos ya determinados o de tomar el punto de intersección de dos rectas ya determinadas. Elabórese esta construcción con respecto al punto (1, 2, 3).

2. Los cuatro puntos $(1, \pm 1, \pm 1)$ forman un cuadrángulo completo tal que su triángulo diagonal es el triángulo de referencia.

3. Una configuración 8_3, que consta de dos cuadrángulos mutuamente inscritos, existe en el plano proyectivo complejo, pero no existe en el plano proyectivo real. Cuando en efecto existe, sus ocho puntos se presentan en cuatro pares de coordenadas "opuestas" cuyas líneas de unión concurren. La figura completa es una configuración $(9_4, 12_3)$. *Indicación*: Sean los dos cuadrángulos $P_0P_2P_4P_6$ y $P_1P_3P_5P_7$, de manera que los tres conjuntos de puntos colineales consten de

$$P_0P_1P_3,\ P_1P_2P_4,\ P_2P_3P_5,\ P_3P_4P_6,\ P_4P_5P_7,\ P_5P_6P_0,\ P_6P_7P_1,\ P_7P_0P_2.$$

Tómese $P_0P_1P_2$ como el triángulo de referencia y tómense P_3, P_4, P_7 como $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, x)$. Dedúzcase que P_5 y P_6 son $(1, 1, x+1)$ y $(1, x+1, x)$. Obténgase una ecuación en x a partir de la colinealidad de $P_0P_5P_6$.

4. Si p es un número primo impar, se puede obtener un plano proyectivo finito $GP(2, p)$ al tomar las coordenadas como elementos del campo $CG(p)$ que consiste en los p residuos (o, más estrictamente, las clases residuales) de módulo p [Ball 1, págs. 60-61]. Por ejemplo, la "aritmética finita" adecuada para $GP(2, 3)$

consiste en los símbolos 0, 1, 2, que se comportan como enteros ordinarios, con la excepción de que

$$1 + 2 = 0 \quad \text{y} \quad 2 \times 2 = 1.$$

En la notación del ejercicio 3, al final de § 14.1, tómese $P_0P_1P_2$ como triángulo de referencia y P_5 como el punto unitario (1, 1, 1). Encuéntrense las coordenadas de los demás puntos y ecuaciones para las rectas.

Los planos finitos, y los espacios n finitos $GP(n, p)$ que les son análogos, fueron descubiertos por von Staudt* y redescubiertos por Fano. Von Staudt tomó n como 2 ó 3. Fano tomó p como número primo. La generalización $GP(n, p^k)$ se debe a Veblen y Bussey.

5. Al tomar las coordenadas como elementos de $CG(2)$, que consta de los dos "números" 0 y 1 que funcionan según la regla de adición

$$1 + 1 = 0,$$

obtenemos una "geometría" finita en la que los puntos diagonales de un cuadrángulo completo ¡siempre son colineales! Nuestra demostración de 14.14 se derrumba aquí debido a que ahora las ecuaciones 14.24 no solamente tienen la solución inadmisible $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, sino además tienen la solución significativa $X_1 = X_2 = X_3 = 1$, de la que se obtiene la recta

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Esta $GP(2, 2)$ se puede describir de manera abstracta al denominar sus siete puntos P_i y sus siete rectas p_i $(i = 0, 1, \ldots, 6)$ con la regla de que P_i y p_j serán incidentes si y sólo si

$$i + j \equiv 0, 1 \text{ o } 3 \pmod 7.$$

14.3 EL TEOREMA DE DESARGUES

La idea fundamental de una geometría pura provino del deseo de los pintores del renacimiento de producir una geometría "visual". ¿Cuál es el verdadero aspecto de las cosas y cómo se las puede representar en el plano de dibujo? Por ejemplo, tenemos que no habrá paralelas, puesto que para el ojo siempre parecen converger.

S. H. Gould (1909–)

[Gould 1, pág. 298]

Se dice que dos triángulos cuyos vértices se han designado en un orden determinado, están *en perspectiva desde un punto* (o, con más brevedad, "en perspectiva") si tres pares de vértice correspondientes quedan unidos por medio de rectas concurrentes. Por ejemplo, en la figura 14.1*b*, los triángulos $A_1A_2A_3$ y $B_1B_3B_2$ (*sic*) están en perspectiva desde C_1. Al permutar cíclicamente los vértices de $B_1B_3B_2$, hacia adelante o hacia atrás, veremos que los dos mismos triángulos están en perspectiva desde C_2 o C_3. Una

* K. G. C. von Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, vol. I (Nürnberg, 1856), págs. 87-88; Gino Fano, *Giornale di Matematiche*, 30 (1892), págs. 114-124; Veblen y Bussey, *Transactions of the American Mathematical Society*, 7 (1906), págs. 241-259.

de las maneras más pulcras de enunciar el axioma 14.15 [véase Veblen y Young 1, pág. 100] es

Si dos triángulos están en perspectiva de dos maneras, también lo están de tres.

Al formular el dual, tenemos que se dice que dos triángulos están *en perspectiva desde una recta* si sus tres pares de lados correspondientes se cortan en puntos colineales. G. Hessenberg* ha demostrado que los axiomas que venimos empleando bastan para demostrar el

TEOREMA DE DESARGUES. *Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, lo están también desde una recta, y, al revés, si están en perspectiva desde una recta, también lo están desde un punto.*

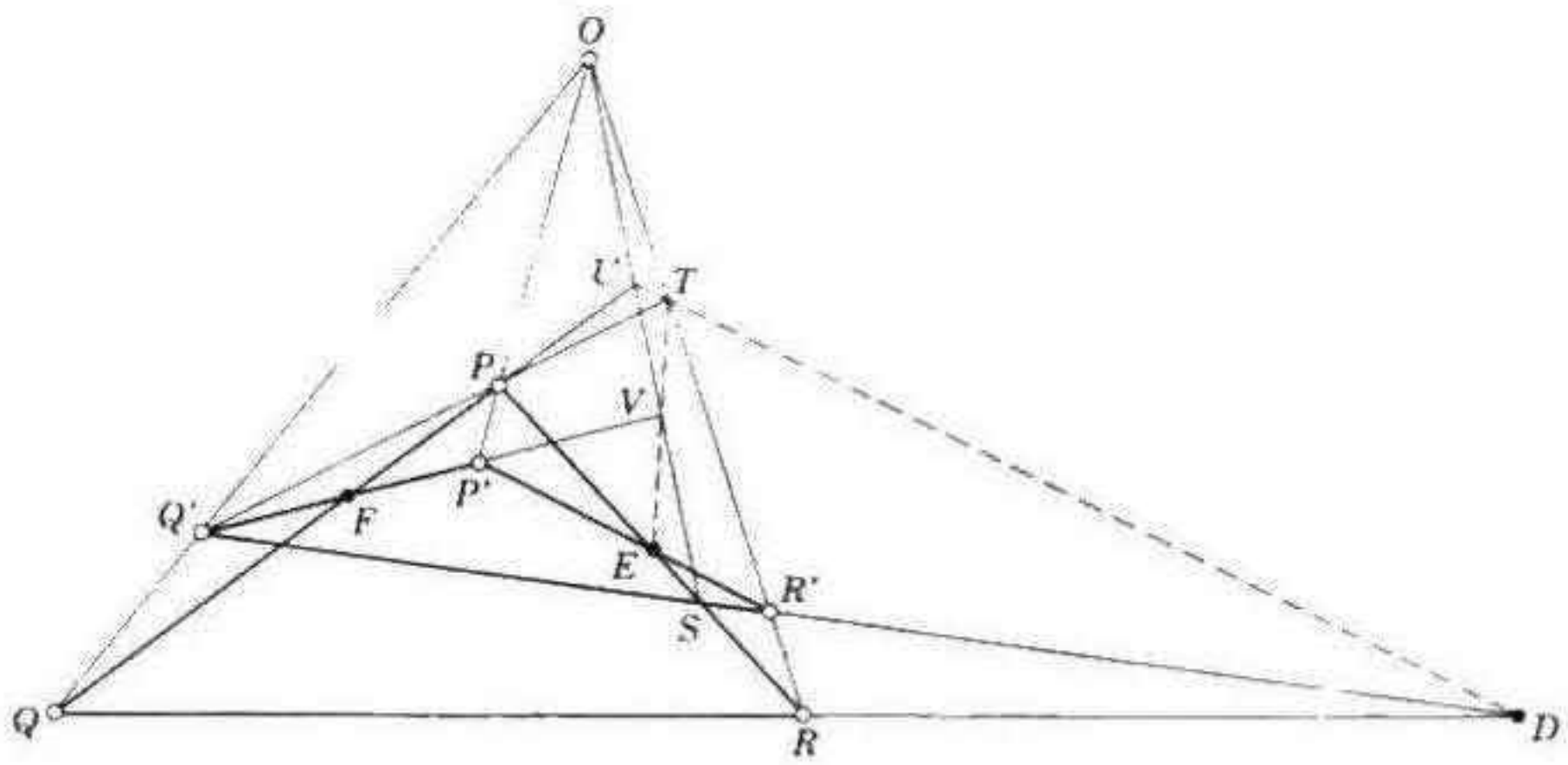


Figura 14.3a

Observaremos a continuación los detalles. Sean dos triángulos PQR y $P'Q'R'$ tales que estén en perspectiva desde O, como se tiene en la figura 14.3*a*, y sean sus lados correspondientes de manera que se corten en puntos

$$D = QR \cdot Q'R', \quad E = RP \cdot R'P', \quad F = PQ \cdot P'Q'.$$

Queremos demostrar que D, E, F han de ser colineales. Después de definir cuatro puntos más

$$S = PR \cdot Q'R', \qquad T = PQ' \cdot OR,$$
$$U = PQ \cdot OS, \qquad V = P'Q' \cdot OS,$$

tenemos, en términos generales,† suficientes ternas de puntos colineales para aplicar tres veces el axioma 14.15. La notación "matricial" nos permite escribir sencillamente

* *Mathematische Annalen*, 61 (1905), págs. 161–172.

† Pedoe 2, págs. 35–42. Véase también Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser, Basel, 1963, págs. 290–291.

$$\begin{Vmatrix} O & Q & Q' \\ P & S & R \\ D & T & U \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} O & P & P' \\ Q' & R' & S \\ E & V & T \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} P & Q' & T \\ V & U & S \\ D & E & F \end{Vmatrix}.$$

La última hilera de la última matriz exhibe la colinealidad que se busca.

El recíproco es consecuencia del principio de dualidad.

EJERCICIOS

1. El triángulo $(p, 1, 1)(1, q, 1)(1, 1, r)$ está en perspectiva con el triángulo de referencia desde el punto unitario $(1, 1, 1)$. Los pares de lados correspondientes se cortan en los tres puntos colineales.

$$(0, q-1, 1-r), \quad (1-p, 0, r-1), \quad (p-1, 1-q, 0).$$

2. En el teorema de Desargues intervienen 10 puntos y 10 rectas, que forman una configuración 10_3. Con el objeto de obtener una notación simétrica, considérense los triángulos $P_{14}P_{24}P_{34}$ y $P_{15}P_{25}P_{35}$, que están en perspectiva desde un punto P_{45}, y, en consecuencia, desde una recta $P_{23}P_{31}P_{12}$. Entonces los tres puntos P_{ij} serán colineales cuando sus subíndices contengan solamente tres de los números 1, 2, 3, 4, 5. Si los dos números restantes son k y l, podemos llamar a la recta p_{kl}. Entonces se pueden describir los dos mismos triángulos como $p_{15}p_{25}p_{35}$ y $p_{14}p_{24}p_{34}$, que están en perspectiva desde la recta p_{45}.

3. En el plano proyectivo finito $GP(2, 3)$, los dos triángulos $P_1P_2P_7$ y $P_3P_8P_4$ están en perspectiva desde el punto P_0 y desde la recta $P_9P_{12}P_{10}$. Identifíquense los puntos restantes en la figura 14.3*a*. (En esta geometría especial, tanto U como V coinciden con F, lo que no nos sorprende en vista de que en la figura 14.3*a* intervienen 14 puntos mientras la totalidad del plano no contiene sino 13.)

14.4 CONJUNTOS CUADRANGULARES Y ARMONICOS

El teorema de Desargues nos permite demostrar una propiedad importante de un *conjunto cuadrangular* de puntos, constituido por los cortes que en los seis lados de un cuadrángulo completo hace una recta cualquiera que no pasa por un vértice:

14.41 *Cada punto de un conjunto cuadrangular queda determinado de manera única por los puntos restantes.*

Demostración. Sea $PQRS$ un cuadrángulo completo cuyos lados PS, QS, RS, QR, RP, PQ se cortan en una recta g (que no pasa por ningún vértice) en los seis puntos A, B, C, D, E, F, donde algunos pares de éstos pueden coincidir. (Los tres primeros puntos provienen de los tres lados que contienen su vértice común S; los tres últimos de los lados respectivamente opuestos, que forman el triángulo PQR.) Para demostrar que F queda determinado de manera única por los otros cinco puntos, trazamos otro cuadrángulo $P'Q'R'S'$ tal que sus primeros cinco lados pasen por A, B, C, D, E, como se tiene en la figura 14.4*a*. Puesto que los dos triángulos PRS y $P'R'S'$ están en perspectiva desde la recta g, el recíproco del toerema de Desargues nos dice que están en perspectiva también desde un punto; así, tenemos que PP' pasa por el punto $O = RR' \cdot SS'$. Y, de la misma manera, los triángulos en perspectiva QRS y $Q'R'S'$ señalan que QQ' pasa por este mismo punto O, de manera que $PQRS$

y $P'Q'R'S'$ son "cuadrángulos en perspectiva". Por el teorema de Desargues, ahora en su enunciado directo, los triángulos PQR y $P'Q'R'$ que están en perspectiva desde el punto O, también lo están desde la recta DE, que no es sino g; es decir, los lados PQ y $P'Q'$ cortan a g en el mismo punto F.

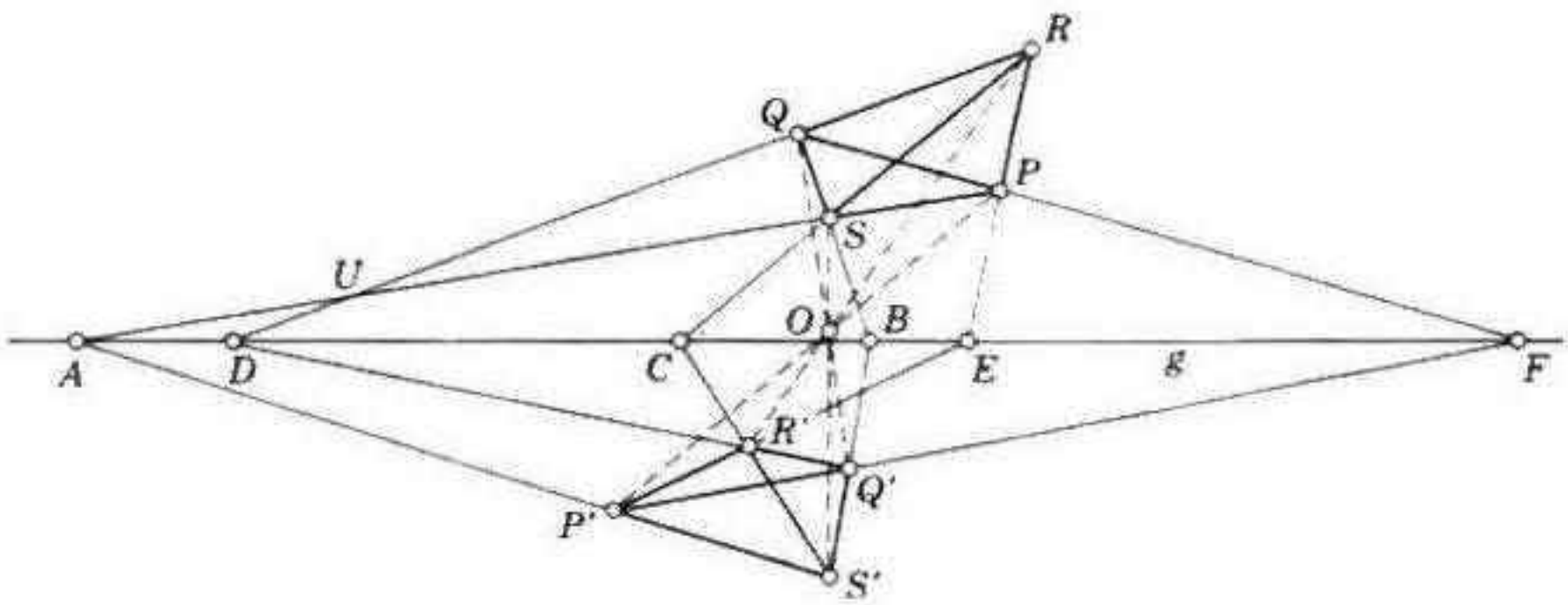


Figura 14.4a

Seguimos a Veblen y Young [1, pág. 49] y, por conveniencia usamos el símbolo

$$(AD)(BE)(CF)$$

para denotar la afirmación de que los seis puntos forman un conjunto cuadrangular del modo en que se ha descrito. El enunciado no se altera al aplicar una permutación cualquiera a ABC si se la aplicamos también a DEF. Y lo mismo es válido para cualquiera de los conjuntos

$$(AD)(EB)(FC),\ (DA)(BE)(FC),\ (DA)(EB)(CF)$$

Para obtener nuevas permutaciones necesitaremos un nuevo cuadrángulo.

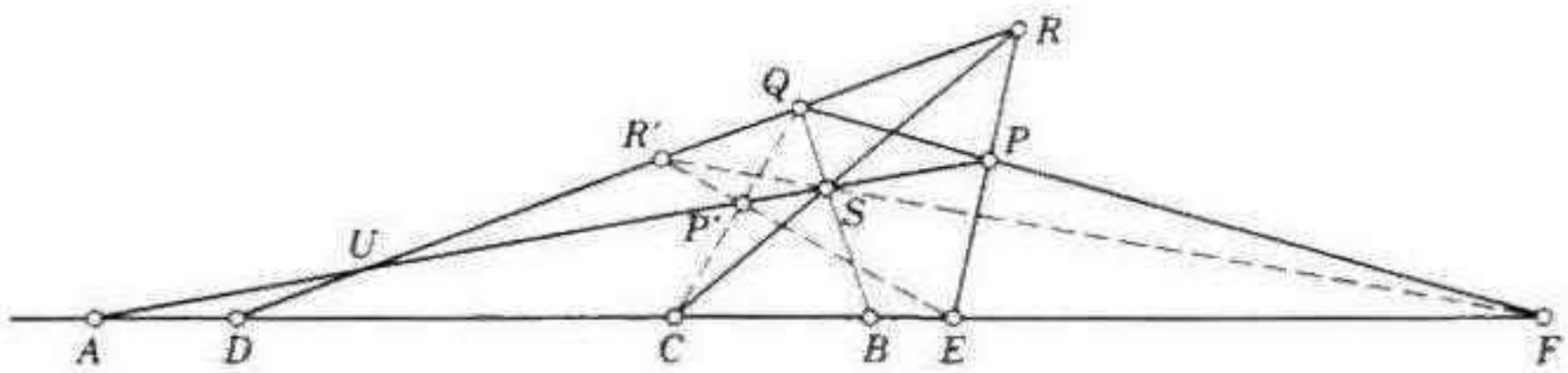


Figura 14.4b

Si se aplica cierta medida de ingenio, es posible retener dos de los cuatro vértices anteriores, por ejemplo, Q y S. Al definir

$$R' = QR \cdot SF, \quad P' = PS \cdot QC,$$

como se ha hecho en la figura 14.4*b*, aplicamos el axioma 14.15 al exágono *PRQCFS* de acuerdo con el esquema de

$$\left\| \begin{matrix} P & F & Q \\ C & R & S \\ R' & P' & E \end{matrix} \right\| .$$

y concluímos que $R'P'$ pasa por E. Pero así como del cuadrángulo $PQRS$ se obtiene $\mathsf{Q}(ABC, DEF)$, del cuadrángulo $P'QR'S$ se obtiene $\mathsf{Q}(ABF, DEC)$. Dicho de otra manera, la afirmación $\mathsf{Q}(ABC, DEF)$ implica $\mathsf{Q}(ABF, DEC)$, y, en consecuencia, también

14.42 $\mathsf{Q}(ABC, DEF)$ *implica* $\mathsf{Q}(DEF, ABC)$.

En el caso especial, que es importante, $\mathsf{Q}(ABC, ABF)$, que se puede abreviar así:

$$\mathsf{H}(AB, CF),$$

se dice que los cuatro puntos constituyen un *conjunto armónico* o, con más precisión, que F es el *conjugado armónico* de C con respecto a A y B. Esto significa que A y B son dos de los tres puntos diagonales de un cuadrángulo, mientras C y F se encuentran respectivamente en los otros lados, es decir, en los lados que pasan por el tercer punto diagonal. El axioma 14.14 nos dice que los conjugados armónicos C y F son diferentes (cuando no ocurre una degeneración, en cuyo caso coinciden con A y B).

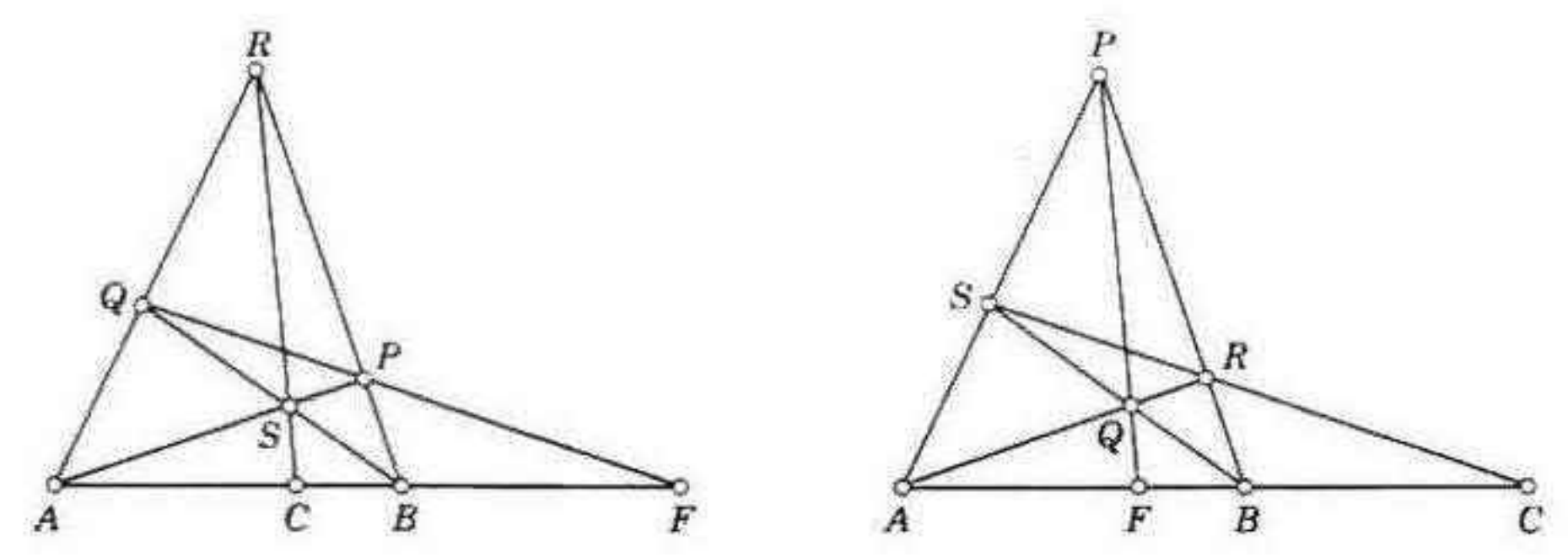


Figura 14.4c

EJERCICIOS

1. $\mathsf{H}(AB, CF)$ es equivalente a $\mathsf{H}(BA, CF)$ o a $\mathsf{H}(AB, FC)$, o a $\mathsf{H}(BA, FC)$.
2. Descríbase detalladamente la construcción del conjugado armónico de C con respecto a dos puntos dados A y B (de una recta que pasa por C, como se tiene en la figura 14.4*c*).
3. El conjugado armónico de $(0, 1, \lambda)$ con respecto a $(0, 0, 1)$ es $(0, 1, -\lambda)$.
4. En $GP(2, 3)$ (véase el ejercicio 3 al final de § 14.1), todo conjunto de cuatro puntos colineales es un conjunto armónico en todos sus órdenes: por ejemplo, $\mathsf{H}(P_0P_1, P_3P_9)$, $\mathsf{H}(P_0P_3, P_9P_1)$, $\mathsf{H}(P_0P_9, P_1P_3)$.

5. En la figura 6.6*a*, $\mathbf{H}(AA', A_1A_2)$. Dedúzcase la definición métrica

$$\frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{AA_2}{A'A_2}$$

con respecto a un conjunto armónico. (*Indicación*: Al definir E' como se hizo al final de § 6.6, se puede considerar el cuadrángulo que forman P, E, E' y el punto en el infinito de A_1P.)

14.5 PROYECTIVIDADES

Hilera es el conjunto de los puntos de una recta. El concepto dual, *haz*, se define como el conjunto de las rectas que pasan por un punto. Las hileras y los haces son casos de *formas unidimensionales*. Tendremos ocasión, a menudo, de considerar una correspondencia (uno a uno) entre dos formas unidimensionales. La correspondencia más sencilla que se puede tener entre una hilera y un haz surge cuando las rectas del haz unen los puntos de la hilera con otro punto, de manera que la hilera viene a ser una *sección* del haz. La correspondencia entre dos hileras, que son secciones de un haz por medio de dos rectas distintas se llama *perspectividad*, para la que escribiremos

$$X \underset{\wedge}{=} X' \quad \text{o} \quad X \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} X',$$

donde queremos decir que si X y X' son puntos correspondientes de ambas hileras, la recta XX' que los une pasa continuamente por el punto fijo O, al que llamamos *centro* de la perspectividad. Hay naturalmente también una clase dual de perspectividad, que relaciona haces en lugar de hileras.

El producto de un número cualquiera de perspectividades recibe el nombre de *proyectividad*. Cuando dos hileras (o haces) se relacionan por medio de una proyectividad, se dice que *se relacionan proyectivamente*, y escribimos

$$X \underset{\wedge}{\bar{=}} X'.$$

Por ejemplo, en las circunstancias que ejemplifica la figura 14.5*a*,

$$ABCD \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A_0B_0C_0D_0 \overset{O_1}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'D', \qquad ABCD \underset{\wedge}{\bar{=}} A'B'C'D'.$$

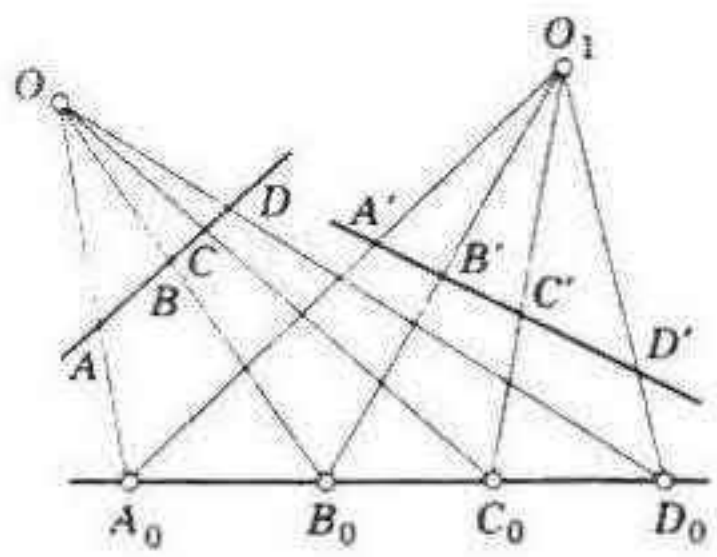


Figura 14.5a

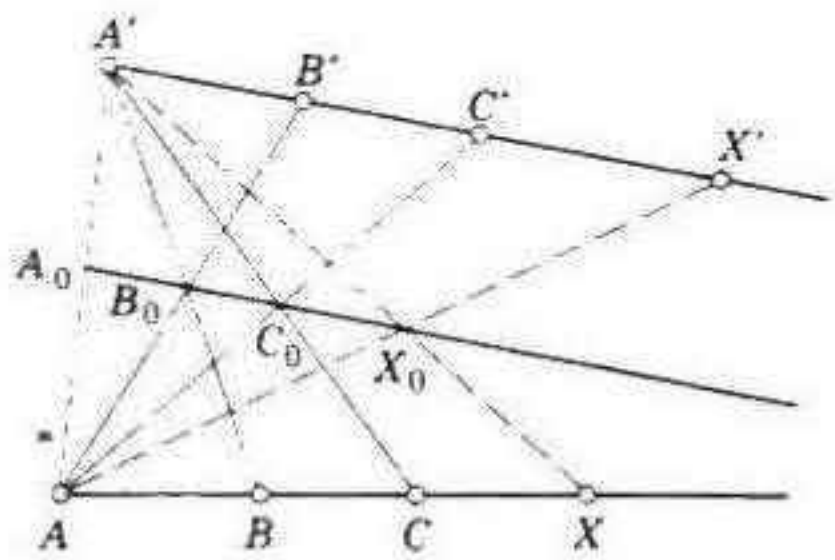


Figura 14.5b

Podemos definir análogamente la proyectividad que relaciona un recorrido con un haz, o viceversa.

Dados tres puntos distintos A, B, C en una recta y tres puntos distintos $A'B'C'$ en otra, podemos relacionarlos por medio de un par de perspectividades de la manera en que se hace en la figura 14.5*b*, donde el *eje* (o "recta de mediación") de la proyectividad une los puntos

$$B_0 = AB' \cdot BA', \quad C_0 = AC' \cdot CA',$$

de manera que
$$ABC \overset{A'}{\underset{\wedge}{=}} A_0B_0C_0 \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'.$$

Para cada punto X de AB obtenemos un punto correspondiente X' en $A'B'$ al unir A con el punto $X_0 = A'X \cdot B_0C_0$, de manera que

$$ABCX \overset{A'}{\underset{\wedge}{=}} A_0B_0C_0X_0 \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'X'.$$

Por el axioma 14.15, el eje B_0C_0, que es la "recta de Papo" del exágono $AB'CA'BC'$, contiene el punto $BC' \cdot CB'$. De la misma manera, contiene el punto de intersección de las "uniones transversales" de dos pares de puntos correspondientes. En particular, podríamos haber derivado el mismo punto X' a partir de un punto dado X mediante el empleo de perspectividades desde B' y B (u otro par cualquiera de puntos correspondientes) en lugar de A' y A.

Se puede demostrar [Baker **1**, págs. 62–64; Robinson **1**, págs. 24–36] que el producto de un número cualquiera de perspectividades se puede reducir al producto de dos de ellas que se ha descrito, si suponemos que las hileras inicial y final no están en la misma recta. En otras palabras,

14.51 *Una proyectividad cualquiera que relaciona las hileras de dos rectas distintas se puede expresar como producto de dos perspectividades cuyos centros están en puntos correspondientes (en el orden inverso) de las dos hileras relacionadas.*

Si queremos relacionar dos ternas de puntos diferentes ABC y $A'B'C'$ de la misma recta, podemos servirnos de una perspectividad arbitraria $ABC \underset{\wedge}{=} A_1B_1C_1$ para obtener una terna en otra recta, y relacionar entonces $A_1B_1C_1$ con $A'B'C'$ como lo señala 14.51. En consecuencia

14.52 *Es posible, por medio de una sucesión de no más de tres perspectividades, relacionar tres puntos cualesquiera, distintos y colineales con otros tres puntos cualesquiera, distintos y colineales.*

En una recta, la proyectividad $X \underset{\wedge}{-} X'$ puede tener uno o más puntos invariantes (tales que $X = X'$). Si tiene más de dos puntos invariantes, no es sino la identidad $X \underset{\wedge}{-} X'$. De hecho, la construcción que dimos anteriormente de una proyectividad

$$ABCX \underset{\wedge}{-} ABCX'$$

en una recta es tal que en ella intervienen cuatro puntos de otra recta tales que

$$ABCX \underset{\wedge}{=} A_1B_1C_1X_1 \underset{\wedge}{-} ABCX'.$$

Por 14.51, tenemos que en esencia hay una sola proyectividad $A_1B_1C_1 \overline{\wedge} ABC$. Y así hemos demostrado el

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA. *Una proyectividad se determina al determinar tres puntos de una hilera y los tres puntos correspondientes de otra.*

Si una proyectividad que relaciona las hileras de dos rectas distintas tiene un punto invariante A, este punto, que pertenece a ambas hileras, tiene que ser común a las dos rectas, como se ve en la figura 14.5*c*. Sean B y C dos puntos más de la primera hilera y B' y C' los puntos correspondientes de la segunda. El teorema fundamental nos dice que la perspectividad

$$ABC \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} AB'C',$$

donde $O = BB' \cdot CC'$, es igual a la proyectividad dada $ABC \overline{\wedge} AB'C'$. En consecuencia

14.53 *La proyectividad entre dos rectas distintas equivale a una perspectividad si y sólo si su punto de intersección es invariante.*

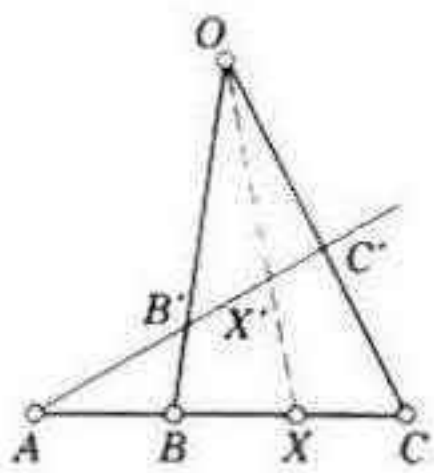


Figura 14.5c

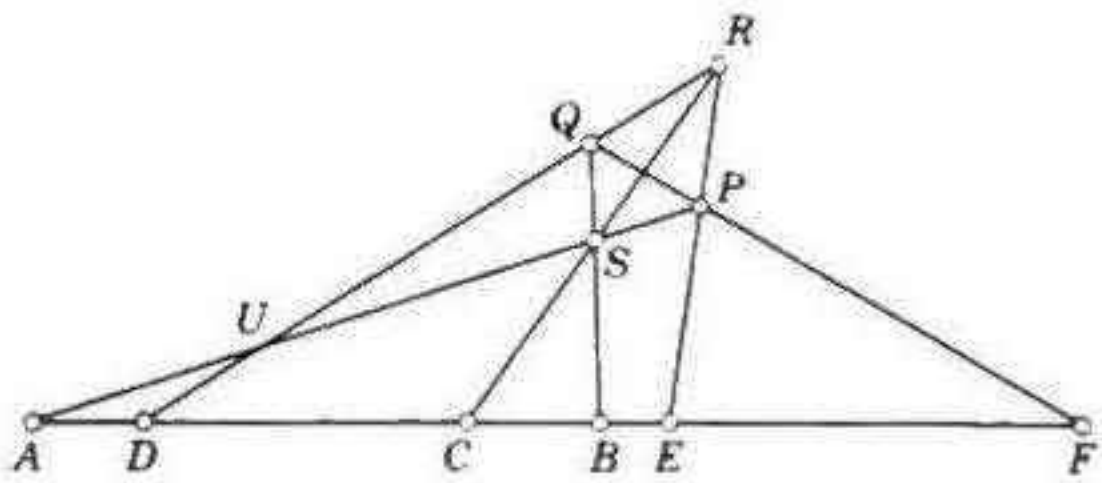


Figura 14.5d

Volvamos a la idea de proyectividad entre los recorridos de una recta (*ejemplo*, una transformación proyectiva de la recta en sí misma) para recordar que, cuando esta transformación no es simplemente la identidad, no puede tener más de dos puntos invariantes. Se dice que la transformación proyectiva es *elíptica*, *parabólica*, o *hiperbólica* según sea el número de puntos invariantes implicados 0, 1 ó 2. Al emplear coordenadas, los puntos invariantes surgen de las raíces de ecuaciones cuadráticas; así, tenemos que las proyectividades elípticas no ocurren en la geometría compleja, y que

$$ABC \overline{\wedge} BCA$$

es elíptica en la geometría real [Coxeter 2, pág. 48].

La figura 14.5*d* (cf. 14.4*a*) sugiere una construcción sencilla de una proyectividad hiperbólica $ABF \overline{\wedge} ACE$, en la que se da uno de los puntos invariantes:

$$ABF \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} ASP \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} ACE.$$

Aquí S y P pueden ser dos puntos cualquiera colineales con respecto a A, y los otros dos vértices del cuadrángulo son

$$Q = BS \cdot FP, \quad R = CS \cdot EP.$$

El segundo punto invariante es, de manera evidente, D, en QR. Al expresar la misma proyectividad en la forma $ADB \underset{\wedge}{\overline{\wedge}} ADC$ (es decir, al determinarse mediante la expresión los dos puntos invariantes), tenemos una construcción análoga a la anterior:

$$ADB \overset{Q}{\underset{\wedge}{\overline{\overline{\wedge}}}} AUS \overset{R}{\underset{\wedge}{\overline{\overline{\wedge}}}} ADC,$$

donde $U = AS \cdot QD$. Podemos llevarla a cabo incluso cuando A y D coinciden (es decir, cuando g pasa por el punto diagonal $U = PS \cdot QR$ del cuadrángulo), y en este caso tenemos la proyectividad parabólica

$$AAB \underset{\wedge}{\overline{\wedge}} AAC$$

[Coxeter 2, pág. 50].

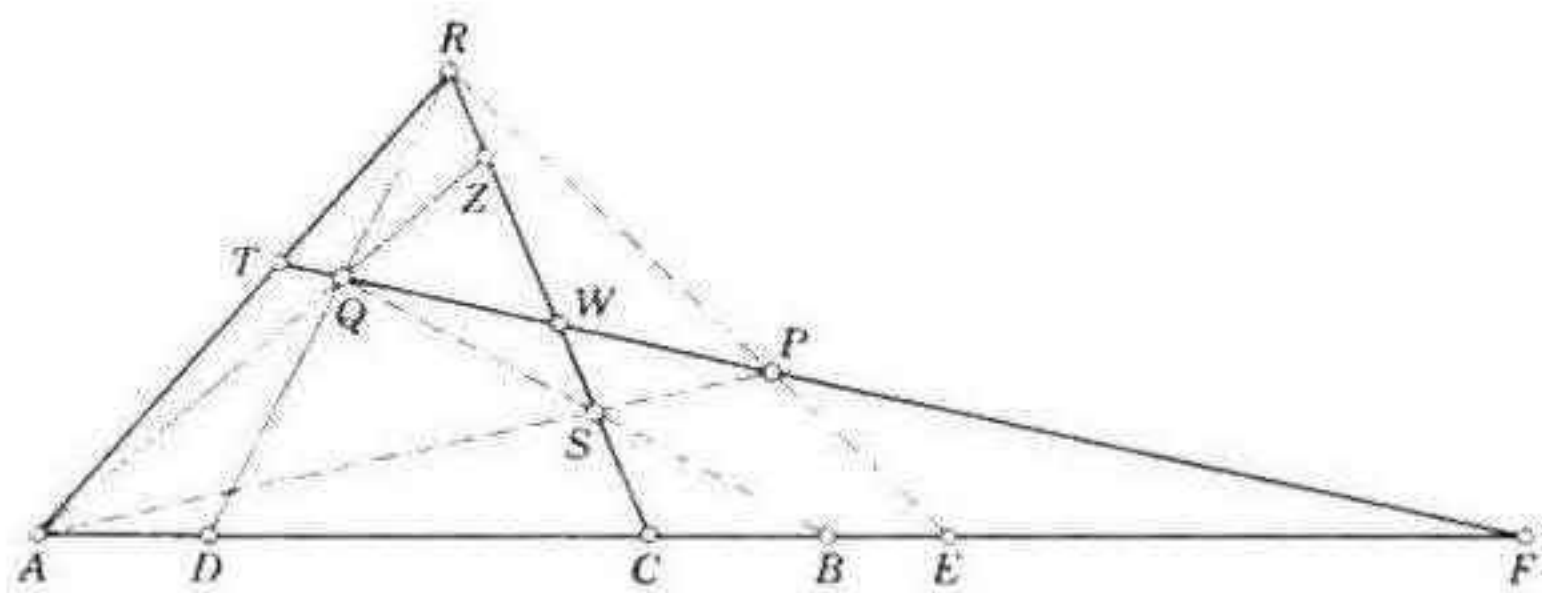


Figura 14.5e

Una *involución* es una proyectividad de período 2, es decir, una proyectividad que *intercambia* pares de puntos. La figura 14.5*e* se deriva de la figura 14.5*d* al añadirle los puntos adicionales T, W, Z. Podemos imaginar que esta figura se ha derivado de cuatro puntos colineales *cualquiera*, que se dan de antemano, A, C, D, F al tomar un punto R afuera de la recta, y observar las intersecciones que las rectas de unión RA, RD, RC hacen con una recta arbitraria que pase por F, de manera que sean T, Q, W respectivamente, y por último al tomar $Z = AQ \cdot RC$. Puesto que

$$ADCF \overset{Q}{\underset{\wedge}{\overline{\overline{\wedge}}}} ZRCW \overset{A}{\underset{\wedge}{\overline{\overline{\wedge}}}} QTFW \overset{R}{\underset{\wedge}{\overline{\overline{\wedge}}}} DAFC,$$

tenemos

14.54 $$ADCF \underset{\wedge}{\overline{\wedge}} DAFC.$$

Pero el teorema fundamental afirma que aquí no hay más que una proyectividad $ADC \underset{\wedge}{\overline{\wedge}} DAF$. Por lo tanto, si una proyectividad que in-

tercambia A y D transforma a C en F, intercambia C y F. En otras palabras,

14.55 *Una proyectividad cualquiera que intercambia dos puntos es una involución.*

Al aplicar el mismo conjunto de perspectividades a otro punto B, tenemos

$$B \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} S \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} P \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} E.$$

Puesto que $\mathsf{Q}(ABC, DEF)$, tenemos ya demostrado el teorema del conjunto cuadrangular:

14.56 *Los tres pares de lados opuestos de un cuadrángulo encuentran a una recta cualquiera (que no pase por un vértice) en los tres pares de una involución.*

Al combinar este enunciado con el de 14.55, surge una demostración alterna del de 14.42 [Veblen y Young **1**, pág. 101].

Puesto que la involución $ACD \underset{\wedge}{=} DFA$ se determina a partir de los pares AD y CF (u otros dos pares cualquiera que le pertenezcan), se denota de manera conveniente por

$$(AD)(CF)$$

o $(DA)(CF)$ o $(CF)(AD)$, etc. Así $(AD)(BE)(CF)$ implica que el par BE pertenece a $(AD)(CF)$, y CF a $(AD)(BE)$, y AD a $(BE)(CF)$. Los puntos de un par no han de ser necesariamente diferentes. Cuando $A = D$ y $B = E$, de manera que $\mathsf{H}(AB, CF)$, tenemos la involución hiperbólica $(AA)(BB)$ que intercambia pares de conjugados armónicos con respecto a A y B. Puesto que la misma involución se puede expresar como $(AA)(CF)$,

14.57 *Si una involución tiene un punto invariante, tiene otro, y constituye una correspondencia entre conjugados armónicos con respecto a estos dos puntos.*

Y en consecuencia, no hay involuciones parabólicas.

EJERCICIOS

1. Denotemos las rectas $OA, OB, \ldots, O_1A', O_1B', \ldots$ y A_0B_0 de la figura 14.5*a* por $a, b, \ldots, a', b', \ldots$ y o. Por medio del principio de dualidad, justifíquese la notación

$$abcd \overset{o}{\underset{\wedge}{=}} a'b'c'd'.$$

2. La propiedad armónica es invariante bajo una proyectividad: si $\mathsf{H}(AB, CF)$ y $ABCF \underset{\wedge}{=} A'B'C'F'$, entonces $\mathsf{H}(A'B', C'F')$ [Coxeter **2**, pág. 23].

3. $\mathsf{H}(AB, CF)$ implica $\mathsf{H}(CF, AB)$. (*Indicación*: Por 14.54, $ACBF \underset{\wedge}{=} CAFB$.)

4. Trácese un cuadrángulo y su sección, como se hizo en la figura 14.5*d*. Tómese arbitrariamente un punto X en g y constrúyase el punto correspondiente X' en la proyectividad hiperbólica

$$ABF \underset{\wedge}{=} ACE.$$

Hágase lo mismo con respecto a $ADB \underset{\wedge}{=} ADC$, y dibújese también la figura modificada adecuadamente, de la proyectividad parabólica $AAB \underset{\wedge}{=} AAC$.

5. No bastan dos perspectividades para construir una proyectividad elíptica.
6. En la notación de la figura 14.4*b*,

$$ADCF \underset{\wedge}{\overset{Q}{=}} AUP'P \underset{\wedge}{\overset{E}{=}} DUR'R \overset{S}{=} DAFC.$$

7. Se puede expresar cualquier proyectividad como producto de dos involuciones [Coxeter 2, pág. 54].
8. Las proyectividades de la recta $x_3 = 0$ son las transformaciones lineales

$$\mu x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2,$$

$$\mu x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2,$$

donde $c_{11}c_{22} \neq c_{12}c_{21}$. ¿Bajo qué circunstancias se tiene que esta proyectividad es (i) parabólica, (ii) una involución?

14.6 COLINEACIONES Y CORRELACIONES

Una *colineación* es una transformación (del plano) que transforma puntos colineales en puntos colineales. Por lo tanto, transforma rectas en rectas, hileras en hileras, haces en haces, cuadrángulos en cuadrángulos, y así sucesivamente. Una *colineación proyectiva* es una colineación que transforma proyectivamente toda forma unidimensional.

14.61 *Una colineación cualquiera que transforma un recorrido en otro que se relaciona con el primero de manera proyectiva es una colineación proyectiva.*

Demostración. [Bachmann 1, pág. 85]. Sea la colineación dada tal que transforma la hilera de puntos X en una recta determinada a en una hilera de puntos correspondientes X' de la recta a', que se relaciona proyectivamente con la primera, y transforma los puntos Y de otra recta b en puntos correspondientes Y' de b'. Cualquier perspectividad que relacione a X y Y se transformará en una perspectividad que relaciona a X' y Y'. En consecuencia,

$$Y \underset{\wedge}{\overset{=}{=}} X \underset{\wedge}{-} X' \underset{\wedge}{\overset{=}{=}} Y',$$

de manera que la colineación induce una proyectividad $Y \underset{\wedge}{-} Y'$ entre los puntos de b y b', que es lo que se quería tener.

Por lo tanto, una colineación proyectiva queda determinada en cuando se dan dos cuadrángulos (o cuadriláteros) correspondientes [Coxeter 2, pág. 60].

Una *colineación en perspectiva* con centro en O y eje o es una colineación que conserva invariantes todas las rectas que pasan por O y todos los puntos de o. (Por 14.61, toda colineación en perspectiva es una colineación proyectiva.) De acuerdo con Sophus Lie (1842–1899) decimos que una colineación en perspectiva es una *homología* cuando el eje y el centro no son incidentes, y una *elación* cuando el eje y el centro inciden. La homología *armónica* es un caso especial que se tiene cuando los puntos correspondientes A y A' de una recta a que pasa por O son conjugados armónicos con respecto a O y a $o \cdot a$. Toda colineación proyectiva de período 2 es una homología armónica [Coxeter 2, pág. 64].

Hemos visto que una colineación es una transformación de punto a punto

y de recta a recta que preserva la incidencia. De manera un tanto análoga, una correlación es una transformación de punto a recta y de recta a punto que dualiza la incidencia: transforma los puntos A en rectas a' y las rectas b en puntos B', de manera que a' pasa por B' si y sólo si A está en b. Y así, una correlación transforma puntos colineales en rectas concurrentes (y viceversa), hileras en haces, cuadrángulos en cuadriláteros, y así sucesivamente. Una *correlación proyectiva* es una correlación que transforma toda forma unidimensional de manera proyectiva. Y de modo parecido al de la demostración de 14.61, podemos establecer que

14.62 *Una correlación cualquiera que transforme una hilera en un haz que se relaciona proyectivamente con ella (o viceversa) constituye una correlación proyectiva.*

En consecuencia, una correlación proyectiva queda determinada en cuanto se dan un cuadrángulo y el cuadrilátero correspondiente [Coxeter 2, pág. 66].

Una *polaridad* es una correlación proyectiva de período 2. En general, una correlación transforma un punto A en una recta a' y esta recta la transforma a su vez en un nuevo punto A''. Cuando la correlación es de período 2, A'' siempre coincide con A y podemos simplificar la notación al omitir las primas ($'$). Tenemos así que una polaridad relaciona A con a, y viceversa. De acuerdo con J. D. Gergonne (1771–1859), diremos que a es *la polar* de A, y que A es *el polo* de a. Es evidente que las polares de todos los puntos de a forman un haz de rectas que se relacionan proyectivamente con ella y que pasan por A.

Puesto que una polaridad dualiza la incidencia, si A está en b, a pasará por B. En este caso, decimos que A y B son *puntos conjugados* y a y b *rectas conjugadas*. Puede suceder que a y A incidan, de modo que sean *autoconjugados*. Podemos afirmar que esto no sucede siempre, pues se demuestra con facilidad que la recta de unión de dos puntos autoconjugados no puede ser una recta autoconjugada. Un poco más difícil es la demostración de que ninguna recta contiene más de dos puntos autoconjugados [Coxeter 2, pág. 68]. El teorema siguiente nos servirá en § 14.7:

14.63 *Una polaridad induce una involución de puntos autoconjugados en cualquier recta que no sea autoconjugada.*

Demostración. La proyectividad $X = a \cdot x$, en una recta cualquiera que no sea autoconjugada (figura 14.6*a*) transforma todo punto que no sea autoconjugado, B, en otro punto $C = a \cdot b$, cuya polar es AB. La misma proyectividad transforma C en B. Puesto que intercambia B y C, tiene que ser una involución.

Y con respecto al punto de vista dual, tenemos que x y AX se intercambian en la involución de rectas conjugadas que pasan por A.

Este triángulo ABC en el que cada vértice es el polo del lado opuesto (de manera que dos vértices son puntos conjugados y dos lados son rectas conjugadas, todos ellos tomados arbitrariamente) recibe la denominación de *autopolar*. Si P es un punto cualquiera que no esté en uno de los lados, su polar p no pasará por un vértice, y se puede describir la polaridad como la única correlación proyectiva que transforma el cuadrángulo $ABCP$ en el

cuadrilátero $abcp$. Un símbolo adecuado, análogo al de $(AB)(PQ)$ que se usa para las involuciones, es

$$(ABC)(Pp).$$

Por lo tanto, un triángulo cualquiera ABC, un punto cualquiera P que no esté en uno de sus lados y una recta p que no pase por un vértice, determinan una polaridad definida $(ABC)(Pp)$, en la que la polar x de un punto arbitrario X se puede obtener a partir de simples incidencias. Como primer paso para realizar esta construcción, necesitamos el siguiente lema:*

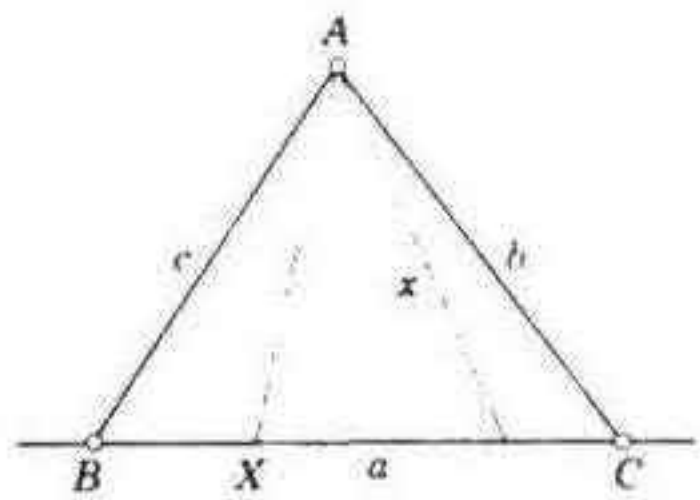


Figura 14.6a

14.64 *Si las polares de los vértices de un triángulo son distintas de los lados opuestos respectivamente, cortan a estos lados en tres puntos colineales.*

Demostración. Sea APX un triángulo en el que los lados PX, XA, AP cortan a las polares a, p, x de sus vértices en los puntos A_1, P_1, X_1, como se tiene en la figura 14.6*b*. La polar de $X_1 = x \cdot AP$ es, por supuesto, $x_1 = X(a \cdot p)$. Definamos también los puntos adicionales $P' = a \cdot AP$, $X' = a \cdot AX$ y sus polares $p' = A(a \cdot p)$ y $x' = A(a \cdot x)$. Por 14.54 y la polaridad, tenemos

$$AP'PX_1 \underset{\wedge}{=} P'AX_1P \underset{\wedge}{=} p'ax_1p \underset{\wedge}{=} AX'XP_1.$$

Por 14.53, $AP'PX_1 \underset{\wedge}{=} AX'XP_1$. Puesto que el centro de esta perspectividad es $P'X' \cdot PX = A_1$, los tres puntos A_1, P_1, X_1 son colineales, como se enunció.

Estamos preparados para intentar la construcción (figura 14.6*c*):

14.65 *En la polaridad $(ABC)(Pp)$, la polar de un punto X (que no esté en AP, BP, ni p) es la recta X_1X_2, que se determina por medio de*

* Se conoce como el teorema de Chasles. La demostración que se da en *The Real Projective Plane* [Coxeter 2, pág. 71] es suficiente con respecto a la geometría real, pero no lo es en relación con la geometría más general que se desarrolla aquí. El lema 5.54 del libro citado resulta falso en la geometría finita $GP(2, 3)$, que admite un cuadrilátero cuyos tres pares de vértices opuestos P_1P_2, P_3P_6, P_5P_9 son pares de puntos conjugados en la polaridad $P_i \to p_i$, aun los cuatro lados $P_1P_3P_9$, $P_2P_6P_9$, $P_2P_3P_5$, $P_1P_5P_6$ contienen sus polos respectivos P_0, P_7, P_8, P_{11}. (Los otros tres de los trece puntos de este plano finito son los puntos diagonales del cuadrángulo $P_0P_7P_8P_{11}$; las rectas que los unen por pares son las diagonales del cuadrilátero $p_0p_7p_8p_{11}$.) Véase también W. G. Brown, *Canadian Mathematical Bulletin*, 3 (1960), págs. 221-223.

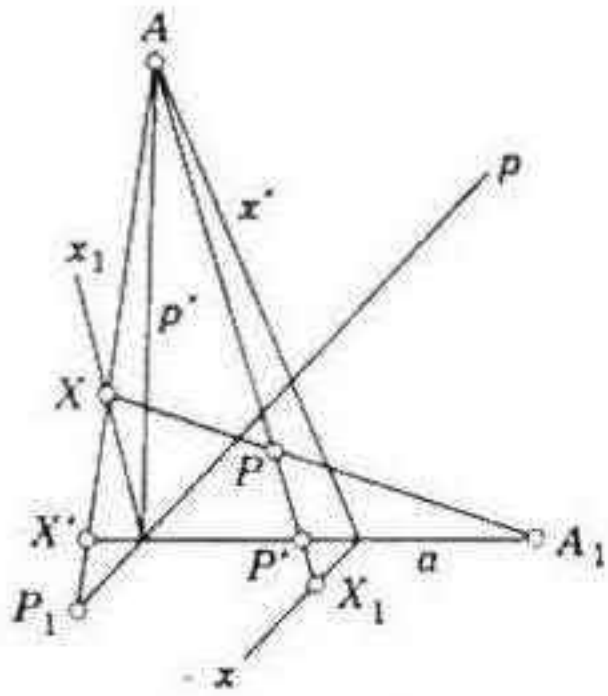


Figura 14.6b

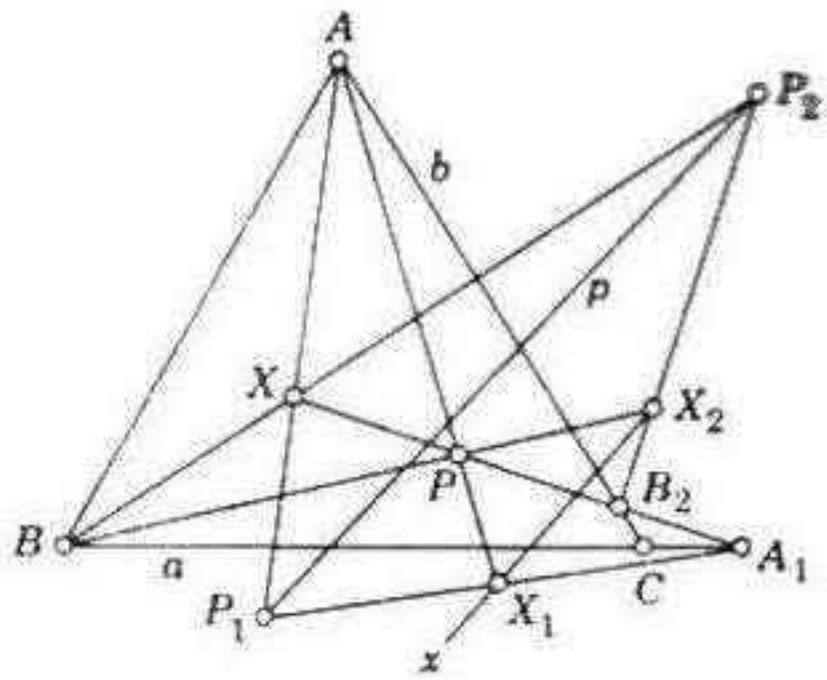


Figura 14.6c

$$A_1 = a \cdot PX, \quad P_1 = p \cdot AX, \quad X_1 = AP \cdot A_1P_1.$$
$$B_2 = b \cdot PX, \quad P_2 = p \cdot BX, \quad X_2 = BP \cdot B_2P_2.$$

Demostración. Por 14.64, las polares a, p, x cortan las rectas PX, AX, AP en tres puntos colineales, de los que los dos primeros son A y P. En consecuencia, x pasa por $X_1 = AP \cdot A_1P_1$. De la misma manera, x pasa por $X_2 = BP \cdot B_2P_2$.

En términos de coordenadas, una colineación proyectiva es una transformación lineal homogénea

14.66 $$\mu x'_\alpha = \Sigma c_{\alpha\beta} x_\beta, \qquad \det(c_{\alpha\beta}) \neq 0,$$

donde se entiende que la suma se toma sobre el índice repetido β (para cada valor de α). Al no anularse el determinante, resulta posible resolver las ecuaciones de x_β en términos de x'_α, de manera que se obtenga la colineación inversa. Al ajustar de manera conveniente los coeficientes $c_{\alpha\beta}$, podemos transformar el cuadrángulo particular de 14.23 en cualquier cuadrángulo dado [Coxeter 2, pág. 197].

Puesto que el producto de dos correlaciones (por ejemplo, una polaridad y otra correlación) es una colineación, cualquier correlación proyectiva dada se puede expresar como producto de una polaridad arbitraria y una colineación proyectiva adecuada. La polaridad más conveniente con respecto a estos propósitos la constituye la correlación en la que la recta

$$\Sigma X_\alpha x_\alpha = 0$$

es la polar del punto (X_1, X_2, X_3). Al combinarla con la colineación general de 14.66, obtendremos la correlación que transforma cada punto (y) en la recta

14.661 $$\Sigma(\Sigma c_{\alpha\beta} y_\beta) x_\alpha = 0,$$

donde nuevamente debemos tener $\det(c_{\alpha\beta}) \neq 0$. De hecho, la correlación se asocia con la ecuación *bilineal*

$$\Sigma\Sigma c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0$$

[cf. Coxeter 2, pág. 200].

La correlación será una polaridad cuando sea igual a su *inversa*, de la que tenemos la ecuación, al intercambiar (x) y (y):

$$\Sigma\Sigma c_{\alpha\beta} y_\alpha x_\beta = 0, \quad \text{o} \quad \Sigma\Sigma c_{\beta\alpha} x_\alpha y_\beta = 0.$$

Así, tenemos que ocurre una polaridad cuando $c_{\beta\alpha} = \lambda c_{\alpha\beta}$, donde λ es igual con respecto a todas las α y β, de manera que $c_{\alpha\beta} = \lambda c_{\beta\alpha} = \lambda^2 c_{\alpha\beta}$, $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$. Pero no podremos tener $\lambda = -1$, puesto que el determinante quedaría como

$$\begin{vmatrix} 0 & c_{12} & -c_{31} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & -c_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En consecuencia, $\lambda = 1$, y $c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta}$. En otras palabras,

14.67 *Una correlación proyectiva es una polaridad si y sólo si tiene una matriz simétrica de coeficientes.*

Y la polaridad general queda dada por

14.68 $$\Sigma\Sigma c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0. \qquad c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta}, \quad \det(c_{\alpha\beta}) \neq 0,$$

lo que significa que la polar de (y_1, y_2, y_3) es 14.661, o que 14.68 es la condición para que los puntos (x) y (y) sean conjugados. Al igualar y_β y x_β, deducimos la condición

$$\Sigma\Sigma c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0,$$

o

$$c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{23}x_2x_3 + 2c_{31}x_3x_1 + 2c_{12}x_1x_2 = 0,$$

para que el punto x sea autoconjugado. En consecuencia,

14.69 *Cuando un polaridad admite puntos autoconjugados, su lugar geométrico se determina por medio de una ecuación de segundo grado.*

EJERCICIOS

1. Dados el centro y el eje de una colineación en perspectiva y un par de puntos correspondientes (colineales con respecto al centro), constrúyase el punto transformado X' a partir de un punto cualquiera X [Coxeter 2, pág. 62].

2. Dos triángulos en perspectiva cualquiera se relacionan por medio de una colineación en perspectiva.

3. Una colineación que conserve invariantes solamente los puntos de un recta, constituye una elación.

4. Una homología elativa de eje o se puede expresar como producto de dos homologías armónicas con el mismo eje o [Coxeter 2, pág. 63].

5. En $GP(2, 3)$ la transformación $P_i \to P_{i+1}$ (con subíndices de módulo 13 reducido) es evidentemente una colineación de período 13. ¿Constituye una colineación proyectiva? Considérese asimismo la transformación $P_i \to P_{3i}$.

6. ¿Qué clase de colineación es

(i) $x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = cx_3$;

(ii) $x'_1 = x_1 + c_1x_3, \quad x'_2 = x_2 + c_2x_3, \quad x'_3 = x_3$?

7. Por medio de 14.64, demuéstrese el *teorema de Hesse*: si dos pares de vértices opuestos de un cuadrilátero completo constituyen pares de puntos conjugados (en una

polaridad dada), entonces el tercer par de vértices opuestos es, de la misma manera, un par de puntos conjugados.

8. Demuéstrese desde el punto de vista analítico el teorema de Hesse. (*Indicación:* Aplíquese la condición 14.68 a los pares de vértices

$$(0, 1, \pm 1), \quad (\pm 1, 0, 1), \quad (1, \pm 1, 0)$$

del cuadrilátero $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$.)

9. La ecuación bilineal

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

es la condición para que (x) y (y) sean conjugados en la polaridad $(ABC)(Pp)$, donde ABC es el triángulo de referencia, P es $(1, 1, 1)$ y p es $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. ¿Hay puntos autoconjugados? Considérese el caso, en particular, en el que las coordenadas son residuos de módulo 3.

14.7 LA CONICA

Las tres conocidas curvas que llamamos "secciones cónicas" tienen una larga historia. Su descubrimiento se atribuye a Menaecmo, que vivió hacia 350 a. J. C. Fueron centro de la atención de los mejores geómetras griegos hasta Papo de Alejandría. . . . Un nuevo interés por el tema surgió en el siglo diecisiete, de manera muy vivida. . . . Parece justificado afirmar que siempre tendrán un lugar en los temarios matemáticos.

J. L. Coolidge (1873–1954)

[Coolidge 1, prefacio]

En el plano proyectivo no hay sino una clase de cónica. La distinción que nos es tan familiar entre la hipérbola, la parábola y la elipse pertenece a la geometría afín. Para hablar con precisión, depende de que la recta en el infinito sea una secante, una tangente o no corte a la curva [Coxeter 2, pág. 129].

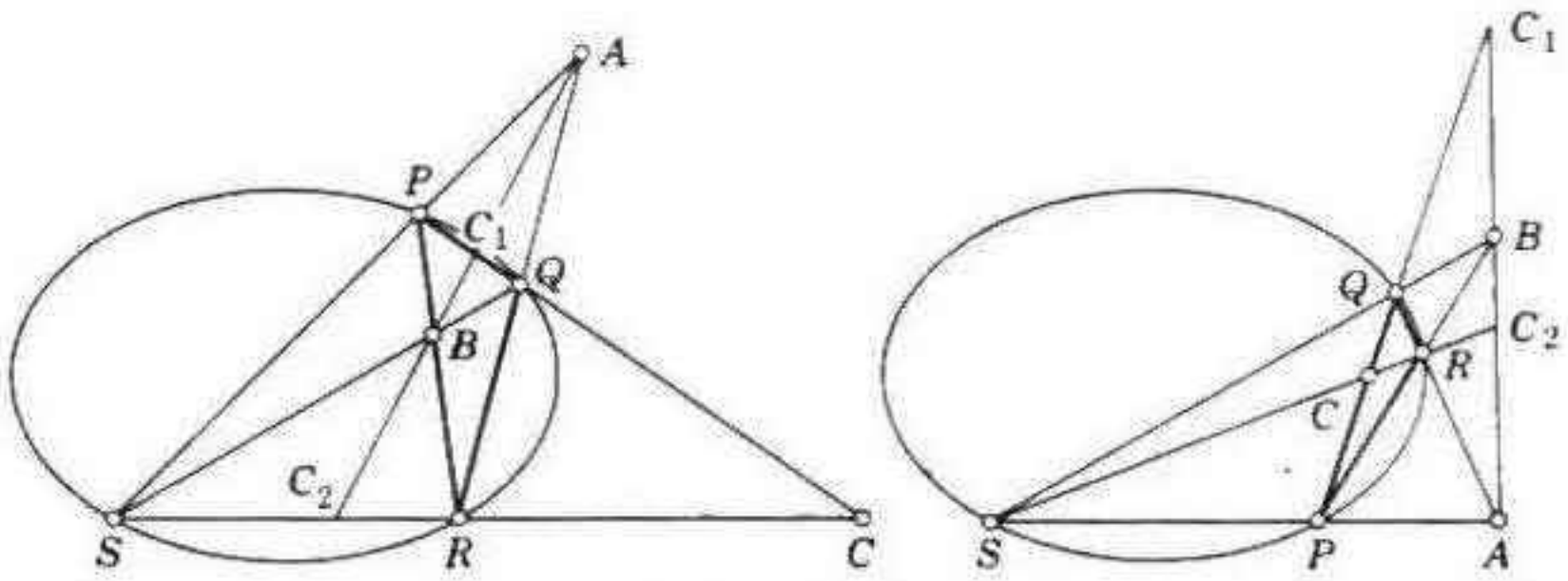


Figura 14.7a

Se dice que una polaridad es *hiperbólica* o *elíptica* según tenga o no tenga un punto autoconjugado. (En el primer caso, también admitirá una recta autoconjugada: la polar del punto.) El punto autoconjugado P, cuya sola

existencia hace de una polaridad una polaridad hiperbólica, no es en absoluto el único punto autoconjugado: hay otro en cada recta que pasa por P, con la excepción de su polar p. Con el objeto de demostrar esta afirmación, emplearemos 14.63, por medio del que sabemos que toda recta de ésas contiene una involución de puntos conjugados. Por 14.57, esta involución, que tiene un punto invariante P, tiene también un segundo punto invariante Q, que es, por supuesto, otro punto autoconjugado de la polaridad. Así, la presencia de un punto autoconjugado implica la presencia de muchos (tantos como haya rectas que pasen por un punto; por ejemplo, una infinidad en la geometría real o en la compleja). Su lugar geométrico es una *cónica* y sus polares son sus *tangentes*. Esta definición sencilla, que se debe a von Staudt, nos muestra la cónica como figura autodual: el lugar geométrico de los puntos autoconjugados y también la envolvente de las rectas autoconjugadas.

El lector no debe olvidar que solamente hay dos clases de polaridad y que solamente hay una clase de cónica. La terminología tal vez no sea muy adecuada: una polaridad hiperbólica tiene muchos puntos autoconjugados, que forman una cónica; la polaridad elíptica carece por completo de puntos autoconjugados; sin embargo, proporciona a cada punto una polar y un polo a cada recta. No existe la "polaridad parabólica".

La tangente hace honor a su nombre al tocar solamente una vez la cónica en su polo, el *punto de contacto*. Cualquier otra recta se llama *secante* o *no secante* según corte la cónica dos veces o ninguna, es decir, según sea hiperbólica o elíptica la involución de puntos conjugados en ella. Dos puntos conjugados cualquiera en una secante PQ, que quedan aparejados por la involución $(PP)(QQ)$, constituyen conjugados armónicos con respecto a P y Q.

Sea PQR un triángulo inscrito en una cónica, como se tiene en la figura 14.7*a*. Una recta cualquiera c que sea conjugada de PQ ha de ser la polar de algún punto C de PQ. Sea RC tal que corte nuevamente a la cónica en S. Entonces tendremos que C es uno de los tres puntos diagonales del cuadrángulo inscrito $PQRS$. Los otros dos son

$$A = PS \cdot QR, \quad B = QS \cdot RP.$$

La recta que los une corta los lados PQ y RS en los puntos C_1 y C_2 tales que $\mathsf{H}(PQ, CC_1)$ y $\mathsf{H}(RS, CC_2)$. Puesto que C_1 y C_2 son conjugados de C, la recta AB, que los contiene, es c, la polar de C. De la misma manera, BC es la polar de A. Por lo tanto, A y B son puntos conjugados. Y estos puntos conjugados son las intersecciones de c con los lados QR y RP del triángulo dado. En consecuencia,

TEOREMA DE SEYDEWITZ. *Si un triángulo se inscribe en una cónica, cualquier recta conjugada con respecto a uno de sus lados corta a los otros dos en puntos conjugados.*

De aquí no nos resultará difícil deducir el

TEOREMA DE STEINER. *Sean las rectas x y y tales que unan un punto variable de una cónica a dos puntos fijos de la misma cónica: entonces se cumple que $x \barwedge y$.*

Demostración. Las tangentes p y q, en los puntos fijos P y Q, se cortan en D, el polo de PQ. Sea c una recta fija que pase por D (pero no por P ni

Q), y que corte a x y y en B y A, como se tiene en la figura 14.7b. Por el teorema de Seydewitz, BA es un par de la involución de puntos conjugados de c. Por lo tanto, al variar el punto $x \cdot y$ en la cónica,

$$x \overline{\wedge} B \overline{\wedge} A \overline{\wedge} y.$$

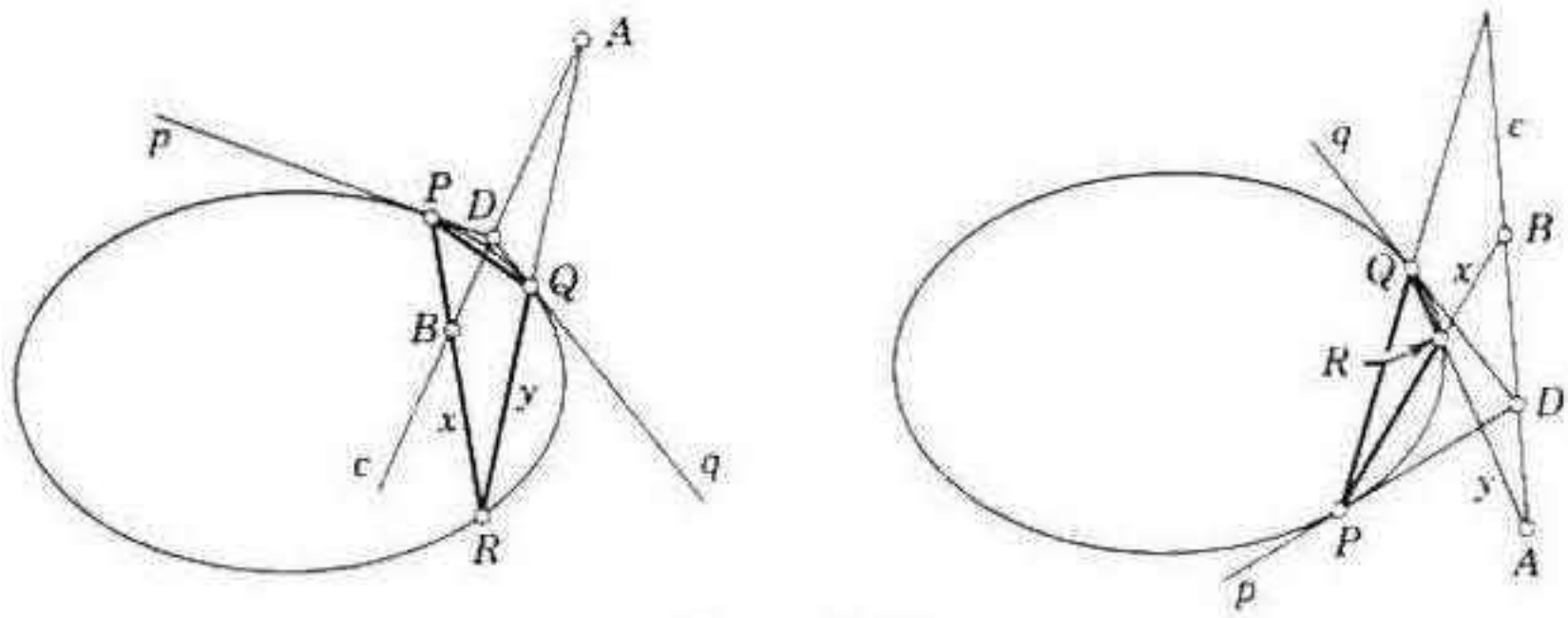


Figura 14.7b

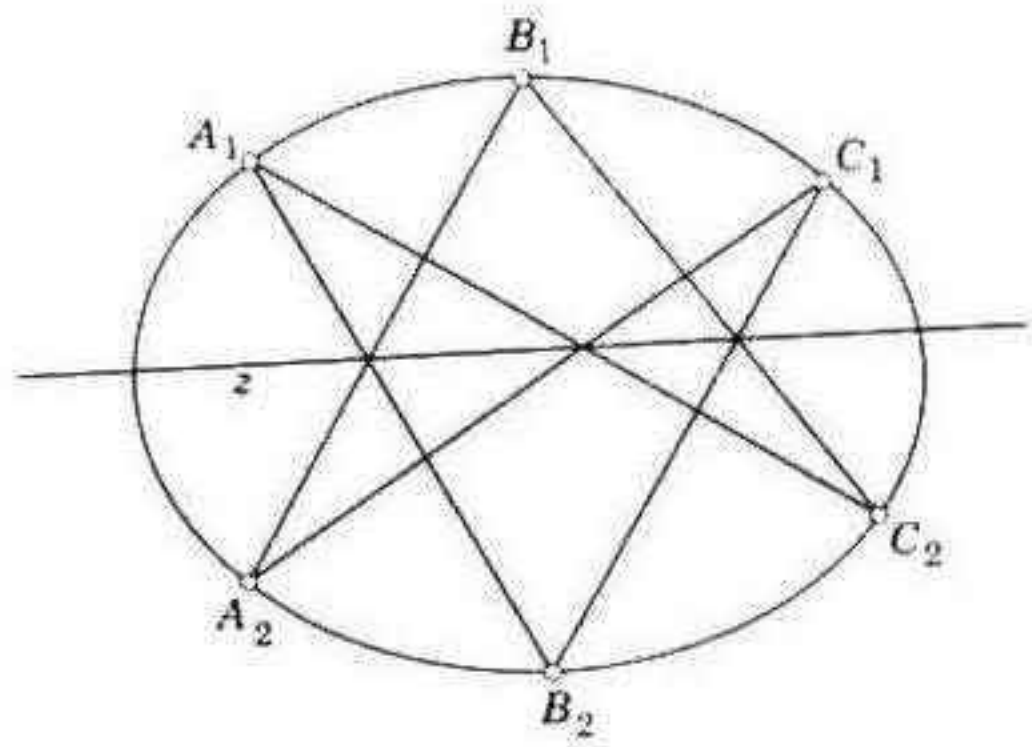


Figura 14.7c

La construcción que veremos en seguida de una cónica que pase por cinco puntos dados, de los que tres no son colineales, se debe a Braikenridge y a Maclaurin, que la descubrieron independientemente, hacia 1733 [Coxeter 2, pág. 91]. Sean A_1, B_2, C_1, A_2, B_1 los cinco puntos, como se tiene en la figura 14.7c; entonces, la cónica consiste en el lugar geométrico de los puntos

$$C_2 = A_1(z \cdot C_1A_2) \cdot B_1(z \cdot C_1B_2),$$

donde z es una recta variable que pasa por el punto $A_1B_2 \cdot B_1A_2$. Tenemos aquí el recíproco del

TEOREMA DE PASCAL. *Si se inscribe en una cónica un exágono $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos, a saber*

$$B_1C_2 \cdot B_2C_1, \quad C_1A_2 \cdot C_2A_1, \quad A_1B_2 \cdot A_2B_1,$$

son colineales.

Pascal descubrió su famoso teorema [Coxeter 2, pág. 103] cuando

tenía solamente dieciséis años. Más de 150 años después, fue dualizado (véase la figura 14.7*d*):

TEOREMA DE BRIANCHON. *Si se circunscribe un exágono alrededor de una cónica, sus tres diagonales concurren.*

Vimos en § 8.4 que las cónicas del espacio euclidiano tienen ecuaciones de segundo grado en coordenadas cartesianas. Las mismas ecuaciones en coordenadas afines conservan su validez en la geometría afín, y se obtienen con ellas ecuaciones homogéneas de segundo grado en coordenadas baricéntricas (§ 13.7) y en coordenadas proyectivas (§ 14.2). Así, por medio de 14.69 se puede conciliar la definición de von Staudt de la cónica con las definiciones clásicas. En particular,

$$x_1x_3 = x_2^2$$

es una cónica que toca las rectas $x_3 = 0$ y $x_1 = 1$ en los puntos respectivos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Se puede parametrizar esta cónica en la forma

$$x_1 : x_2 : x_3 = t^2 : t : 1.$$

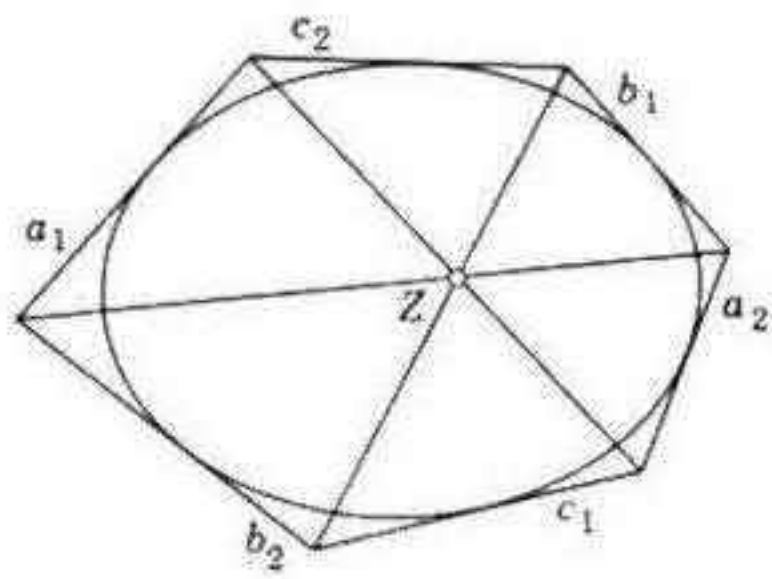


Figura 14.7d

que la caracteriza como el lugar geométrico del punto de intersección de miembros correspondientes de los haces de rectas proyectivamente relacionados

$$x_1 = tx_2 \quad \text{y} \quad x_2 = tx_3.$$

Si $\det(c_{\alpha\beta}) = 0$, la forma cuadrática $\Sigma\Sigma c_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ se puede expresar como producto de las dos formas lineales $\Sigma a_\alpha x_\alpha$ y $\Sigma b_\beta x_\beta$. De acuerdo con esto, se puede considerar a veces un par de rectas como el caso de degeneración de una cónica. Y en este sentido, el teorema de Pascal se puede considerar como una generalización del axioma 14.15.

EJERCICIOS

1. Si se inscribe un cuadrángulo en una cónica, sus puntos diagonales forman un triángulo autopolar. Las tangentes a los vértices del cuadrángulo forman un cuadrilátero circunscrito cuyas diagonales son los lados del mismo triángulo [Coxeter 2, págs. 85, 86].

2. Con respecto a la proyectividad $x \overset{\wedge}{\overline{\wedge}} y$ del teorema de Steiner, investíguense las posiciones especiales de x y y cuando A o B coinciden con D.

3. Si el efecto de una proyectividad entre los haces de rectas x y y que pasan por P y Q es $xpd \overset{\wedge}{=} ydq$, donde d es PQ, el lugar geométrico del punto $x \cdot y$ es una cónica que pasa por P y Q tal que sus tangentes en estos puntos son p y q. (Se suele emplear esta construcción para *definir* una cónica; véase, por ejemplo, Robinson [1, pág. 38].)

4. De las cónicas que tocan dos rectas dadas en un punto dado, las que cortan a una tercera recta (que no pasa por ninguno de los dos puntos) lo hacen en pares de una involución [Coxeter 2, pág. 90].

5. Si, dada una polaridad, se tiene que dos triángulos son autoconjugados con respecto a ella, sus seis vértices están en una cónica o en dos rectas [Coxeter 2, pág. 93].

6. Si dos triángulos tienen seis vértices distintos y todos están en una cónica, son autopolares con respecto a determinada polaridad [Coxeter 2, pág. 94].

7. En $GP(2, 3)$ (ejercicio 3 al final de § 14.1), la polaridad $P_i \to p_i$ o $(P_4P_{10}P_{12})(P_0p_0)$ determina una cónica que consiste en los cuatro puntos P_0, P_7, P_8, P_{11} y las cuatro rectas p_0, p_7, p_8, p_{11}. (*Indicación*: $P_0P_2P_8P_{12} \overset{\wedge}{=} P_1P_7P_5P_4 \overset{\wedge}{=} p_0p_2p_8p_{12}$.)

8. La ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ representa una cónica con respecto a la que el triángulo de referencia es autopolar. Verifíquese el teorema de Pascal aplicado al exágono inscrito

$$(0, 1, 1)\,(0, -1, 1)\,(1, 0, 1)\,(-1, 0, 1)\,(3, 4, 5)\,(4, 3, 5).$$

14.8 EL ESPACIO PROYECTIVO

> *Nuestra geometría es una geometría abstracta. El razonamiento podría ser seguido por espíritu incorpóreo que no tuviera ni idea de lo que es un punto físico, de la manera en que un ciego de nacimiento podría entender la teoría electromagnética de la luz.*
>
> H. G. Forder [1, pág. 43]

El axioma 14.12 limitaba la geometría a un solo plano. Al retirar esta restricción, conviene que nos preguntemos por el significado preciso que damos a la palabra plano. Empezaremos por definir un *haz plano* como el conjunto de las rectas que unen una hilera de puntos (de una recta) con otro punto. A continuación definimos *plano* como el conjunto de los puntos en las rectas de un haz plano y el conjunto de las rectas que unen pares de esos puntos. Con este criterio, *reemplazamos el axioma* 14.12 *por tres nuevos axiomas*. El primero (que se puede considerar como una versión proyectiva del axioma de Pasch, 12.27) nos permite definir el plano sin considerar un haz plano en particular. El segundo posibilita que hablemos de más de un plano. El tercero (cf. 12.431) restringe el número de dimensiones a tres.

AXIOMA 14.81 *Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos, tales que AB encuentra a CD, entonces AC encontrará a BD.*

AXIOMA 14.82 *Hay por lo menos un punto que no está en el plano ABC.*

AXIOMA 14.83 *Dos planos cualquiera se cortan en una recta.*

Tenemos aquí un principio de dualidad diferente: los puntos, las rectas y los planos corresponden a planos, rectas y puntos (cf. § 10.5). Dos líneas que se cortan, a y b, determinan un punto $a \cdot b$ y un plano ab: estos conceptos son duales. De dos rectas que no se cortan se dice que *se cruzan*. La teoría de colineaciones y correlaciones [Coxeter 3, págs. 63–70] es análoga a la del caso bidimensional, con la excepción de que los puntos autoconjugados de una recta ya no se restringe a 0, 1 ó 2. Tenemos, en lugar de dos clases de polaridad, cuatro: una "elíptica", que carece de puntos autoconjugados, dos "hiperbólicas", cuyos puntos autoconjugados forman una cuádrica (reglada o no reglada), y otra, la *polaridad vacía* (o "sistema vacío") ¡en la que todo punto del espacio es autoconjugado!

La idea de definir una cuádrica como el lugar geométrico de los puntos autoconjugados de una polaridad tridimensional (de la segunda o tercera clases) se debe a von Staudt. F. Seydewitz* elaboró otro método, que emplea una polaridad bidimensional en un plano arbitrario ω. La cuádrica se presenta como el lugar geométrico del punto

$$PA \cdot Qa,$$

donde P y Q son puntos fijos (de la cuádrica) mientras A es un punto que varía en ω y a es su polar. Esta definición permite considerar como casos degenerados de la cuádrica una cónica o un par de planos.

Con el objeto de dar una idea del sabor de la geometría proyectiva del espacio, consideraremos unos cuantos teoremas característicos. Supongamos que de un cuadrángulo completo $PQRS$ se obtiene el conjunto cuadrangular

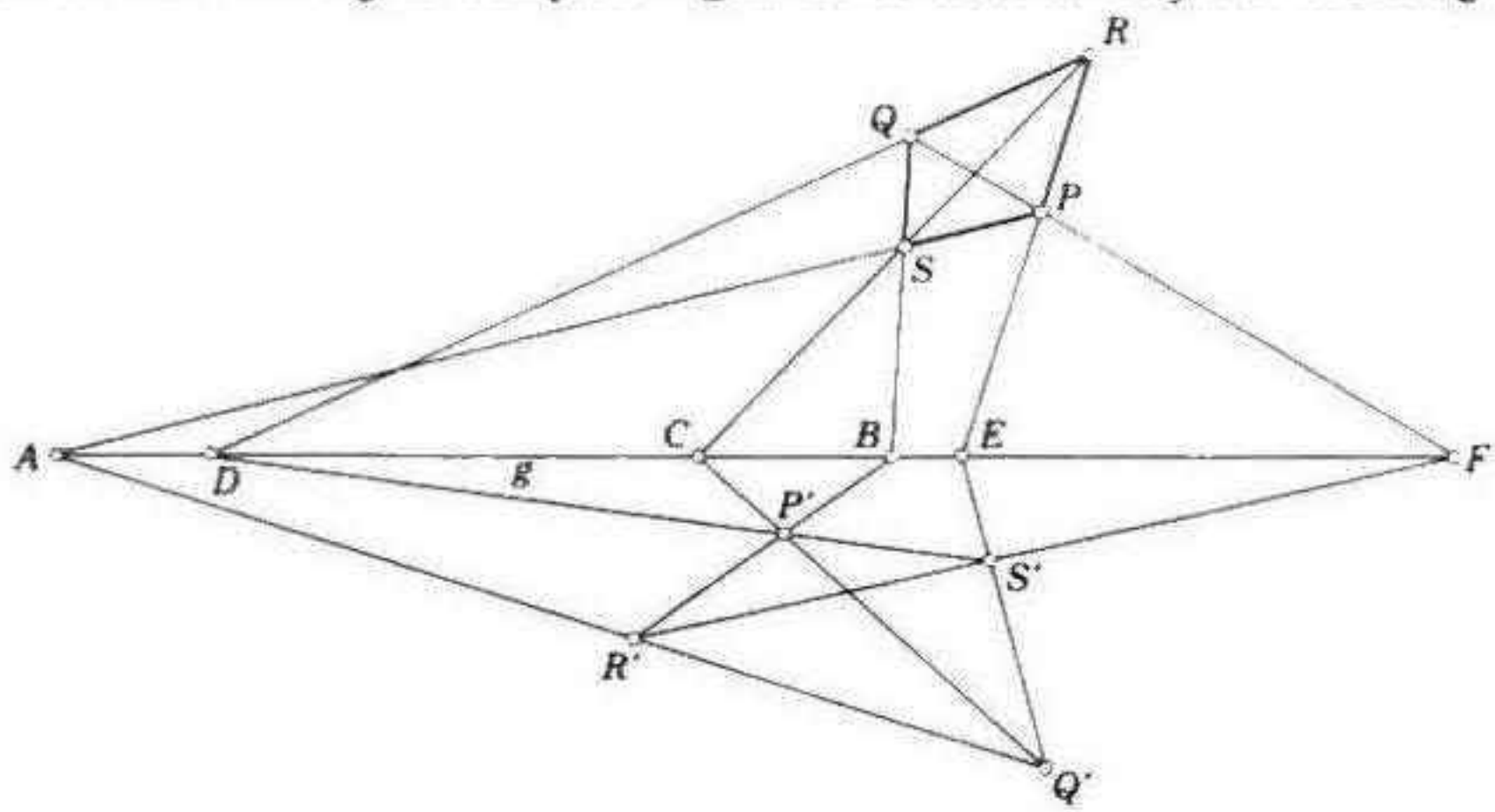


Figura 14.8a

$(AB)(BE)(CF)$ es una recta g, como se tiene en la figura 14.8*a*. En otro plano que pasa por g, los lados de un triángulo $P'Q'R'$ pasan por A, B, C, y sea DP' tal que corte a EQ' en S'. Por el teorema 14.42, sabemos que S' está en $R'F$. A partir de esto tenemos dos configuraciones interesantes: una que consta de ocho rectas (figura 14.8*b*) y otra de dos tetraedros mutuamente inscritos.

* *Archiv für Mathematik und Physik*, 9 (1848), pág. 158.

TEOREMA DE GALLUCCI. *Si tres rectas que se cruzan encuentran otras tres rectas que se cruzan, una transversal cualquiera del primer conjunto encontrará a una transversal cualquiera del segundo conjunto.*

Demostración. Sean los dos conjuntos de rectas PQ', $P'Q$, RS; PQ, $P'Q'$, $R'S$. Esta notación concuerda con la figura 14.8*a*, pues debido a que PS y $Q'R'$ pasan ambas por A, PQ' encuentra a $R'S$, y debido a que tanto QS como $R'P'$ pasan por B, $P'Q$ encuentra a $R'S$. La transversal de R a PQ' y a $P'Q$ es

$$RPQ' \cdot RP'Q = REQ' \cdot RDP' = RS'.$$

La transversal de R' a PQ y a $P'Q'$ es

$$R'PQ \cdot R'P'Q' = R'FQ \cdot R'FQ' = R'F.$$

Puesto que S' está en $R'F$, estas transversales se cortan, como se quería demostrar.

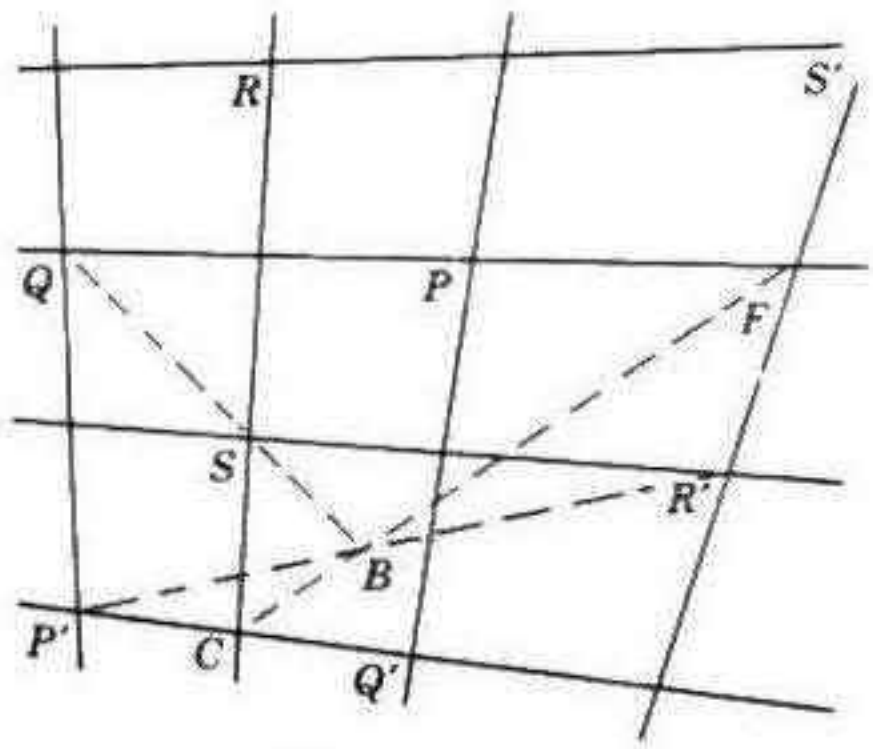


Figura 14.8b

TEOREMA DE MÖBIUS. *Si los cuatro vértices de un tetraedro están respectivamente en los cuatro planos de las caras de otro mientras tres vértices del segundo están en tres planos de las caras del primero, entonces el otro vértice del segundo está en el plano de la otra cara del primero.*

Demostración. Sean $PQRS'$ y $P'Q'R'S$ los dos tetraedros, donde

$$P, \quad Q, \quad R, \quad S', \quad P', \quad Q', \quad S$$

están respectivamente en los planos

$$Q'R'S, \; P'R'S, \; P'Q'S, \; P'Q'R', \; QRS', \; PRS', \; PQR,$$

como se tiene en la figura 14.8*a*. Puesto que $R'S'$ pasa por F, en PQ, el vértice restante R' está en el plano restante PQS', que es lo que se quería demostrar.

Al cambiar la notación

$$S, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad P', \quad Q', \quad R', \quad S'$$

por

$$S, \quad S_{14}, \quad S_{24}, \quad S_{34}, \quad S_{23}, \quad S_{13}, \quad S_{12}, \quad S_{1234}.$$

deduciremos el primero de una notable "cadena" de teoremas que se debe a Homersham Cox:*

PRIMER TEOREMA DE COX. *Sean los cuatro planos de posición general* σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 *que pasan por un punto S. Sea* S_{ij} *un punto arbitrario de la recta* $\sigma_i \cdot \sigma_j$. *Denotemos por* σ_{ijk} *el plano* $S_{ij}S_{ik}S_{jk}$. *Entonces los cuatro planos* σ_{234}, σ_{134}, σ_{124}, σ_{123} *pasan todos por un punto* S_{1234}.

Es claro que σ_1, σ_2, σ_3, σ_{123} son los planos de las caras del tetraedro $P'Q'R'S$, mientras σ_{234}, σ_{134}, σ_{124}, σ_4 son los de las caras del tetraedro inscrito-circunscrito, $PQRS'$. Sea σ_5 un quinto plano que pasa por S. Entonces S_{15}, S_{25}, S_{35}, S_{45} son cuatro puntos de σ_5; σ_{ij5} es un plano que pasa por la recta $S_{i5}S_{j5}$; y S_{ijk5} es el punto $\sigma_{ij5} \cdot \sigma_{ik5} \cdot \sigma_{jk5}$. Por el dual del primer teorema de Cox, los cuatro puntos S_{1345}, S_{1245}, S_{1235} están todos en un plano. Al intercambiar los papeles de σ_4 y σ_5, vemos que S_{1234} está en este mismo plano $S_{2345}S_{1345}S_{1245}$, al que llamaremos con naturalidad σ_{12345}. En consecuencia, tenemos el

SEGUNDO TEOREMA DE COX. *Sean* $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$ *cinco planos de posición general que pasan por S. Entonces los cinco puntos* S_{2345}, S_{1345}, S_{1245}, S_{1235}, S_{1234} *están todos en el mismo plano* σ_{12345}.

Al añadir los dígitos adicionales 56 a todos los subíndices en el primer teorema, deducimos el

TERCER TEOREMA DE COX. *Los seis planos* σ_{23456}, σ_{13456}, σ_{12456}, σ_{12356}, σ_{12346}, σ_{12345} *pasan todos por el mismo punto* S_{123456}.

El sistema se ha aclarado: podemos continuar indefinidamente. El "$(d-3)$ teorema de Cox" permite obtener una configuración de 2^{d-1} puntos y 2^{d-1} planos, donde d de los planos pasan por cada punto y d de los puntos están en cada plano.

Sería difícil obtener nuestro siguiente resultado sin emplear coordenadas. Puesto que la ecuación de la cuádrica general

$$c_{11}x_1^2 + \ldots + c_{44}x_4^2 + 2c_{12}x_1x_2 + \ldots + 2c_{34}x_3x_4 = 0$$

tiene $4 + 6 = 10$ términos, se puede trazar una cuádrica única $\Sigma = 0$ por nueve puntos de posición general; esto se explica al considerar que si se substituye cada uno de los nueve conjuntos dados de x en $\Sigma = 0$, obtenemos nueve ecuaciones lineales que se pueden resolver para las razones mutuas de los diez coeficientes c. Y, de la misma manera, un "haz" (o sistema infinito de manera única) de cuádricas

$$\Sigma + \mu\Sigma' = 0$$

* *Quarterly Journal of Mathematics*, 25 (1891), pág. 67. Véase también H. W. Richmond, *Journal of the London Mathematical Society*, 16 (1941), págs. 105-112, y Coxeter, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 56 (1950), pág. 446. Cuando describimos cuatro planos que pasan por un mismo punto como "de posición general" queremos decir que sus seis rectas de intersección son diferentes.

se puede trazar por ocho puntos de posición general, y un "envoltorio" (o sistema infinito de doble manera) de cuádricas

$$\Sigma + \mu\Sigma' + \nu\Sigma'' = 0$$

se puede trazar por siete puntos de posición general. Pero al resolver las ecuaciones cuadráticas simultáneas

$$\Sigma = 0, \quad \Sigma' = 0, \quad \Sigma'' = 0$$

para las razones mutuas de las cuatro x obtenemos ocho puntos de intersección de las tres cuádricas. Y los ocho puntos están, como es natural, en toda cuádrica del envoltorio. En consecuencia

El octavo punto único queda determinado a partir de siete puntos de posición general, de manera que toda cuádrica que pase por los siete pasa también por el octavo.

La idea de un octavo punto *asociado* constituye una demostración del primer teorema de Cox (y, por lo tanto, también de los de Möbius y Gallucci). Definamos S_{1234} como el punto común de los tres planos σ_{234}, σ_{134}, σ_{124}. (El teorema afirma que S_{1234} está también en σ_{123}.) Puesto que los pares de planos $\sigma_1\sigma_{234}$, $\sigma_2\sigma_{134}$, $\sigma_3\sigma_{124}$ forman tres cuádricas degeneradas que pasan por los ocho puntos

$$S, S_{14}, S_{24}, S_{34}, S_{23}, S_{13}, S_{12}, S_{1234},$$

tenemos aquí ocho puntos asociados. Los primeros siete pertenecen también al par de planos $\sigma_4\sigma_{123}$. Puesto que S_{1234} no está en σ_4, ha de estar en σ_{123}, como se afirmó.

El lugar geométrico de las rectas que cortan a tres rectas que se cruzan se llama *régulo*. El teorema de Gallucci señala que las rectas que cortan a tres generadores del régulo (donde se incluyen las tres rectas originales) forman un nuevo régulo "asociado", tal que todo generador de uno cualquiera de los régulos corta a todo generador del otro. Los dos régulos son los dos sistemas de generadores de una *cuádrica reglada*.

Sean a_1, b_1, c_1, d_1 cuatro generadores del primer régulo, y a_2, b_2, c_2, d_2 cuatro generadores del segundo, como se tiene en la figura 14.8*c*. Las tres rectas

$$a_3 = b_1c_2 \cdot b_2c_1, \quad b_3 = c_1a_2 \cdot c_2a_1, \quad c_3 = a_1b_2 \cdot a_2b_1$$

forman evidentemente un triángulo cuyos vértices son $a_1 \cdot a_2$, $b_1 \cdot b_2$, $c_1 \cdot c_2$. G. P. Dandelin, en 1824, acuñó el nombre de *hexagramme mystique* para el exágono de lados cruzados ("alabeado") $a_1b_2c_1a_2b_1c_2$. Al tomar la sección de sus lados por un plano δ de posición general, obtuvo el exágono plano $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ en el que los lados A_1B_2, $B_2C_1, \ldots$ están en los planos a_1b_2, $b_2c_1, \ldots$ (figura 14.8*d*). Los puntos de intersección de los pares de lados opuestos, a saber

$$A_3 = B_1C_2 \cdot B_2C_1, \quad B_3 = C_1A_2 \cdot C_2A_1, \quad C_3 = A_1B_2 \cdot A_2B_1,$$

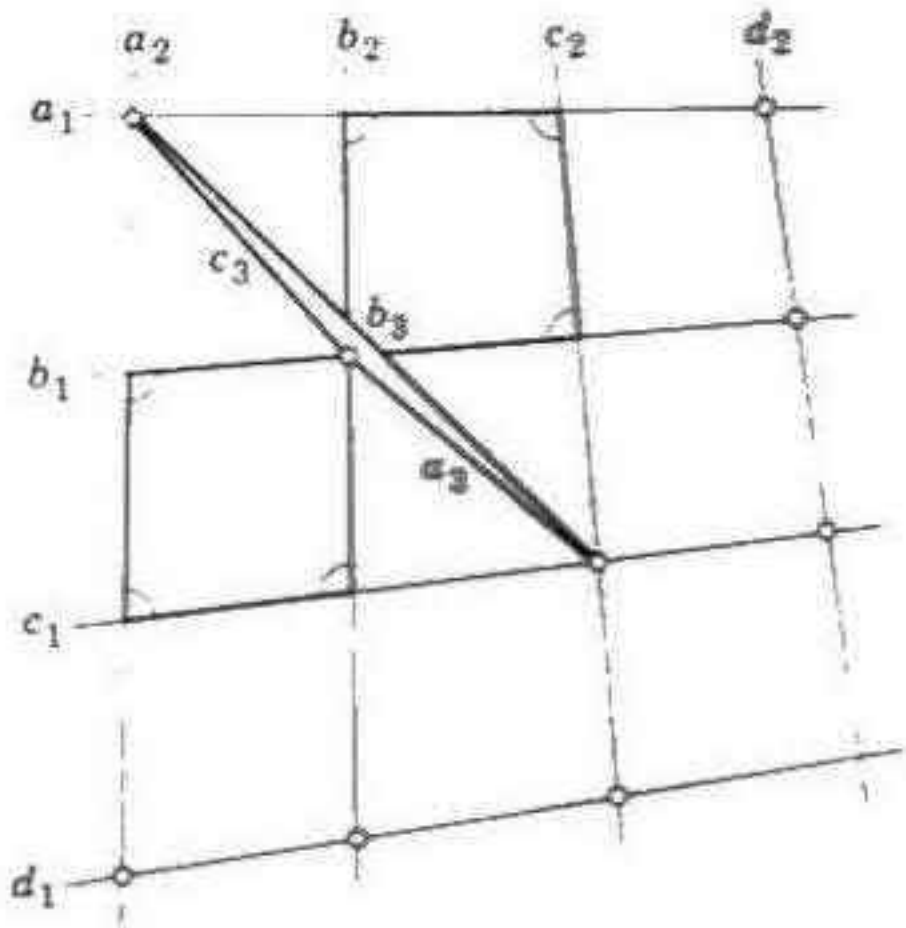


Figura 14.8c

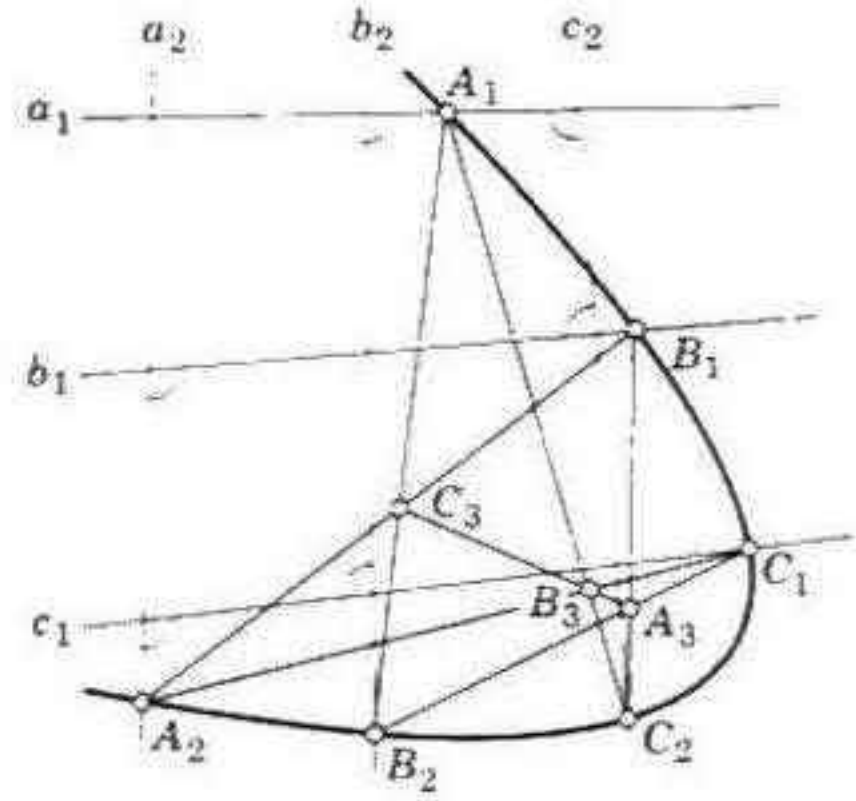


Figura 14.8d

tales que cada uno está en los dos planos $a_3b_3c_3$ y δ, son colineales. Al permitir que c_2 varíe mientras los otros lados del exágono de lados cruzados permanecen fijos, podemos ver, gracias a la construcción de Braikenridge–Maclaurin (que constituye el teorema recíproco del de Pascal, figura 14.7*c*) que

La sección de una cuádrica reglada por un plano de posición general es una cónica.

Si tomamos δ, en lugar de un plano de posición general, como el plano d_1d_2, los vértices del exágono $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ quedan alternados en d_2 y d_1, como teníamos en el axioma 14.15. Así, podemos considerar el teorema de Papo como un caso "degenerado" del teorema de Pascal. De hecho, en lugar de dar el teorema de Papo como axioma para deducir el de Gallucci, podríamos haber supuesto el segundo para deducir el primero. Bachmann [**1**, pág. 254] tiene una figura notablemente buena para ilustrar esta deducción.

EJERCICIOS

1. Si tenemos que a y b son dos rectas que se cruzan y R es un punto que no pertenece a ninguna de ellas, $Ra \cdot Rb$ es la *única* transversal desde R a las dos rectas.

2. Un plano cualquiera que pase por un generador de una cuádrica reglada contiene otro generador. (Este es un plano *tangente*.) Cualquier otra sección plana de la cuádrica reglada es una cónica.

3. Si tenemos que dos tetraedros están en perspectiva de manera triple están también en perspectiva de manera cuádruple (cf. § 14.3). Con más precisión, tenemos que si $A_1A_2A_3A_4$ está en perspectiva con cada uno de los lados $B_2B_1B_4B_3$, $B_3B_4B_1B_2$, $B_4B_3B_2B_1$, también lo está con $B_1B_2B_3B_4$. (*Indicación*: puesto que A_iB_j encuentra a A_jB_i, A_iB_i ha de encontrar a A_jB_j.)

4. Los cuatro centros de perspectiva que intervenían en el ejercicio 3 forman un tercer tetraedro que está en perspectiva con cualquiera de los dos primeros desde cada vértice del otro.

5. En el espacio finito $GP(3, 3)$, que tiene 4 puntos en cada recta, hay en total 40 puntos, 40 planos y ¿cuántas rectas?

14.9 EL ESPACIO EUCLIDIANO

> *El conjunto de las rectas que se trazan desde el ojo del artista a los distintos puntos del objeto . . . constituyen la proyección del objeto y se llama* cono euclidiano. *Entonces, la sección que de este cono hace el lienzo constituye el dibujo que se quiere construir. . . . Las rectas paralelas del objeto convergen en el cuadro al punto donde el lienzo es agujereado por la recta que va del ojo y es paralela a las rectas dadas.*
>
> S. H. Gould [1, pág. 299]

El punto de vista elemental del espacio afín consiste en considerarlo como espacio euclidiano carente de métrica; el punto de vista elemental del espacio proyectivo consiste en considerarlo como un espacio afín al que se le añade el plano en el infinito, para ignorar inmediatamente el papel especial que este plano desempeña. Con la misma eficacia se puede comenzar por el espacio proyectivo para derivar el espacio afín cuando se particulariza un plano cualquiera al denominarlo plano en el infinito. (Sigue siendo, por supuesto, un plano proyectivo.) Cada concepto afín tiene una definición proyectiva: por ejemplo, el punto medio de AB es el conjugado armónico con respecto a A y B del punto en el infinito de AB [Coxeter 2, pág. 119]. Derivamos entonces el espacio euclidiano al especializar una polaridad elíptica que se realiza en el plano en el infinito, a la que se le llama *polaridad absoluta*. Dos rectas son ortogonales cuando sus puntos en el infinito resultan ser conjugados en la polaridad absoluta; una recta y un plano son ortogonales cuando el punto en el infinito de la recta es el polo de la recta en el infinito del plano. Una esfera es el lugar geométrico del punto de intersección de una recta que pasa por un punto fijo y el plano perpendicular que pasa por otro; de esta manera, es una cuádrica especial según la definición de Seydewitz. Dos segmentos que tienen un extremo común serán congruentes si son radios de la misma esfera [Coxeter 2, pág. 146].

Cuando usamos coordenadas proyectivas (x_1, x_2, x_3, x_4) que nos refieren a un tetraedro arbitrario

$$(1, 0, 0, 0)\ (0, 1, 0, 0)\ (0, 0, 1, 0)\ (0, 0, 0, 1),$$

es conveniente tomar el plano en el infinito como $x_4 = 0$. Cualquier otra ecuación se vuelve una ecuación en coordenadas afines x_1, x_2, x_3 por medio del sencillo recurso de igualar $x_4 = 1$. En términos afines, el tetraedro de referencia de las coordenadas proyectivas está formado por el origen y los puntos en el infinito de los tres ejes. Por último, pasamos del espacio afín al euclidiano al afirmar que dos puntos (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3) están en direcciones perpendiculares desde el origen si satisfacen la ecuación bilineal

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0,$$

es decir, si los puntos en el infinito

$$(x_1, x_2, x_3, 0) \quad \text{y} \quad (y_1, y_2, y_3, 0)$$

son conjugados en la polaridad absoluta.

Todos los teoremas que demostramos en § 14.8 conservan su validez en el espacio euclidiano. Una variante de interés de la cadena teoremal de Cox se puede obtener al realizar la particularización que describiremos en seguida. En lugar de tomar un punto *arbitrario* en la recta $\sigma_i \cdot \sigma_j$, tomamos S_{ij} como la segunda intersección de la misma recta con una esfera fija que pasa por S. Puesto que la esfera es una cuádrica que pasa por los primeros siete de los ocho puntos asociados

$$S,\ S_{14},\ S_{24},\ S_{34},\ S_{23},\ S_{13},\ S_{12},\ S_{1234},$$

pasa también por S_{1234} así como por S_{1235} y los demás puntos 2^{d-1}. Los 2^{d-1} planos encuentran a la esfera en 2^{d-1} circunferencias, que se conservan como circunferencias al hacer una proyección estereográfica cualquiera, como en § 6.9. Tenemos así la cadena de teoremas de Clifford* en el plano inversivo (o euclidiano).

PRIMER TEOREMA DE CLIFFORD. *Sean σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 cuatro circunferencias de posición general que pasan por un punto S. Sea S_{ij} la segunda intersección de las circunferencias σ_i y σ_j. Denotemos la circunferencia $S_{ij}\ S_{ik}\ S_{jk}$ por σ_{ijk}. Entonces las cuatro circunferencias σ_{234}, σ_{134}, σ_{124}, σ_{123} pasan todas por el mismo punto S_{1234}.*

SEGUNDO TEOREMA DE CLIFFORD. *Sea σ_5 una quinta circunferencia que pasa por S. Entonces los cinco puntos S_{2345}, S_{1345}, S_{1245}, S_{1235}, S_{1234} están todos en la circunferencia σ_{12345}.*

TERCER TEOREMA DE CLIFFORD. *Las seis circunferencias σ_{23456}, σ_{13456}, σ_{12456}, σ_{12356}, σ_{12346}, σ_{12345} pasan todas por el mismo punto S_{123456}.*

¡Y así sucesivamente!

EJERCICIOS

1. ¿Por qué es elíptica la polaridad absoluta?
2. Trácese una figura esmerada que corresponda al primer teorema de Clifford.
3. Las circunferencias circunscritas de los cuatro triángulos que forman cuatro rectas generales pasan todas por el mismo punto (cf. ejercicio 2 la final de § 5.5).
4. Los circuncentros de los cuatro triángulos el ejercicio 3 están todos en la circunferencia que también pasa por el punto en el que concurren las cuatro circunferencias circunscritas [Forder 3, págs. 16–22; Baker 1, pág. 328].

* W. K. Clifford, *Mathematical Papers* (Londres, 1882), pág. 51. Parece ser que Clifford no afirmó estos teoremas en su plena generalidad. En lugar de circunferencias que pasan por S, tomó σ_1, σ_2, . . . como rectas. En otras palabras, tomaba S como el punto en el infinito del plano inversivo. Así la forma especial de los teoremas se podría haber derivado a partir de la configuración de circunferencias sobre la esfera, al tomar el centro de la proyección estereográfica como el punto S de la esfera [Baker 1, pág. 133].

15

Geometría absoluta

En este capítulo volveremos a estudiar el material de algunos de los capítulos anteriores a la luz de la actitud axiomática que se señalaba en el capítulo 12, y consideraremos la geometría clásica como la geometría ordenada enriquecida por medio de los axiomas de congruencia 15.11–15.15, de los que el último no es sino una manera nueva de enunciar 1.26. Con la excepción de §§ 15.6 y 15.8, trabajaremos en los dominios de la geometría *absoluta*, es decir, nos cuidaremos de no suponer en ninguna de sus formas el quinto postulado de Euclides. En consecuencia, nuestros resultados no solamente tendrán validez en la geometría euclidiana, sino también en la geometría no euclidiana de Gauss, Lobachevsky y Bolyai.

En § 15.4 daremos una relación sencilla de la enumeración completa de los grupos finitos de isometrías. Según Weyl [1, pág. 79], "se trata del equivalente moderno a la tabulación de los poliedros regulares que hacían los griegos". La importancia que tienen estos estudios cinemáticos en la cristalografía permite que se introduzca, en § 15.6, de manera natural, toda la maquinaria de la geometría euclidiana. Pero volveremos en § 15.7 a la geometría absoluta con el objeto de examinar los grupos finitos que generan las reflexiones. Una buena parte de los métodos que emplearemos conservan su validez en la geometría esférica.

15.1 CONGRUENCIA

> *En verdad, todos los maestros deberían saber algo de geometría no euclidiana. . . . Constituye una de las pocas partes de las matemáticas acerca de las que se habla en amplios círculos, de manera que cualquier maestro puede, en un momento dado, verse interrogado acerca de ello.*
>
> F. Klein [2, pág. 135]

Para cimentar rigurosamente la geometría absoluta, comenzaremos por la geometría ordenada (capítulo 12) y presentaremos la *congruencia* como tercer concepto primitivo: una relación indefinida de equivalencia entre pares de puntos (o segmentos, o intervalos). Emplearemos la notación $AB \equiv CD$ con el significado "AB es congruente con CD". Los axiomas siguientes son los de Pasch, con cierto refinamientos debidos a Hilbert y a R. L. Moore [véase Kerékjártó **1**, págs. 90–101].

Axiomas de Congruencia

15.11 *Si A y B son puntos distintos, en un rayo cualquiera que parta de C hay un solo punto D tal que $AB \equiv CD$.*

15.12 *Si $AB \equiv CD$ y $CD \equiv EF$, entonces $AB \equiv EF$.*

15.13 $AB \equiv BA$.

15.14 *Si tenemos $[ABC]$ y $[A'B'C']$ y $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$, entonces $AC \equiv A'C'$.*

15.15 *Si ABC y $A'B'C'$ son dos triángulos en los que $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$, $AB \equiv A'B'$, mientras D y D' son dos puntos más tales que $[BCD]$ y $[B'C'D']$ y $BD \equiv B'D'$, entonces $AD \equiv A'D'$.*

Al hacer dos aplicaciones de 15.13, tenemos que $AB \equiv AB$; es decir, la congruencia es *reflexiva*. A partir de 15.11 y 15.12, deducimos con facilidad que la relación $AB \equiv CD$ implica $CD \equiv AB$, es decir, que la congruencia es *simétrica*. El axioma 15.12 señala en sí mismo que la congruencia es *transitiva*. Decimos, por lo tanto, que la congruencia es una relación de *equivalencia*. Este resultado, si lo añadimos a la propiedad *aditiva* de 15.14, constituye la base de una teoría de la *longitud* [Forder **1**, pág. 95]. El axioma 15.15 nos permite extender la relación de congruencia de pares de puntos o de segmentos a *ángulos* [Forder **1**, pág. 132].

En seguimiento de Euclides, definiremos un *ángulo recto* como congruente con su suplemento; y conveniremos en la escala de medición de ángulos de manera que la medida de un ángulo recto sea $\frac{1}{2}\pi$.

El enunciado $AB \equiv CD$ con respecto a segmentos es equivalente –y esto se ve con claridad– al enunciado $AB = CD$ con respecto a longitudes, de manera que no causará confusión el empleo del mismo símbolo AB para denotar un segmento y su longitud. El mismo comentario se puede aplicar a los ángulos.

Se define la *circunferencia* con centro en O y de radio r como el lugar geométrico de un punto variable P tal que $OP = r$. De un punto cualquiera Q tal que $OQ > r$ se dice que está *fuera* de la circunferencia. De los puntos que no están en la circunferencia ni fuera de ella se dice que están *dentro*. Se puede demostrar [Forder **1**, pág. 131] que si una circunferencia con centro en A tiene un punto dentro de otra circunferencia con centro en C y un punto fuera de ella, entonces las dos circunferencias se cortan en un solo punto a cada lado de la recta AC. Se pueden tratar así los primeros cuatro postulados de Euclides como teoremas, y podemos demostrar todas sus proposiciones hasta I.26; también I.27 y I.28 si substituímos la palabra "paralelas" por "no intersecantes". Podemos definir las reflexiones como se

hizo en § 1.3 y derivar sus consecuencias sencillas, como *pons asinorum* (Euclides I.5) y la simetría del círculo con respecto a sus diámetros (III.3; véase § 1.5). Pero habremos de tener cuidado para no acudir a nuestra idea habitual acerca de la suma de los ángulos de un triángulo: por ejemplo, ya no podremos afirmar que los ángulos en el mismo segmento de circunferencia son iguales (Euclides III.21). Al carecer de teoremas como los de VI.2–4, que dependen de las propiedades afines del paralelismo, tendremos que acudir a recursos muy distintos para demostrar la concurrencia de las medianas de un triángulo.* Por otra parte, la concurrencia de las *alturas* (en un triángulo de ángulos agudos) surge como una consecuencia adicional del problema de Fagnano, que se puede tratar como se hizo en § 1.8. (El problema de Fermat requeriría un tratamiento diferente, pues no es posible ya afirmar que los ángulos de un triángulo equilátero valen $\pi/3$.)

EJERCICIOS

1. Complétese la demostración de que la congruencia es simétrica: si $AB \equiv CD$, entonces $CD \equiv AB$.

2. ¿Qué tanto de § 1.5 conserva su validez en la geometría absoluta? [Kerékjártó 1, págs. 161–163.] (Véanse sobre todo los ejercicios 1 y 3.)

3. Con respecto a un cuadrángulo cualquiera inscrito en una circunferencia, la suma de dos ángulos opuestos es igual a la suma de los otros dos ángulos [Sommerville 1, pág. 84].

15.2 PARALELISMO

> *He decidido publicar una obra acerca de la teoría de las paralelas en cuanto ponga el material en orden. . . . Aun no he terminado el trabajo, pero me siento casi abrumado por las maravillas que he descubierto. . . . He creado un universo nuevo a partir de la nada.*
>
> Janos Bolyai (1802–1860)
>
> (De una carta a su padre en 1823)

De acuerdo con Gauss, Bolyai y Lobachevsky, diremos que dos rectas son paralelas cuando "casi se cortan". El significado preciso de esta frase se encuentra en § 12.6. (Emplearemos la notación p_1 para uno de los dos rayos en los que se descompone la recta p por medio de uno de sus puntos.)

La idea del *incentro* (§ 1.5) se puede extender de un triángulo a la figura que forman dos paralelas y una transversal, de manera que demostraremos la simetría del paralelismo:

15.21 *Si p_1 es paralelo a q_1, entonces q_1 es paralelo a p_1.*

Demostración. [Sommerville 1, pág. 32]. Si p_1, que pasa por A, es paralelo a q_1, que pasa por B, como se tiene en la figura 15.2*a*, la bisectriz interna AD del ángulo cuyo vértice es A completa un triángulo ABD. Sea la bisectriz interna de B tal que corte a AD en I. Trácense las perpendiculares IJ, IK, IL a p_1, AB, q_1. Al reflejar en IA e IB, vemos que $IJ = IK = IL$. Sea

* Bachmann 1, págs. 74–75.

r_1 la bisectriz interna de $\angle LIJ$. La reflexión en la recta r intercambia J y L, y por lo tanto, intercambia a p y q. Puesto que p es paralela a q, tenemos que q es paralela a p en el mismo sentido, es decir, que q_1 es paralelo a p_1. (En la terminología de Gauss, J y L son puntos correspondientes en los dos rayos paralelos.)

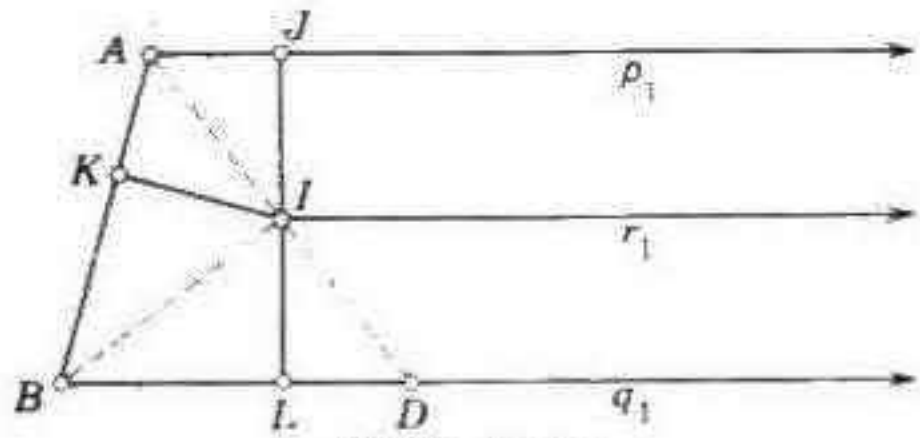


Figura 15.2a

Por medio de los métodos de la geometría ordenada podremos demostrar la transitividad del paralelismo.

15.22 *Si p_1 es paralelo a q_1, y q_1 es paralelo a r_1, entonces p_1 es paralelo a r_1.*

Demostración. [Gauss 1, vol. 8, págs. 205–206]. Tenemos que demostrar que al ser p_1 y r_1 paralelos a q_1, son paralelos entre sí. Vemos enseguida que p_1 y r_1 no se pueden cortar; de no ser así, tendríamos dos rectas intersectantes p y r, ambas paralelas a q en el sentido dado. Podemos suponer, por el teorema 12.64, que p_1, q_1, r_1 parten de tres puntos colineales A, B, C. Durante el resto de esta demostración, distinguiremos el caso en el que B está entre A y C del caso en el que no sucede así.

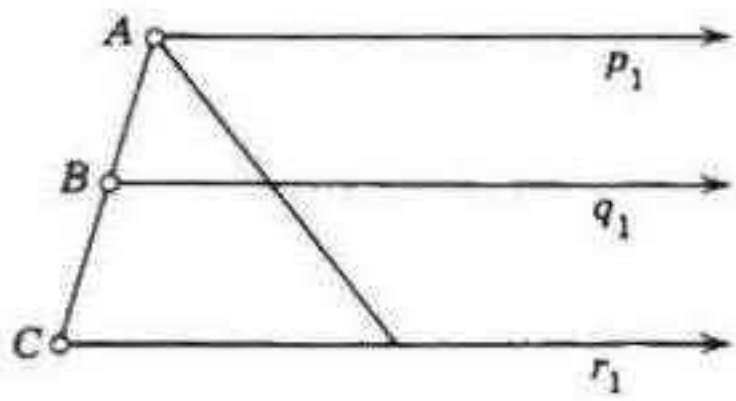


Figura 15.2b

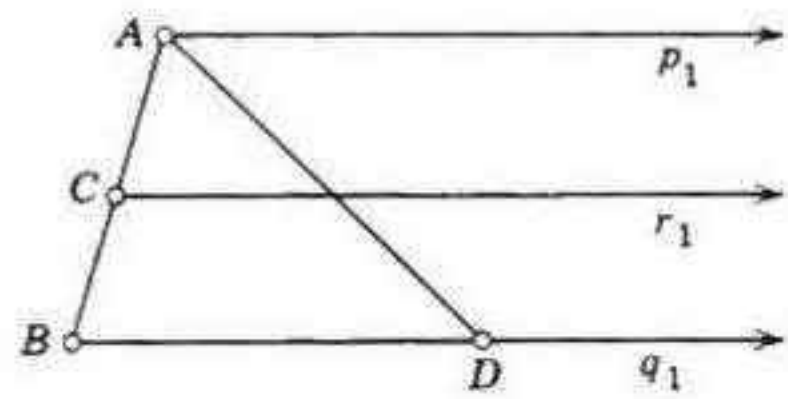


Figura 15.2c

Si tenemos $[ABC]$, como en la figura 15.2*b*, un rayo cualquiera que parta de A dentro del ángulo que forman AC y p_1 cortará a q_1 (puesto que p_1 es paralelo a q_1) y, por lo tanto, también cortará a r_1 (puesto que q_1 es paralelo a r_1). En consecuencia, p_1 es paralelo a r_1.

Cuando B no está entre A y C, supongamos, para definir la situación, que $[ACB]$, como se tiene en la figura 15.2*c*. Un rayo cualquiera que parta de A y esté dentro del ángulo que forman AC y p_1 cortará a q_1 en un punto; sea D, por ejemplo, el punto de intersección. Puesto que r separa a A de D, corta el segmento AD. Por lo tanto, p_1 es paralelo a r_1.

En esta segunda parte de la demostración no ha intervenido en absoluto el paralelismo de q_1 y r_1. De hecho, tenemos que

15.23 *Si un rayo r_1 está entre dos rayos paralelos, es paralelo a ambos.*

Puesto que hemos demostrado ya que el paralelismo es una relación de equivalencia, consideraremos el conjunto de las rectas paralelas a un rayo determinado. Naturalmente, decimos que tenemos un *haz de paralelas*, puesto que contiene una recta única que pasa por un punto dado [Coxeter **2**, pág. 5]. Si proseguimos el examen de su analogía con un haz ordinario (el de todas las rectas que pasan por el mismo punto), podemos llamarlo *punto en el infinito*, o, si seguimos a Hilbert, *extremo*. En lugar de decir que dos rayos (o rectas) son paralelos, o que pertenecen a un determinado haz de paralelas M, diremos que tienen el extremo común M. Y, si seguimos con nuestra descripción en el mismo espíritu, diremos que el rayo que pasa por A y pertenece al haz de paralelas se denota por AM, como si fuera un segmento; se puede usar también el mismo símbolo AM para denotar toda la recta.

Sean AM, BM rayos paralelos, y ε un ángulo arbitrariamente pequeño. Dentro del ángulo BAM (figura 15.2*d*), tómese un rayo que parta de A y forme con AM un ángulo menor que ε. Este rayo corta a BM en un cierto punto C. En CM (que es C/B), tómese D, de manera que $CD = CA$. El triángulo isósceles CAD nos permite afirmar que

$$\angle ADC = \angle CAD < \angle CAM < \varepsilon.$$

Por lo tanto, cuando BD tiende a infinito, de manera que AD tienda a la posición AM, $\angle ADB$ tiende a cero.

Esta conclusión constituye el motivo de la afirmación siguiente de Bolyai [**1**, pág. 207]:

15.24 *Cuando dos rectas paralelas se consideran como intersectantes en el infinito, el ángulo que forman se ha de considerar igual a cero.*

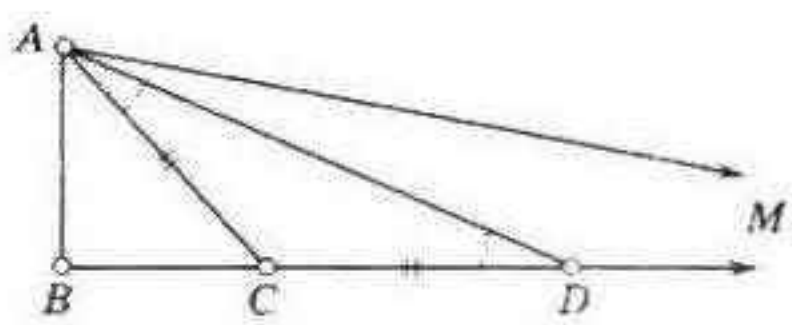


Figura 15.2d

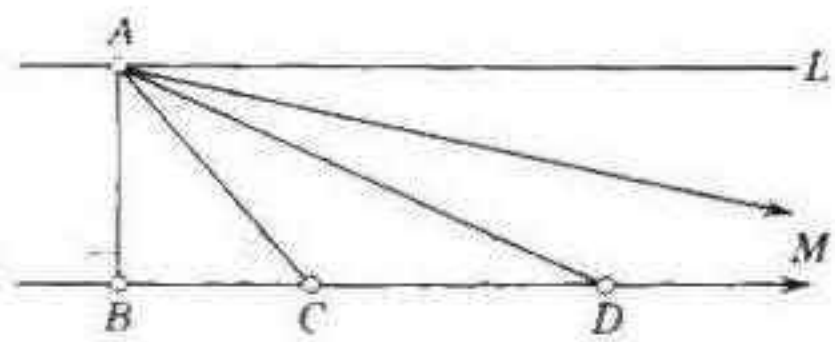


Figura 15.2e

Cuando AM y BM son rayos paralelos, la figura ABM se llama *triángulo asintótico*. El comportamiento de estos triángulos se parece bastante al de los triángulos finitos. En particular, dos de ellos serán congruentes cuando concuerden en el lado finito y en uno de sus ángulos [Carslaw **1**, pág. 49]:

15.25 *Si tenemos dos triángulos asintóticos ABM, $A'B'M'$ en los que $AB = A'B'$ y $A = A'$, entonces también $B = B'$.*

Una consecuencia del axioma 15.11 es que si dos rectas tienen una

perpendicular común no se intersectan. El teorema siguiente constituye una especie de enunciado recíproco de éste.

15.26 *Si dos rectas no son intersectantes ni paralelas, tienen una perpendicular común.*

Demostración. Desde el punto A de la primera recta AL, trácese la perpendicular AB a la segunda recta BM, como se ha hecho en la figura 15.2*e*. Si AB es perpendicular a AL, no hay más que decir. Si no lo es, supongamos que L está en el lado de AB donde $\angle BAL$ es un ángulo agudo. Puesto que ambas rectas ni se intersectan ni son paralelas, hay un ángulo menor BAM tal que AM es paralela a BM. Si tenemos $[BCD]$ en BM, podremos aplicar Euclides I.16 al triángulo ACD, para concluir que su ángulo interno en D es menor que el ángulo externo en C. En consecuencia, cuando BD crece de 0 a ∞, de manera que $\angle DAL$ decrece de $\angle BAL$ a $\angle MAL$, $\angle ADB$ decrece de un ángulo recto a cero. Al comenzar este proceso, tenemos

$$\angle DAL < \angle ADB$$

(puesto que $\angle BAL$ es agudo); pero al final, la desigualdad se invierte (debido a que $\angle MAL$ es positivo). Por lo tanto, debe haber una posición intermedia tal que

$$\angle DAL = \angle ADB.$$

(Para ser más precisos, podemos aplicar el axioma de Dedekind 12.51 a los puntos de BM que satisfacen las dos desigualdades opuestas.) Para uno de esos puntos D (figura 15.2*f*) obtenemos dos triángulos, OAE, ODF, al trazar la perpendicular EF, a BD por el punto O, que es el punto medio de AD. Puesto que los dos triángulos son congruentes, EF es perpendicular no solamente a BD, sino también a AL.

Las rectas no intersectantes que no son paralelas se llaman *ultraparalelas* (o "hiperparalelas"). No afirmamos la existencia de esas rectas; simplemente señalamos cuál ha de ser su comportamiento, en el caso de que existan.

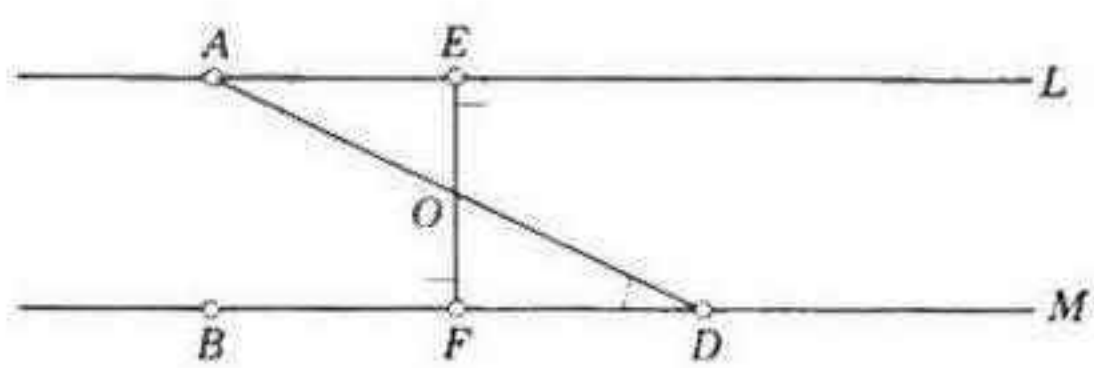


Figura 15.2f

EJERCICIOS

1. Demuéstrese 15.25 sin recurrir a Carslaw 1.
2. Demuéstrese totalmente que si dos rectas tienen una perpendicular común, no se cortan.
3. El ejemplo 4 de la página 16 conserva su validez cuando A es un extremo, de manera que el triángulo sea asintótico.

15.3 ISOMETRIA

Además del universo actual, puedo construir en la imaginación otro universo en el que las leyes sean diferentes.

J. L. Synge [2, pág. 21]

Toda la teoría de los grupos finitos de isometrías (§§ 2.3–3.1) pertenece a la geometría absoluta, pues se ocupa de isometrías que por lo menos tienen un punto invariante. Nos alejamos de este punto de vista en el tratamiento anterior al examinar las isometrías sin puntos invariantes. Hemos de distinguir ahora entre una *traslación*, que es el producto de semigiros alrededor de dos puntos distintos, y un *desplazamiento paralelo*, que es el producto de la reflexión en dos paralelas.

El producto de los semigiros alrededor de dos puntos distintos O, O' es una traslación a lo largo de una recta dada (que se llama *eje* de la traslación) en un sentido determinado y que recorre una cierta distancia, a saber, a lo largo de OO', en el sentido del rayo O'/O y que recorre la distancia $2OO'$. Puesto que una traslación queda determinada por su eje y su distancia dirigida, el producto de los semigiros alrededor de O, O' es igual al producto de los semigiros alrededor de Q, Q', siempre y cuando el segmento dirigido QQ' sea congruente con OO' *en la misma recta* (figura 3.2*a*). Si P está en la misma recta, la distancia PP^T es precisamente el doble de OO'. (De no ser así, ¡puede ser aún mayor!)

Por el argumento que empleamos al demostrar 3.21, el producto de dos traslaciones que tienen el mismo eje, o cuyos ejes se cortan, es una traslación. (Solamente en el primero de estos casos podemos asegurar la conmutatividad.) Tenemos, con más precisión,

15.31 (Teorema de Donkin*) *El producto de tres traslaciones a lo largo de los lados dirigidos en un triángulo que recorran el doble de las longitudes de los lados es la identidad.*

Veremos después que el producto de dos traslaciones cuyos ejes no se cortan puede ser una rotación.

Por el argumento que empleamos al demostrar 3.22, si dos rectas tienen una perpendicular común, el producto de las reflexiones en ellas es una traslación a lo largo de la perpendicular común que recorre el doble de la distancia que las separa. (Estas rectas pueden ser paralelas o ultraparalelas, de acuerdo con la naturaleza de la geometría.)

Nuevamente, como sucedía en 3.13, toda isometría es producto de no más de tres reflexiones. Cuando la isometría es directa, hay un número par de reflexiones, a saber, 2. Como consecuencia de 15.26, tenemos que

15.32 *Toda isometría directa (del plano) que carezca de punto invariante es o bien un desplazamiento paralelo, o bien una traslación.*

* W. F. Donkin, On the geometrical theory of rotation, *Philosophical Magazine* (4), 1, (1851), 187-192. Lamb [1, pág. 6] se sirvió de los semigiros alrededor de los vértices A, B, C del triángulo dado para construir tres nuevos triángulos que, según afirmaba, "son por lo tanto directamente iguales entre sí, y 'simétricament ' iguales a ABC". Esto es un error: ¡los cuatro triángulos son congruentes directamente!

Es notable que la geometría absoluta incluya toda la teoría de la reflexión en deslizamiento. Los únicos cambios que se necesitan hacer en el tratamiento anterior (§ 3.3) consisten en las correcciones en los lugares en los que se usó la palabra "paralelo". (En la figura 3.3*b* debemos definir m, m' como perpendiculares a OO'; no han de ser necesariamente paralelas entre sí.) El teorema de Hjelmslev constituye una aplicación inmediata de estas ideas, y es uno de los mejores ejemplos de un resultado genuinamente sorprendente de la geometría absoluta. El tratamiento de § 3.6 conserva su validez ¡sin cambiar una sola palabra!

De la misma manera, los grupos unidimensionales de § 3.7 pertenecen a la geometría absoluta, y el único cambio consiste en que nuevamente los espejos m, m' (figura 3.7*b*) no se deben calificar de "paralelos", sino de perpendiculares a la misma recta (horizontal). Por otra parte, habremos de desechar la totalidad de las teorías de las celosías y de semejanza (capítulo 5).

La extensión de la geometría absoluta de dos a tres dimensiones no presenta dificultad alguna. En particular, permanece la validez de una buena parte de la teoría euclidiana de la isometría (§ 7.1) en el espacio absoluto. Sigue siendo verdad que toda isometría directa es producto de dos semigiros, y que toda isometría opuesta que tenga un punto invariante es una inversión rotatoria (que tal vez se reduzca a una reflexión o a una inversión central). Más aún, la enumeración clásica de los cinco cuerpos platónicos (§§ 10.1–10.3) forma parte de la geometría absoluta. Los pocos cambios necesarios se determinan con facilidad; por ejemplo, el término *rectángulo* se debe interpretar como un cuádrangulo en el que todos los ángulos son iguales (aunque no han de ser necesariamente rectos), y un *cuadrado* constituirá el caso especial en el que también los lados son iguales.

EJERCICIOS

1. Si l es una recta fuera del plano de un triángulo ABC, ¿qué se puede decir de las tres rectas en las que este plano corta a los tres planos Al, Bl, Cl? (Si dos de las tres rectas se cortan o son paralelas, o tienen una perpendicular común, se podrá decir lo mismo de las tres. Esta propiedad de las tres rectas m_1, m_2, m_3 equivale a $R_1R_2R_3 = R_3R_2R_1$ en la notación de § 3.4.)

2. El producto de las reflexiones en las rectas p y r de la figura 15.2*a* es el desplazamiento paralelo que transforma J en L.

15.4 GRUPOS FINITOS DE ROTACIONES

Estos grupos –sobre todo los tres últimos– constituyen un tema que tiene inmensos atractivos para la investigación geométrica.

H. Weyl [1, pág. 79]

Una de las más sencillas clases de transformaciones es la *permutación* (o rearreglo) de un número finito de objetos denominados. Por ejemplo, una manera de permutar las seis letras a, b, c, d, e, f consiste en trasponer (o

intercambiar) a y b, poner c en lugar de d, d en lugar de e, e en lugar de c y dejar a f en su lugar. Esta permutación se denota por $(ab)(cde)$. Las dos partes "independientes" $(a\ b)$ y $(c\ d\ e)$ se llaman *ciclos* de períodos 2 y 3. Una permutación que conste de un solo ciclo recibe la denominación de *cíclica*. Es claro que el grupo cíclico C_n se puede representar por las potencias de la permutación generatriz $(a_1 a_2 \ldots a_n)$; por ejemplo, los cuatro elementos de C_4 son

$$1, \quad (a\ b\ c\ d), \quad (a\ c)(b\ d), \quad (a\ d\ c\ b).$$

Una permutación cíclica de período 2, como $(a\ b)$, se llama *trasposición*. Puesto que

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) = (a_1 a_n)(a_2 a_n) \ldots,$$

una permutación cualquiera puede expresarse como el producto de trasposiciones. Se dice que una permutación es *par* o *impar* según haya o no paridad en el número de ciclos de período par; por ejemplo, $(a\ c)(b\ d)$ es par, pero $(a\ b)(c\ d\ e)$ es impar. La identidad, 1, carece por completo de ciclos, y por lo tanto es clasificada como función par. Se demuestra con facilidad [véase Coxeter 1, págs. 40–41] que todo producto de trasposiciones será par o impar según la paridad del número de trasposiciones. En consecuencia, la multiplicación de permutaciones pares e impares se comporta como la *adición* de números pares e impares; por ejemplo, el producto de dos permutaciones impares es par.

De lo anterior se desprende que todo grupo de permutaciones consiste o bien enteramente de permutaciones pares o bien de un número igual de permutaciones pares e impares. El grupo de todas las permutaciones de n objetos se llama grupo *simétrico* de orden $n!$ (o de *grado* n) y se denota por S_n. El subgrupo compuesto por todas las permutaciones pares se llama grupo *alternante* de orden $\frac{1}{2}n!$ (o de grado n) y se denota por A_n. En particular, S_2 es el mismo grupo que C_2 y A_3 el mismo que C_3, de manera que escribimos

$$S_2 \cong C_2, \qquad A_3 \cong C_3.$$

Es más interesante observar que $A_3 \cong D_3$ (véase la figura 2.7*a*), pues los seis elementos del grupo diedral D_3, que son operaciones de simetría de un triángulo equilátero, se pueden considerar como permutaciones de los tres lados del triángulo. Las permutaciones pares

$$1, \quad (a\ b\ c), \quad (a\ c\ b)$$

(que constituyen el subgrupo $A_3 \cong C_3$) son rotaciones, mientras las permutaciones impares

$$(b\ c), \quad (c\ a), \quad (a\ b)$$

son las reflexiones en las tres medianas. Si consideramos el triángulo en el espacio tridimensional (absoluto), las rotaciones se llevan a cabo alrededor de un eje que pasa por el centro del triángulo y es perpendicular a su plano. Se pueden interpretar entonces las reflexiones de dos maneras alternas, de manera que habremos de considerar dos grupos resultantes, que son geométri-

camente distintos pero idénticos desde el punto de vista abstracto, es decir, *isomórficos*: podemos reflejar en tres planos que pasen por el eje o efectuar rotaciones que recorran semigiros alrededor de las mismas medianas. En la segunda representación, los seis elementos de D_3 se presentan como rotaciones. Podemos describirlo como el grupo de las operaciones directas de simetría de un prisma triangular. En general, las $2n$ operaciones directas de simetría de un prisma enegonal forman el grupo diedral D_n mientras, por supuesto, las n operaciones directas de simetría de una pirámide enegonal constituyen el grupo cíclico C_n. Las rotaciones de C_n tienen todas el mismo eje, y se deriva D_n a partir de C_n al añadir semigiros alrededor de n rectas dispuestas de manera simétrica en un plano perpendicular al eje.

Hemos encontrado así dos familias infinitas de grupos finitos de rotaciones. Otros grupos de ésos son los de las operaciones directas de simetría de los cinco cuerpos platónicos $\{p, q\}$. Estos son solamente tres grupos, y no cinco, debido a que cualquier rotación que lleve a $\{p, q\}$ a sí mismo, llevará también a su recíproco $\{q, p\}$ a sí mismo: el octaedro tiene el mismo grupo de rotaciones que el cubo, y el icosaedro el mismo que el dodecaedro.

El tetraedro regular $\{3, 3\}$ es evidentemente simétrico por reflexión en el plano que va de una arista cualquiera al punto medio de la arista opuesta. Como permutación de las cuatro caras a, b, c, d (figura 15.4a), esta reflexión no es sino una transposición. Y por lo tanto, el grupo completo de simetría

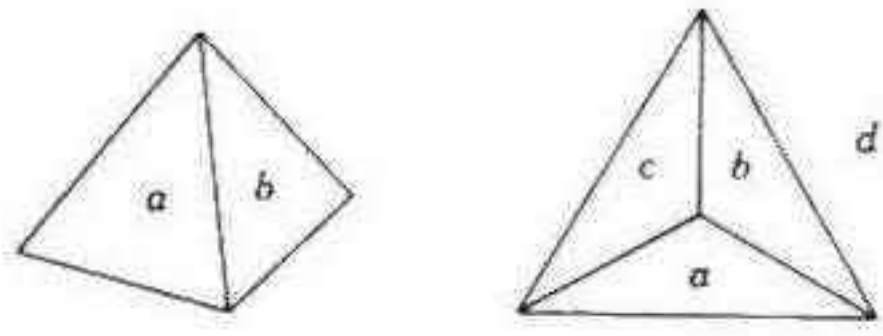


Figura 15.4a

del tetraedro, que es generado por esas reflexiones, resulta ser isomórfico con respecto al grupo simétrico S_4, que es generado por trasposiciones; y el grupo de rotaciones, al que generan los productos de pares de reflexiones, es isomórfico con respecto al grupo alternante A_4, al que generan productos de pares de trasposiciones. Las 12 rotaciones se pueden enumerar de la manera siguiente. La perpendicular desde un vértice a la cara opuesta es el eje de una rotación *trigonal* (*ejemplo*: una rotación de período 3); de los 4 vértices se obtienen 8 rotaciones así. La recta que une los puntos medios de dos aristas opuestas es el eje de un semigiro (o rotación *digonal*); de los tres pares de aristas opuestas se obtienen 3 de esos semigiros. Al agregar la identidad, tenemos así $8 + 3 + 1 = 12$ rotaciones. Como permutaciones, las 8 rotaciones trigonales son

$$(b\,c\,d),\quad (b\,d\,c),\quad (a\,c\,d),\quad (a\,d\,c),\quad (a\,b\,d),\quad (a\,d\,b),\quad (a\,b\,c),\quad (a\,c\,b)$$

y los 3 semigiros

$$(b\,c)(a\,d),\quad (c\,a)(b\,d),\quad (a\,b)(c\,d).$$

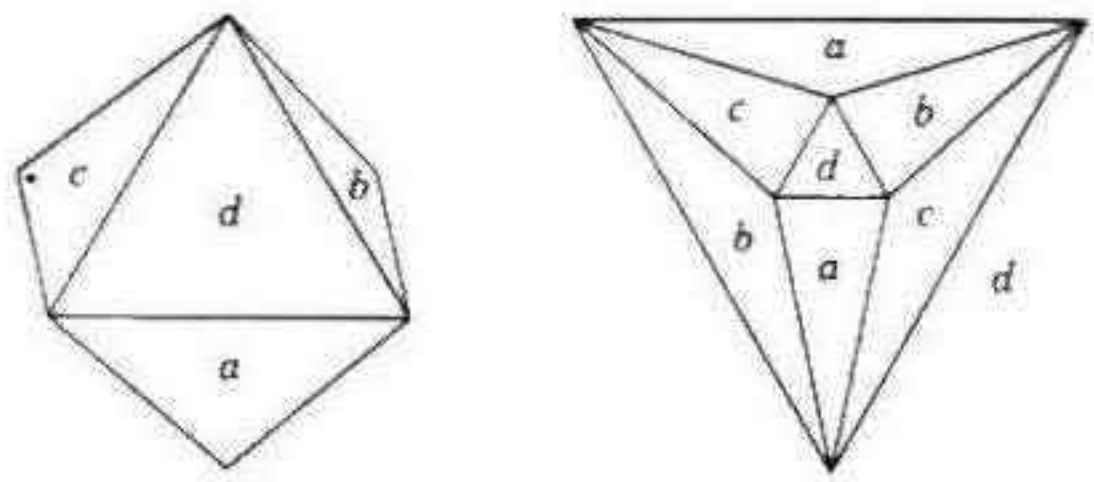


Figura 15.4b

Se puede derivar el octaedro $\{3, 4\}$ del tetraedro por medio de un *truncamiento*: sus ocho caras constituyen las cuatro figuras verticiales del tetraedro y versiones truncas de las cuatro caras. Toda operación de simetría del tetraedro se conserva como operación de simetría del octaedro, pero el octaedro tiene también operaciones de simetría que intercambian los dos conjuntos de cuatro caras. Por ejemplo, la recta que une dos vértices opuestos es el eje de una rotación *tetragonal* (de período 4), y la recta que une el punto medio de una arista con el de la opuesta es el eje de un semigiro. Cuando los cuatro pares de caras opuestas se designan a, b, c, d, como se ha hecho en la figura 15.4*b*, el semigiro en cuestión se presenta como una trasposición, que es una de las permutaciones que pertenecen a S_4, pero no a A_4. De esto se desprende que el grupo rotacional del octaedro (o del cubo) es isomórfico con respecto al grupo simétrico S_4.

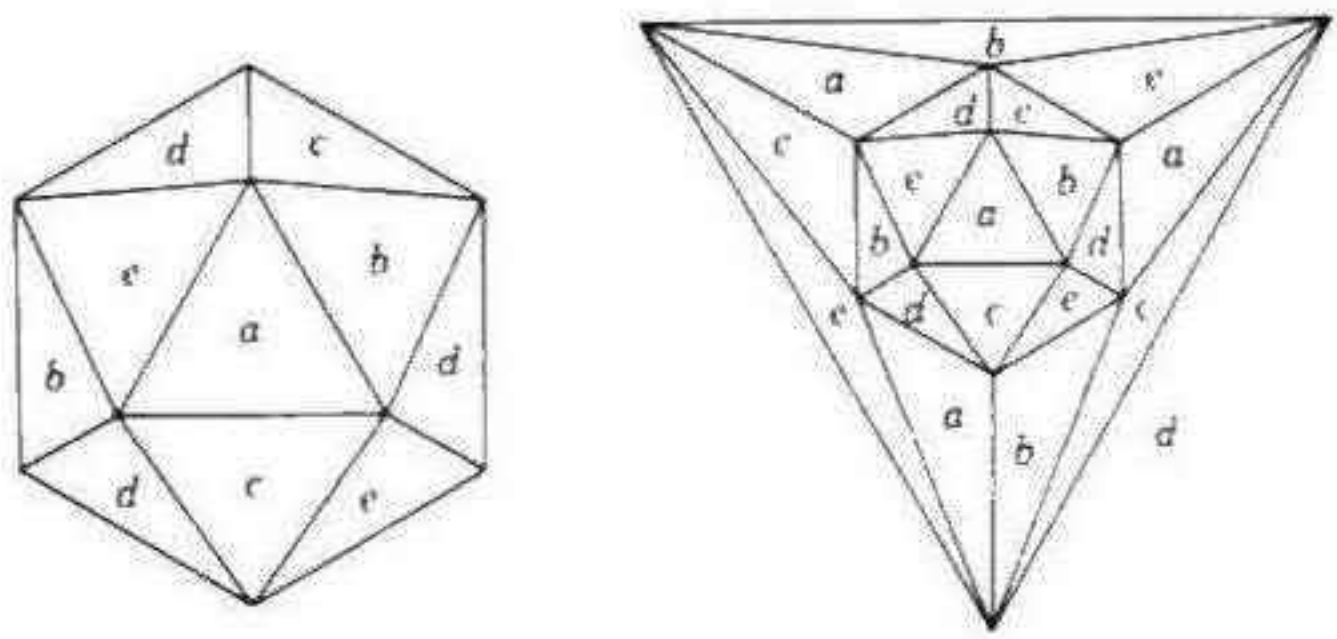


Figura 15.4c

En la figura 15.4*c*, las veinte caras del icosaedro $\{3, 5\}$ se han designado a, b, c, d, e en conjuntos de cuatro, de manera que dos caras que se han designado con la misma letra no tengan nada en común, ni siquiera un vértice. De hecho, las cuatro caras a (por ejemplo) están en los planos de las caras de un tetraedro regular y las caras respectivamente opuestas (que se han señalado como b, c, d, e) forman el tetraedro recíproco. Las doce rotaciones que llevan a uno cualquiera de los tetraedros a sí mismo (a las que representan las permutaciones pares de b, c, d, e) son también operaciones de simetría de todo el icosaedro. Este comportamiento de las cuatro caras a es imitado por las caras b, c, d, y e, de manera que en total tenemos todas las

permutaciones pares de las cinco letras: el grupo rotacional del icosaedro (o del dodecaedro) es isomórfico con respecto al grupo alternante A_5. Se pueden contar las 60 rotaciones de la manera siguiente: 4 rotaciones pentagonales alrededor de cada uno de seis ejes, 2 rotaciones trigonales alrededor de cada uno de 10 ejes, 1 semigiro alrededor de cada uno de 15 ejes, y la identidad [Coxeter 1, pág. 50].

Encontraremos que la lista anterior es exhaustiva en lo que respecta a grupos finitos de rotaciones. Como primer paso en esta dirección, observaremos que todos los ejes de rotación han de pasar por un punto fijo. De hecho, con la misma facilidad se demuestra un resultado mucho más fuerte:

15.41 *Todo grupo finito de isometrías conserva por lo menos un punto invariante.*

Demostración. Un grupo finito de isometrías transforma un punto cualquiera en un conjunto finito de puntos, y transforma la totalidad del conjunto de puntos en sí mismo. Esto, como sucede con cualquier conjunto finito (o acotado) de puntos, determina *una esfera única, que contiene todos los puntos y es menor que cualquier otra que también los contenga en su superficie o en su interior:* es única porque si hubiera dos esferas menores iguales, los puntos pertenecerían a un sector común a ambas, con forma de "lente"; y la esfera cuyo círculo mayor es el borde de la lente resulta menor que cualquiera de las dos esferas iguales, lo que contradice nuestra hipótesis acerca de que las esferas sean tan pequeñas como se pueda. (El área sombreada en la figura 15.4*d* es una sección de la lente.) El grupo transforma esta esfera única en sí misma. En su superficie están algunos de sus puntos; por lo tanto, están todos. El punto invariante que buscábamos es el centro.

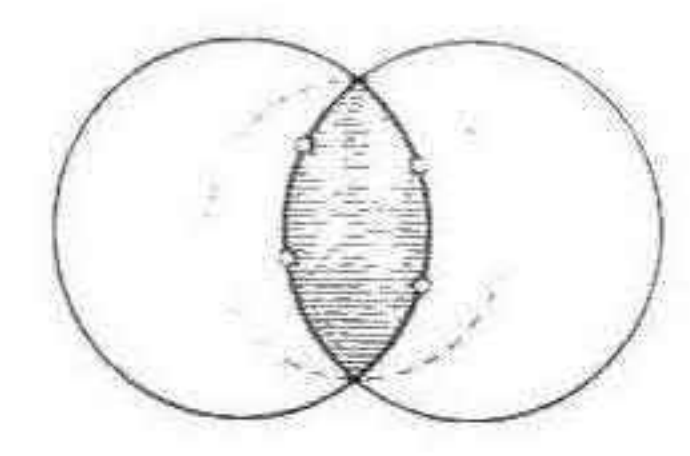


Figura 15.4d

Se desprende de lo anterior que un grupo finito cualquiera de rotaciones opera en la superficie de la esfera. En un grupo G así, cada rotación que no sea la identidad conserva solamente dos puntos invariantes, a saber, los *polos* en los que el eje de rotación corta la esfera. Se dice que un polo P es *p*egonal ($p \geqslant 2$) si pertenece a una rotación de período p. Las p rotaciones alrededor de P que recorren diferentes múltiplos del ángulo $2\pi/p$ son las rotaciones de G que conservan invariante. Cualquier otra rotación de G transforma a P en un polo "equivalente", que es también *p*egonal. Tenemos así que todos los polos quedan dentro de conjuntos de polos equivalentes. Todos los polos de un mismo conjunto tienen el mismo período p, pero esto no implica que dos polos del mismo período pertenezcan al mismo conjunto; la

condición para que esto ocurra es que exista una rotación en G que transforme a uno en el otro.

Un conjunto cualquiera de polos *pe*gonales equivalentes consta exactamente de n/p polos, donde n es el orden de G. Para demostrarlo tómese un punto Q en la esfera que se encuentre situado arbitrariamente cerca de un polo P del conjunto. Las p rotaciones alrededor de P transforman a Q en un *pé*gono pequeño alrededor de P. Las otras rotaciones de G transforman al *pé*gono en *pé*gonos congruentes alrededor de todos los demás polos del conjunto. Pero las n rotaciones de G transforman a Q en no más de n puntos (donde incluimos a Q también). Puesto que los n puntos se han distribuido en *pé*gonos alrededor de los polos, el número de polos del conjunto tiene que estar dado por n/p.

Las $n-1$ rotaciones de G distintas de la identidad, resultan en $p-1$ con respecto a cada eje *pe*gonal, es decir, $\frac{1}{2}(p-1)$ con respecto a cada polo *pe*gonal, o

$$\tfrac{1}{2}(p-1)n/p$$

con respecto a cada conjunto de n/p polos equivalentes. En consecuencia,

$$n-1 = \tfrac{1}{2}n \sum (p-1)/p,$$

donde la suma se toma sobre los conjuntos de polos. La ecuación se puede expresar como

$$2 - \frac{2}{n} = \sum \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Si $n = 1$, de manera que G consta solamente de la identidad, no hay polos, y la suma de la derecha no tiene término. En todos los demás casos, $n \geqslant 2$, y, por lo tanto,

$$1 \leqslant 2 - \frac{2}{n} < 2.$$

De donde se desprende que el número de los conjuntos de polos solamente puede ser 2 ó 3, pues el término singular $1 - 1/p$ será menor que 1, y la suma de 4 o más términos será

$$\geqslant 4(1 - \tfrac{1}{2}) = 2.$$

Si hay 2 conjuntos de polos, tendremos

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2},$$

es decir,

$$\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} = 2.$$

Pero dos enteros positivos suman dos solamente cuando cada uno de ellos es igual a 1; por lo que

$$p_1 = p_2 = n,$$

y cada uno de los 2 conjuntos de polos consta de un polo *ene*gonal, y

tenemos el grupo cíclico C_n con un polo en cada extremo de su eje único.

Por último, en el caso de 3 conjuntos de polos tenemos

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2} + 1 - \frac{1}{p_3},$$

de donde

15.42 $$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1 + \frac{2}{n}.$$

Puesto que esto es mayor que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, los tres periodos p_i no pueden ser todos iguales o mayores que 3. En consecuencia, por lo menos uno de ellos vale 2 (sea éste $p_3 = 2$), y tenemos que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}.$$

de donde $$(p_1 - 2)(p_2 - 2) = 4(1 - p_1p_2/n) < 4$$

(cf. 10.33), de manera que las únicas posibilidades (donde tomamos $p_1 \leqslant p_2$ por convenirnos así) son:

$$p_1 = 2,\ p_2 = p,\ n = 2p; \qquad p_1 = 3,\ p_2 = 3,\ n = 12;$$
$$p_1 = 3,\ p_2 = 4,\ n = 24; \qquad p_1 = 3,\ p_2 = 5,\ n = 60.$$

Y los reconocemos como los grupos diedral, tetraedral, octaedral e icosaedral.

De esta manera, queda completa nuestra demostración [Klein 3, pág. 129] de que

15.43 *Los únicos grupos finitos de rotaciones en tres dimensiones son los grupos cíclicos C_p ($p = 1, 2, \ldots$), los grupos diedrales D_p ($p = 2, 3, \ldots$), el grupo tetraedral A_4, el grupo octaedral S_4, y el grupo icosaedral A_5.*

(Con el objeto de evitar repeticiones, hemos omitido D_1, que al ser considerado como grupo de rotaciones, no es solamente idéntico a C_2 desde el punto de vista abstracto, sino también desde el geométrico.

Cualquier grupo que tenga como grupo completo de simetría uno de los

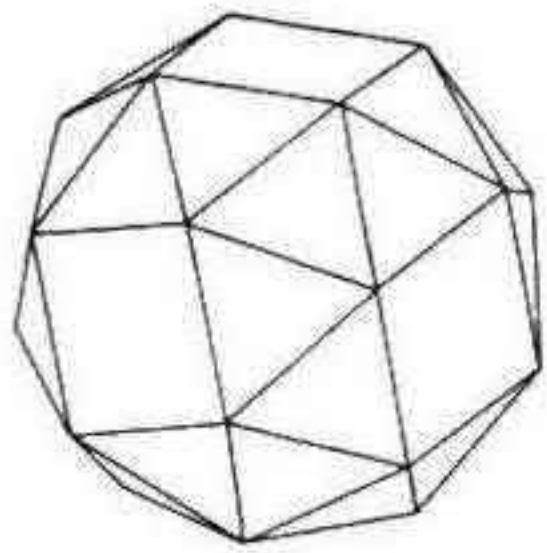


Figura 15.4e

que acabamos de mencionar (como el *cubo romo** de la figura 15.4*e*, cuyo grupo de simetría es S_4) pueden ocurrir en dos variedades *enantiomórficas*, *dextra* y *leva* (es decir, derecha e izquierda): son imágenes especulares que no se pueden superponer por medio de un movimiento continuo.

EJERCICIOS

1. Interprétense las permutaciones siguientes como rotaciones del octaedro (figura 15.4*b*):

$$(a\,b\,c\,d),\quad (a\,b\,c),\quad (a\,b),\quad (a\,b)(c\,d).$$

Cuéntense las rotaciones de cada tipo, y verifíquese al comparar con el orden que se conoce de S_4.

2. Por medio del símbolo (p_1, p_2, p_3) que representa al grupo que tiene tres conjuntos de polos de períodos p_1, p_2, p_3, considérese la posibilidad de extender la notación de manera que se pueda escribir $(1, p, p) \cong C_p$, junto con

$$(2, 2, p) \cong D_p, \qquad (2, 3, 3) \cong A_4,$$
$$(2, 3, 4) \cong S_4, \qquad (2, 3, 5) \cong A_5.$$

15.5 GRUPOS FINITOS DE ISOMETRIAS

Ya hemos enumerado los grupos finitos de rotaciones; esto nos permitirá enumerar con facilidad los grupos finitos de isometrías (cf. § 2.7). Puesto que todo grupo así conserva un punto invariante, nos ocuparemos tan sólo de las isometrías que tienen puntos fijos. Una isometría como la que acabamos de señalar es una rotación o una inversión rotatoria, según sea directa u opuesta (7.15, 7.41).

Si un grupo finito de isometrías consiste solamente en rotaciones, ha de ser uno de los grupos G que consideramos en § 15.4. De no ser así, contiene un grupo G como subgrupo de índice 2, es decir, un grupo de orden $2n$ que consiste en n rotaciones $S_1, S_2, \ldots, S_n$ y el mismo número de inversiones rotatorias $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Esto se explica al considerar que si el grupo consta de n rotaciones S_i y (por ejemplo) de m inversiones rotatorias T_i, podremos multiplicar por T_1 con el objeto de expresar las mismas $n + m$ isometrías como S_iT_1, y T_iT_1. Las n isometrías S_iT_1, que son inversiones rotatorias, son iguales a T_i (si se rearreglan de la manera adecuada cuando sea necesario) y las m isometrías T_iT_1, que son rotaciones, son iguales a S_i. Por lo tanto, $m = n$.

Si la inversión central I pertenece al grupo, las n inversiones rotatorias son simplemente

$$S_iI = IS_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

* Los vértices del cubo romo constituyen una distribución de 24 puntos en una esfera para la que la menor distancia entre 2 cualquiera es tan grande como se puede. La conjetura se debe a K. Schütte y B. L. van der Waerden (*Matematische Annalen*, **123** (1950), págs. 108, 123) y su demostración a R. M. Robinson (*ibid.*, **144** (1961), págs. 17-48). La distribución análoga con respecto a 6 ó 12 puntos se obtiene por medio de los vértices de un octaedro o un icosaedro respectivos. Para 8 puntos la figura no es, como podría esperarse a las primeras de cambio, un cubo, sino un antiprisma cuadrado [Fejes Tóth I, págs. 162-164].

y el grupo es el producto directo $G \times \{I\}$, donde G es el subgrupo que consiste en las inversiones rotatorias S_i e $\{I\}$ denota el grupo de orden 2 que genera I. (Como grupo abstracto, $\{I\}$ es, por supuesto, igual a C_2 o D_1.)

Cuando no pertenece, las $2n$ transformaciones S_i y T_iI forman un grupo de rotaciones de orden $2n$ que tiene la misma tabla de multiplicación que el grupo dado, constituido por S_i y T_i. Pues tenemos que si $S_iT_j = T_k$,

$$S_iT_jI = T_kI,$$

y si $T_iT_j = S_k$,

$$T_iIT_jI = T_iI^2T_j = T_iT_j = S_k.$$

En otras palabras, un grupo de n rotaciones y n inversiones rotatorias, donde no se incluye a I, es isomórfico con un grupo rotacional G', de orden $2n$, que tiene como subgrupo a G, de orden n. Para terminar nuestra lista, no tenemos más que buscar esos pares de grupos relacionados de rotaciones. Cada par permite obtener un grupo "mixto", por ejemplo, $G'G$, que consiste en todas las rotaciones del grupo menor G, además de las rotaciones de G', donde cada una se multiplica por la inversión central I. Al volvernos a § 15.4, veremos que los pares posibles son

$$C_{2n}C_n, \quad D_nC_n, \quad D_nD_{1n}\ (n \text{ par}), \quad S_4A_4.$$

Y con esto podemos completar la tabla III de la página 461.

EJERCICIOS

1. Determínense los grupos de simetría de las figuras siguientes: (a) un ortoesquema $O_0O_1O_2O_3$ (figura 10.4c) donde $O_0O_1 = O_2O_3$; (b) un antiprisma *ene*gonal (donde n puede ser par o impar).

2. En la notación de $G'G$, designense el producto directo del grupo de orden 3, al que genera una rotación alrededor de un eje vertical, y el grupo de orden 2 al que genera la reflexión en un plano horizontal.

15.6 CRISTALOGRAFIA GEOMETRICA

El sentido en el que se enrosca una concha de caracol es un rasgo hereditario que se encuentra en su constitución genética, como sucede con . . . la manera en la que enrosca el conducto intestinal en la especie Homo sapiens . . . *También observamos que la constitución química más profunda del cuerpo humano señala que hay un tornillo dentro, un tornillo que gira del mismo modo en todos nosotros.* . . . Una manifestación horrible de la simetría genotípica es una enfermedad que afecta el metabolismo, llamada fenilcetonuria, y que conduce a la locura; el hombre la contrae cuando una pequeña cantidad de levofenilalanina se ingiere con la comida, mientras la forma dextro no tiene efectos tan desastrosos.*

H. Weyl [1, pág. 30]

* ¿La molécula del DNA?

Hemos estudiado los grupos simétricos con una terminología que vale no solamente en la geometría euclidiana del espacio, sino también en la absoluta. Parece adecuado, sin embargo, mencionar la aplicación que se hace de estas ideas en la ciencia práctica de la cristalografía. Por lo tanto, en esta disgresión la geometría es estrictamente euclidiana.

A los cristalógrafos les interesan los grupos finitos de isometrías que surgen como subgrupos (y grupos factores) de los grupos de simetría de las celosías tridimensionales. Por § 4.5, se trata de los casos especiales en los que las únicas rotaciones que ocurren tienen períodos 2, 3, 4, ó 6. La restricción cristalográfica reduce los grupos rotacionales a

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_6,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_6,\ A_4,\ S_4,$$

donde se multiplican los productos directos de cada uno de estos once por $\{I\}$ y se reducen los grupos mixtos a

$$C_2C_1,\ C_4C_2,\ C_6C_3,\ D_2C_2,\ D_3C_3,\ D_4C_4,\ D_6C_6,\ D_4D_2,\ D_6D_3,\ S_4A_4.$$

(Por supuesto, $C_1 \times \{I\}$ no es sino $\{I\}$.)

Los 32 grupos se llaman *grupos punto cristalográficos* o *"clases de cristales"*. Todo cristal tiene por grupo de simetría a uno de ellos, y todo grupo, con la excepción de C_6C_3 se presenta en por lo menos un mineral conocido. En la notación más familiar de Schoenflies [véase, por ejemplo, Burckhardt I, pág. 71], los grupos son, respectivamente

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_6,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_6,\ T,\ O,$$
$$C_i,\ C_{2h},\ C_{3i},\ C_{4h},\ C_{6h},\ D_{2h},\ D_{3d},\ D_{4h},\ D_{6h},\ T_h,\ O_h,$$
$$C_s,\ S_4,\ C_{3h},\ C_{2v},\ C_{3v},\ C_{4v},\ C_{6v},\ D_{2d},\ D_{3h},\ T_d.$$

Señalaremos, para evitar confusiones, que nuestros C_4C_2 y S_4 ("S" significa "simétrico") son los símbolos de Schoenflies S_4 y O ("O" significa "octaedral"). Los 32 grupos se suelen dividir en siete *sistemas de cristales* de la manera siguiente:

Triclínicos:	C_1.	$\{I\}$.					
Monoclínicos:	C_2.	$C_2 \times \{I\}$.	C_2C_1.				
Ortorrómbicos:				D_2.	$D_2 \times \{I\}$.	D_2C_2.	
Romboedrales:	C_3.	$C_3 \times \{I\}$.		D_3.	$D_3 \times \{I\}$.	D_3C_3.	
Tetragonales:	C_4.	$C_4 \times \{I\}$.	C_4C_2.	D_4.	$D_4 \times \{I\}$.	D_4C_4.	D_4D_2.
Exagonales:	C_6.	$C_6 \times \{I\}$.	C_6C_3.	D_6.	$D_6 \times \{I\}$.	D_6C_6.	D_6D_3.
Cúbicos:	A_4.	$A_4 \times \{I\}$.		S_4.	$S_4 \times \{I\}$.	S_4A_4.	

La tabla I (en la página 461) contiene una lista completa de los 17 grupos discretos de las isometrías en dos dimensiones en las que intervienen dos traslaciones independientes. Los grupos análogos en tres dimensiones son los grupos discretos de isometrías en las que intervienen tres traslaciones independientes. La enumeración de estos *grupos espaciales* constituye el problema central de la cristalografía matemática. La lista completa contiene $65 + 165 = 230$ grupos.

Los primeros 65 están totalmente compuestos por isometrías *directas*. Aunque C. Jordan elaboró la lista de éstas en 1869 [véase Hilton I, pág.

258], se le suelen atribuir a L. Sohncke, que en 1879 señaló su aplicación a la cristalografía. El grupo más obvio es el de las traslaciones por sí solas. Los otros 64 contienen también rotaciones y desplazamientos de tornillo (torceduras); 22 de éstos se presentan en 11 pares enantiomórficos, donde unos constituyen imágenes especulares de los otros (uno con una torcedura dextrógira y el otro con el reflejo, que se da como una torcedura levógira). Esto explica el fenómeno de la actividad óptica [Sayers y Eustace 1, págs. 238–241, 248–252]. Desde el punto de vista de la geometría pura o de la teoría pura de grupos, sería más natural ignorar la distinción de sentido, de manera que los 65 se reduzcan a 54, y el total de los 230 a 219 [Burckhardt 1, pág. 161].

Los otros 165 grupos contienen no solamente isometrías directas, sino también *opuestas*: reflexiones, reflexiones rotatorias (o inversiones rotatorias) y reflexiones en deslizamiento. Las enumeraron Fedorov en Rusia (1890), Schoenflies en Alemania (1891) y Barlow en Inglaterra (1894); este trabajo constituye uno de los casos más impresionantes de descubrimientos independientes en lugares diferentes y por medio de métodos distintos. Fedorov, que obtuvo los 230 como 73 + 54 + 103 en lugar de 65 + 165, probablemente no sabía nada del trabajo preliminar de Jordan y Sohncke. Se puede asegurar con toda certeza que Schoenflies no sabía nada de la obra de Fedorov y que Barlow trabajó al margen de ambos.

EJERCICIO

Determínense los grupos de simetría de las figuras siguientes: (a) un paralelepípedo rectangular (por ejemplo, un ladrillo); (b) un romboedro; (c) un dodecaedro regular con un cubo inscrito (cuyos 8 vértices están entre los 20 vértices del dodecaedro).

15.7 EL KALEIDOSCOPIO POLIEDRAL

Al combinar tres reflexiones . . . el efecto resulta sumamente agradable.

Sir David Brewster (1781–1848)

[Brewster 1, pág. 93]

La tabla III (en la página 461) constituye una lista completa de los grupos finitos de isometrías. En la sección anterior, escogimos de la lista los grupos que satisfacen la restricción cristalográfica. Otra manera significativa de hacer la selección (que en parte sobrepasa la manera anterior) consiste en escoger los grupos generados por las reflexiones, a saber

$$D_nC_n\ (n \geqslant 1),\quad D_{2n}D_n\ (n \text{ impar}),\quad D_n \times \{\mathrm{I}\}\ (n \text{ par}),$$
$$S_4A_4,\quad S_4 \times \{\mathrm{I}\},\quad A_5 \times \{\mathrm{I}\}.$$

(¡Estamos de regreso en la geometría absoluta!)

D_1C_1 (las isometrías C_s de Schoenflies, que denotamos antes por C_2C_1) es el grupo de orden 2 al que genera una sola reflexión. D_2C_2 o D_2D_1 (para

Schoenflies C_{2v}) es el grupo de orden cuatro al que generan dos reflexiones ortogonales. Los demás grupos D_nC_n son los grupos de simetría de las pirámides *ene*gonales. Dicho de otra manera, estos son los grupos D_n de § 2.7 con una notación diferente. (Destinamos ahora el símbolo D_n para el grupo diedral de las *rotaciones*, que, por supuesto, es isomórfico con respecto a D_nC_n. Weyl [1, pág. 80] hace la distinción al denominar al grupo rotacional D'_n y al grupo mixto D'_nC_n.)

$D_2 \times \{I\}$ es un grupo de orden 8 (desde el punto de vista abstracto $(C_2 \times C_2 \times C_2)$ al que generan tres reflexiones ortogonales. Los demás grupos $D_{2n}D_n$ (n impar) y $D_n \times \{I\}$ (n par) son los grupos de simetría de los prismas *ene*gonales o de sus dos recíprocos, las dipirámides.

S_4A_4, el grupo de simetría del tetraedro regular, se deriva del grupo rotacional A por medio de una conjunción de reflexiones, como la reflexión en el plano $ABA'B'$ (figura 10.5*a*) que une la arista AB con el punto medio de la arista opuesta CD. (El producto de esta reflexión y la inversión central es el semigiro alrededor de la recta de unión de los puntos medios de las dos aristas opuestas CD', $C'D$ del cubo. Este semigiro, que intercambia los dos tetraedros recíprocos $ABCD$, $A'B'C'D'$, es una de las doce rotaciones en S_4 que no pertenecen al subgrupo A_4: ejemplifica así el significado especial que damos al símbolo "mixto" S_4A_4.) Puesto que los demás cuerpos platónicos tienen simetría central, sus grupos de simetría son simplemente $S_4 \times \{I\}$ y $A_5 \times \{I\}$.

Con el objeto de efectuar una demostración práctica en el espacio euclidiano, tómense los dos espejos unidos por bisagras de § 2.7 con una inclinación de $180°/n$, que demostraba el grupo D_nC_n. Al ponerlos verticalmente en otro espejo horizontal, obtenemos el grupo de simetría del prisma *ene*gonal, es decir, el producto directo de D_nC_n y el grupo de orden 2 al que genera la reflexión horizontal. Para observar los tres grupos restantes, retírese el tercer espejo y colóquense los dos primeros verticalmente en la mesa a un ángulo de 60°, como se hizo al exhibir D_3C_3. Sosténgase a continuación el tercer espejo en posición oblicua, donde la arista horizontal l ha de quedar sobre la mesa en ángulos rectos con respecto a uno de los espejos verticales y en contacto con la esquina delantera inferior del otro. Al aplicar una rotación gradual al tercer espejo alrededor de su arista l desde una posición casi horizontal (cosa que se logra al levantar la arista más cercana, que es la opuesta a l), observaremos en determinado momento dos caras de un tetraedro regular $\{3, 3\}$. Cada una de las caras se encuentra subdividida en seis triángulos rectángulos, uno de los que es, en realidad, la porción de mesa que queda descubierta. En una etapa posterior observaremos tres caras de un octaedro $\{3, 4\}$; posteriormente, cuatro caras de un icosaedro $\{3, 5\}$. Por último, cuando el espejo móvil está en posición vertical como los otros, se observa un número teóricamente infinito de caras del mosaico regular $\{3, 6\}$, subdividido como se ve en la figura 4.6*d*. Este dispositivo, que emplea espejos rectangulares ordinarios, es una versión simplificada del kaleidoscopio triedral de Möbius, en el que los tres espejos tienen el contorno de los sectores adecuados de un círculo [Coxeter 1, pág. 83].

Cuando las E aristas del cuerpo platónico general $\{p, q\}$ se proyectan desde su centro a una esfera concéntrica, se convierten en E arcos de los círculos máximos, y descomponen la superficie en F regiones que son "*pé*gonos esféricos". De esta manera, del poliedro se obtiene un "mosaico esférico" que se parece mucho al mosaico plano de § 4.6. El grupo de simetría de $\{p, q\}$ se deriva del grupo de simetría de una de las caras al añadir la reflexión en uno de los lados de esa cara. Tenemos, así, que lo

generan las reflexiones en los lados de un triángulo esférico cuyos ángulos miden π/p (en el centro de una cara), $\pi/2$ (en el punto medio de una arista) y π/q (en un vértice). Este triángulo esférico es una región fundamental del grupo, puesto que se ve transformado en regiones vecinas por medio de las tres reflexiones generatrices.

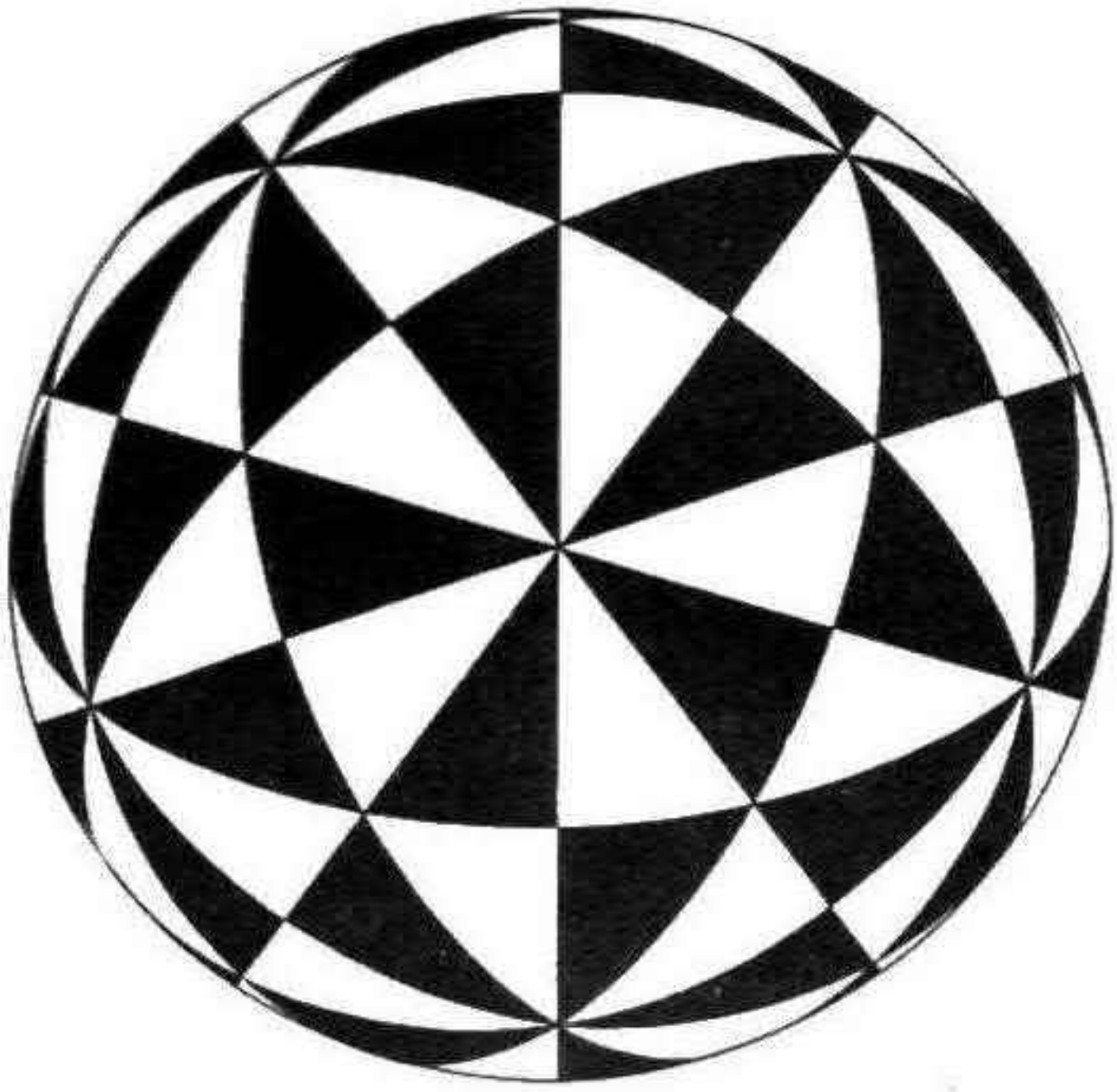


Figura 15.7a

La retícula que forman estos triángulos, que cubre la superficie de la esfera, es cortada por todos los planos de simetría del poliedro, a saber, los planos que unen el centro con las aristas tanto de $\{p, q\}$ como de su recíproco $\{q, p\}$. En la figura 15.7*a* (donde p y q son 3 y 5), se han ennegrecido alternadamente las regiones para exhibir tanto el grupo completo de simetría $A_5 \times \{I\}$ como el subgrupo rotacional A_5, que preserva la disposición de los colores.

En lugar de derivar la retícula de triángulos esféricos del poliedro regular, podemos proceder de la manera recíproca, y obtener el poliedro a partir de la retícula. Los diez triángulos que están hacia el centro de la figura 15.7*a* se combinan de manera evidente para formar la cara de un dodecaedro "inflado", y los seis triángulos que rodean un punto en el que los ángulos son de 60° se combinan para formar una de las caras del icosaedro inflado.

EJERCICIOS

1. Interprétese el símbolo $\{p, 2\}$ como un mosaico esférico ("diedro") en el que sus caras consisten en dos hemisferios, y el símbolo $\{2, p\}$ como otro en el que las caras consisten en p lúnulas.

2. ¿Cuántos planos de simetría tiene cada cuerpo platónico? Cuando p y q son mayores que 2, este número es siempre un múltiplo de 3, a saber, $3c$ en la notación del ejercicio 1 al final de § 10.4.

3. Si se divide 4π por el área de la región fundamental, se puede obtener una fórmula del orden del grupo de simetría de $\{p, q\}$. Una vez obtenida, hágase concordar el resultado con la fórmula que corresponde a E (el número de aristas) de 10.32.

15.8 GRUPOS DISCRETOS A LOS QUE GENERAN LAS INVERSIONES

En esta sección hacemos una digresión más en el espacio euclidiano con el fin de hablar de la inversión. (La teoría absoluta de la inversión presenta dificultades que nos llevarían demasiado lejos. [Véase Sommerville 1, Capítulo VIII.])

La figura 15.7*a*, que es una proyección ortogonal, representa a 10 de los 15 círculos mayores por elipses. (La difícil tarea de dibujo fue realizada por J. F. Petrie hacia 1932.) Una manera más fácil y tal vez más significativa de representar estas figuras consiste en la proyección estereográfica (§ 6.9), en la que los círculos mayores se conservan como círculos (o rectas) [Burnside 1, págs. 406–407]. El lector puede llevar esto a cabo por sí mismo con la ayuda de las instrucciones sencillas que daremos a continuación.

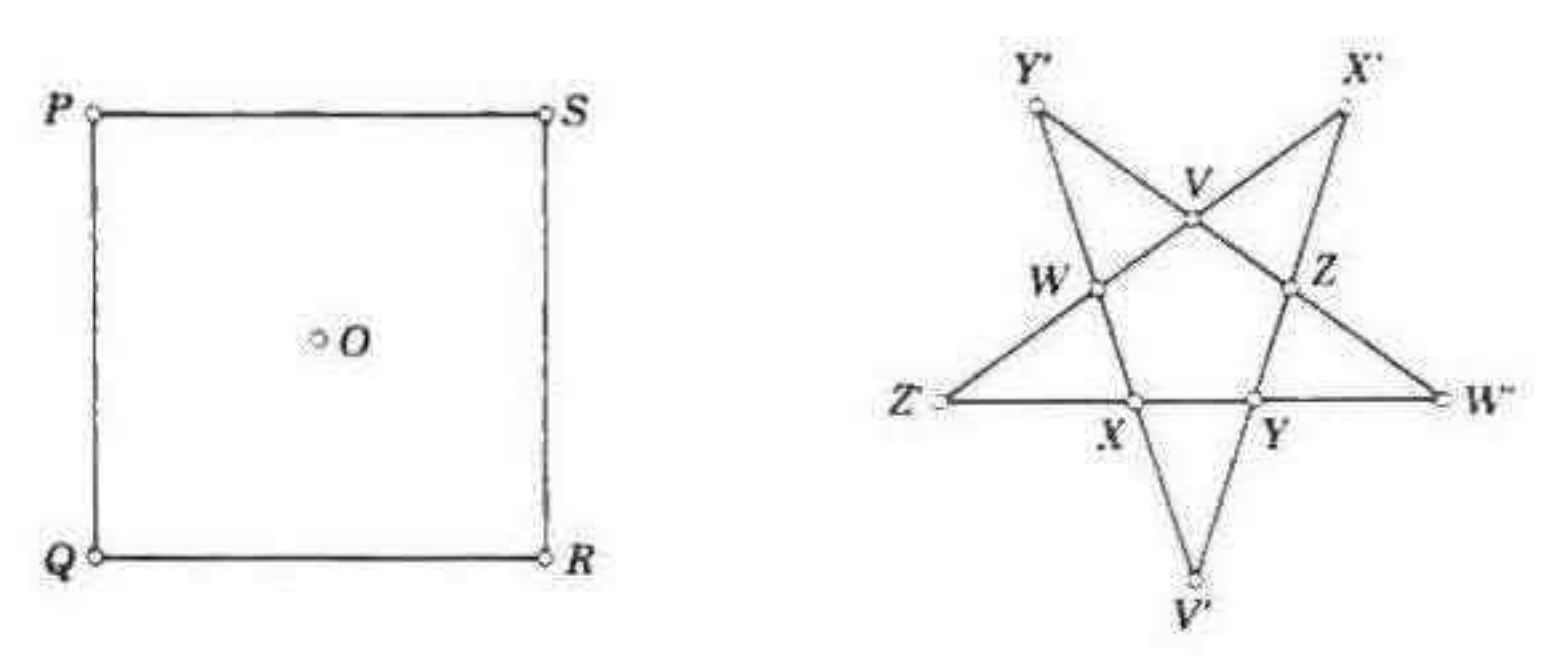


Figura 15.8a

La figura 15.8*a* nos muestra un cuadrado $PQRS$ de centro O, y un pentágono regular $VWXYZ$ al que se le han prolongado los lados para formar un pentagrama $V'X'Z'W'Y'$. Trácense cuatro circunferencias de radio PQ y centros en P, Q, R, S. Estas, además de dos rectas que pasen por O y sean paralelas a los lados del cuadrado, representan 6 círculos mayores, uno situado en cada uno de los seis planos de simetría del tetraedro $\{3, 3\}$, que son los planos que unen pares de aristas opuestas de un cubo. Al agregar la circunferencia circunscrita y las diagonales del cuadrado, tendremos en total 9 círculos mayores, cada uno de ellos situado en uno de los nueve planos de simetría del cubo $\{4, 3\}$, donde se incluyen 3 planos paralelos a sus caras.

Con radio VX' $(=VX)$ y centros en V, W, X, Y, Z trácense cinco circunferencias. Con radio VW' $(=V'W')$ y centros en V', W', X', Y', Z', trácense cinco circunferencias más. Estas diez circunferencias, junto con las cinco rectas VV', WW', XX', YY', ZZ', representan 15 círculos mayores (figura 15.7*a*), colocados uno en cada uno de los 15 planos de simetría del icosaedro $\{3, 5\}$ o del dodecaedro $\{5, 3\}$. (Estos planos unen los pares de aristas opuestas de cualquiera de los cuerpos.)

Como justificación de nuestras aseveraciones, basta con examinar los triángulos curvilíneos* y observar que cada uno tiene ángulos que miden π/p, π/q, $\pi/2$.

Puesto que la proyección estereográfica es una inversión (figura 6.9*a*) y puesto que una inversión transforma una reflexión en una inversión, las figuras que se construyen de esa manera son, de hecho, representaciones de los grupos abstractos S_4, $S_4 \times C_2$, y $A_5 \times C_2$ como generados por inversiones. En otras palabras, son configuraciones de círculos dispuestos de manera que la totalidad de la figura es simétrica por medio de la inversión en cada círculo. (Por supuesto, una recta cualquiera que se presente debe ser considerada como una circunferencia de radio infinito. Como hemos visto en § 6.5, la inversión en un "círculo" así no es más que la reflexión en la recta.) Cualquiera de las regiones en las que se descompone el plano servirá como región fundamental, y los generadores del grupo se pueden tomar como las inversiones en los lados.

Con respecto a un grupo generado por una sola inversión, podemos invertir el círculo de manera que su circunferencia se transforme en una recta y obtengamos el grupo D_1 de orden 2, generado por una sola reflexión (§ 2.5). Los grupos a los que generan las inversiones en dos círculos intersecantes son en esencia iguales que los grupos D_n de orden $2n$, a los que generan las reflexiones en dos rectas intersecantes (§ 2.7). Si los círculos de dos inversiones generatrices se tocan, se pueden invertir en rectas paralelas, y tenemos el caso límite D_∞ (figura 3.7*b*). Dos círculos no intersecantes se pueden invertir en círculos concéntricos. Las inversiones en ellos generan una sucesión infinita de círculos concéntricos cuyos radios están en progresión geométrica. Volvamos a tomar la actitud de abstraer para caracterizar al grupo como D_∞, pero en el centro tenemos un "punto de acumulación" (§ 7.6). También lo es el punto de contacto en el caso del grupo al que generan las inversiones en dos círculos que se tocan. Se dice que un grupo es *discreto* cuando carece de puntos de acumulación. Así, al describir grupos discretos a los que generan inversiones, conviene que insistamos en que para todos los círculos generadores, dos se cortan propiamente, y no se tocan.

Con respecto a un grupo discreto generado por tres inversiones, la región fundamental es un triángulo curvilíneo cuyos ángulos son submúltiplos de π como sucede con π/p_1, π/p_2, π/p_3. Por ejemplo, dos radios de un círculo, que forman un ángulo de π/p, determinan un sector que se puede considerar con un "triángulo" cuyos ángulos son π/p, $\pi/2$, $\pi/2$;

* En relación con el efecto que resulta al proyectar en una dirección diferente, véase Coxeter, *American Mathematical Monthly*, **45** (1938), págs. 523–525, figuras 4 y 5.

aquí tenemos una región fundamental del grupo $D_p \times D_1$ de orden $4p$, al que generan las reflexiones en el radio y la inversión en el círculo. En este caso,

15.81 $$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} > 1,$$

de manera que la suma de los ángulos del triángulo es mayor que π: esto constituye una consecuencia obvia del hecho de que el sector se haya derivado de un triángulo esférico (véase § 6.9) por medio de una proyección estereográfica, que preserva los ángulos. Toda solución de la desigualdad 15.81 (cf. 15.42) es un triángulo susceptible de ser trazado mediante los círculos mayores de una esfera. Así, volvemos a obtener los grupos de simetría

$$S_4, \quad S_4 \times C_2, \quad A_5 \times C_2$$

de los cuerpos platónicos.

Cuando $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 1$, de manera que la suma de los ángulos es precisamente π, tenemos los grupos "euclidianos" infinitos **p6m**, **p4m**, **p31m** (véase la tabla I y la figura 4.6*d*). Podríamos transformar todas las rectas en circunferencias por medio de una inversión arbitraria; pero en ese caso, puesto que el diseño se extiende indefinidamente, el centro de la inversión sería un punto de acumulación.

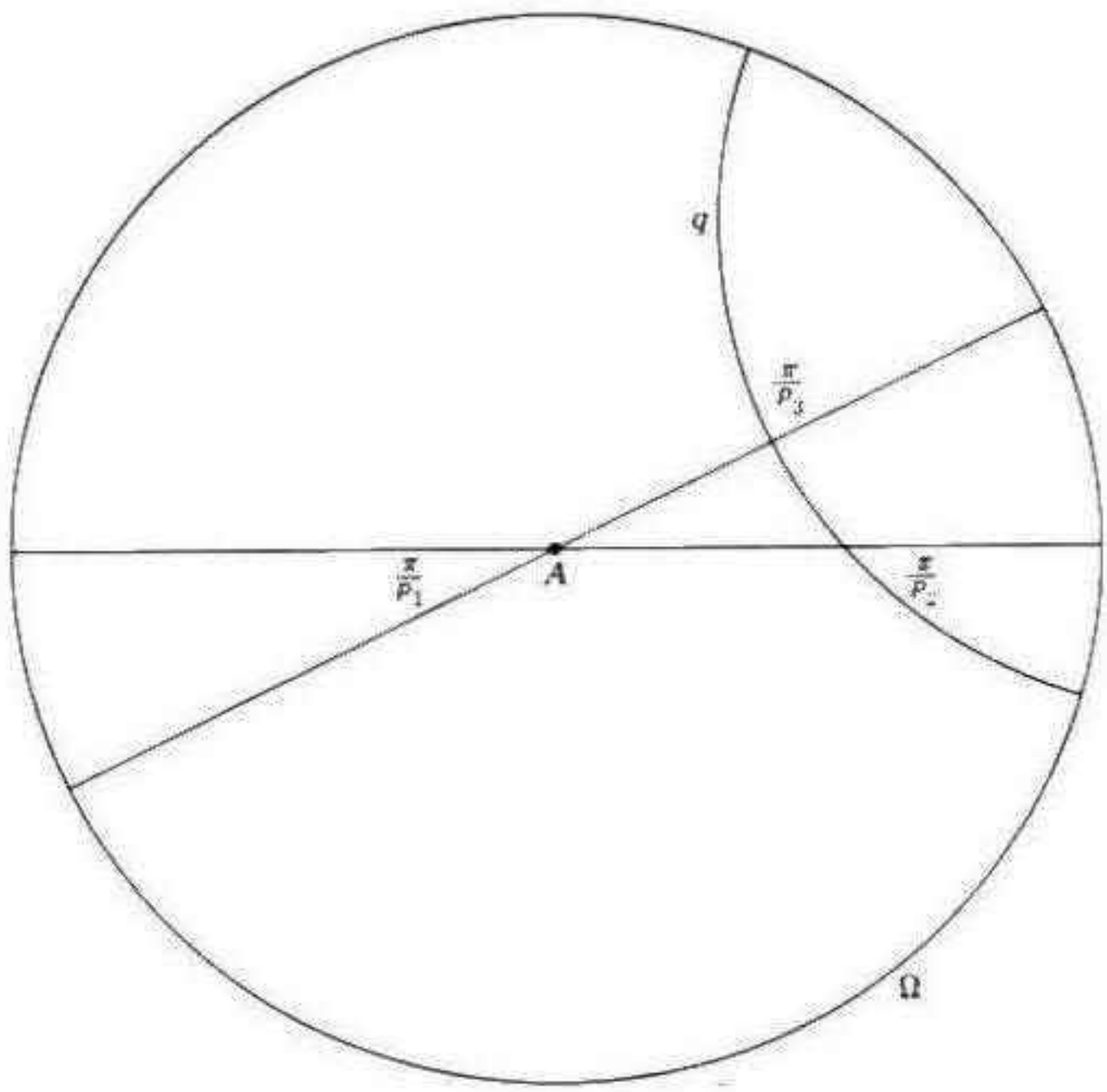


Figura 15.8b

Cuando $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 < 1$, de manera que la suma de los ángulos de la región fundamental es menor que π, todavía podemos tomar dos de los tres lados como rectas, pero tenemos que el punto de intersección A queda fuera de la circunferencia q a la que pertenece el tercer lado, con el resultado de que hay una circunferencia Ω ortogonal a los tres (figura 15.8*b*); las tangentes de A a q son radios de Ω.

Puesto que Ω es invariante con respecto a cada inversión generatriz, se conserva invariante con respecto a todo el grupo. La circunferencia q descompone el interior de Ω en dos regiones desiguales e invierte a cada una de estas regiones en la otra. Por lo tanto, el número de triángulos es igual en ambas regiones. Pero la región mayor incluye una réplica de la menor. En consecuencia, si nos valemos de la definición de Bolzano de conjunto infinito (a saber, el conjunto que tiene la misma potencia que un subconjunto propio), el número de triángulos es infinito; es decir, *el grupo es infinito.*

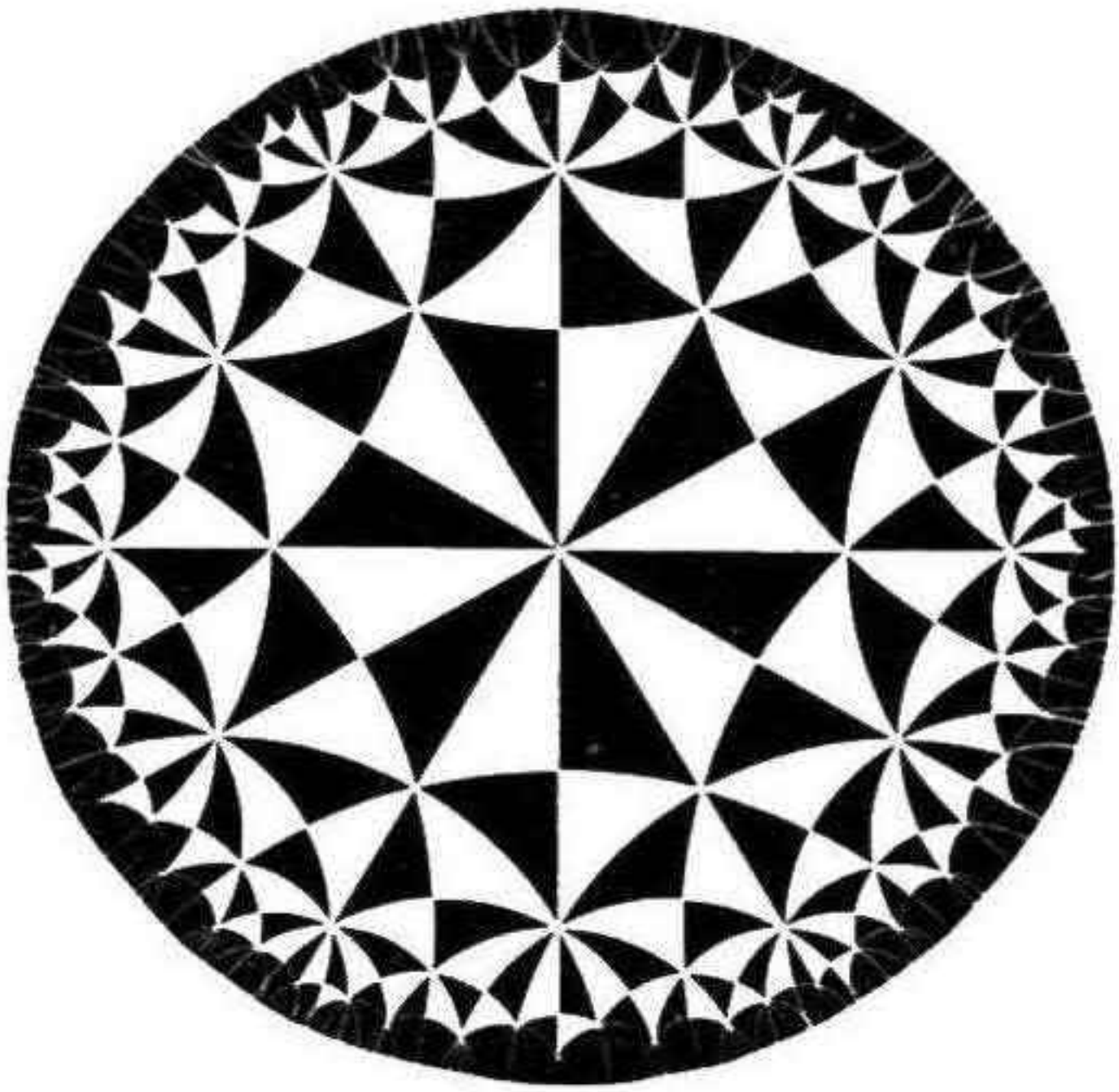


Figura 15.8c

En la figura 15.8*c* se puede ver el caso en el que p_1, p_2, p_3 son 6, 4, 2. No tenemos aquí un caso parecido al de la figura 15.7*a*, pues ésta no es una representación de un objeto sólido. Nuestra familiaridad con el espacio tridimensional nos permite aceptar la idea de que los triángulos de la figura 15.7*a* son todos del mismo tamaño, aunque la perspectiva tenga como efecto que los de la periferia se vean mucho más pequeños. En el caso de la figura 15.8*c*, los triángulos de la periferia tienen esencialmente la misma forma que los del centro (puesto que tienen ángulos iguales), pero ya no encontramos

fácil imaginar que sean, en algún sentido, del mismo *tamaño*. Al tratar de extender a este grado nuestra imaginación, damos el primer paso hacia la apreciación de la geometría hiperbólica, que es el tema de nuestro próximo capítulo.

El lector tal vez se pregunte el motivo de que consideremos dignos de estudio semejantes grupos, al observar que la circunferencia Ω contiene una inifinidad de puntos de acumulación. Sin embargo, al aceptar el punto de vista no euclidiano, de manera que los círculos e inversiones pasan a ser considerados como rectas y reflexiones, la distorsión subsecuente de la distancia coloca a Ω infinitamente lejos, de manera que desaparecen los puntos de acumulación.

EJERCICIOS

1. Si un sistema de círculos concéntricos se transforma en sí mismo por medio de la inversión en cada círculo, los radios están en progresión geométrica.

2. Si tres círculos forman un "triángulo" con ángulos que miden π/p_1, π/p_2, π/p_3, las inversiones R_1, R_2, R_3 en sus lados satisfacen las relaciones

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_2R_3)^{p_1} = (R_3R_1)^{p_2} = (R_1R_2)^{p_3} = 1.$$

Estas relaciones bastan para definir el grupo abstracto al que generan R_1, R_2, R_3 [Coxeter y Moser 1, págs. 37, 55].

3. A partir de un ángulo π/p_1 en el centro A de una circunferencia Ω de radio unitario, como en la figura 15.8*b*, encuéntrense expresiones (en términos de p_1 y p_2) para el radio de la circunferencia q y para la distancia desde A a su centro, en el caso en el que $p_3 = 2$.

4. Inviértase la figura 15.8*c* en un círculo cuyo centro está en Ω; es decir, reemplácese la circunferencia Ω por una recta, de manera que todos los círculos inversores tengan sus centros en ella. (Esta disposición proporciona las bases de una demostración alterna de que el grupo es infinito, pues si su orden es g, el semiplano infinito se llena de g triángulos curvilíneos, ¡cada uno con un área finita!

5. En la figura 15.8*c*, dos de los triángulos pequeños (uno blanco y el otro negro) que comparten la hipotenusa forman entre ambos una "cometa curvilínea" de tres ángulos rectos y un ángulo de 60°. Trácese una parte de la figura de manera que se vea una retícula de estas cometas, alternadamente blancas y negras. Tenemos ahora el caso de un grupo generado por cuatro inversiones. ¿Se puede tener que sean necesarias más de cuatro inversiones para generar un grupo discreto?

16

Geometría hiperbólica

La geometría absoluta no es *categórica*: se trata en realidad de dos geometrías en una. Para ser más precisos, diremos que deja a discusión la cuestión de la existencia de las rectas ultraparalelas (véase el final de § 15.2). En § 16.1, compararemos las dos respuestas posibles y daremos a la que nos es poco familiar la misma categoría que recibe la que conocemos. En § 16.2 justificaremos esto mediante una demostración de *consistencia relativa*. Y después, despojándonos por completo de escrúpulos, nos lanzaremos de todo corazón al "nuevo universo" que Bolyai ha "creado de la nada".

16.1 LOS AXIOMAS EUCLIDIANOS E HIPERBOLICOS DEL PARALELISMO

> *En el autor vive la convicción perfectamente purificada (que también espera de todo lector serio) de que por medio de la elucidación de este tema se está contribuyendo a la victoria real del conocimiento, de la educación de la inteligencia y, por lo tanto, al progreso de la fortuna del hombre de una de las maneras más importantes y espléndidas.*
>
> J. Bolyai (1802–1860)
>
> [Carslaw 1, pág. 31]

Mencionamos en § 12.6 la cuestión de que los dos rayos paralelos a una recta dada r desde un punto A exterior a ella sean o no sean colineales. Al aplicar una isometría adecuada, podemos ver que la respuesta es independiente de la posición de r.

También verdad, aunque menos obvio, es que, dada r, la respuesta no depende tampoco de la posición de A. Supongamos que, de ser posible, los

rayos paralelos a r desde otro punto A' forman un ángulo, como se puede ver en la figura 16.1*a*. Por la transitividad del paralelismo, tenemos que estos rayos desde A' son paralelos a q y también a la sucesión infinita de rectas paralelas que se derivan de q y r al aplicarles el grupo D_∞, al que generan las reflexiones en q y r (figura 3.7*b*). Obtenemos una consecuencia manifiestamente absurda al considerar cualquiera de estas rectas que se encuentra más allá de A' (es decir, en una posición tal que A' queda entre la recta considerada y r). (Desde el punto de vista estricto, este argumento se apoya en el axioma de Arquímedes, 13.31, que es consecuencia de 12.51.)

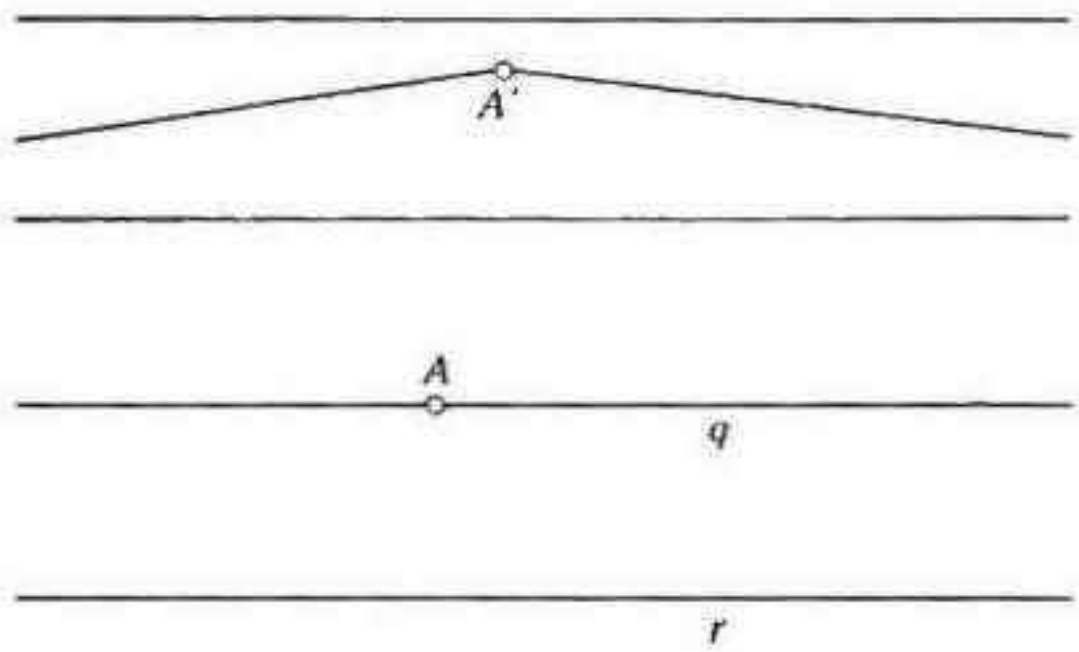


Figura 16.1a

Tenemos así una distinción muy clara entre dos clases de geometría, llamadas *euclidiana* e *hiperbólica*, que se derivan de la geometría absoluta al añadir solamente uno de los dos siguientes axiomas alternativos:

EL AXIOMA EUCLIDIANO. *Con respecto a un punto A y una recta r que no pase por A no hay más de una recta que pasa por A, en el plano Ar, que no corta a r.*

EL AXIOMA HIPERBOLICO. *Con respecto a un punto A y una recta r que no pase por A hay más de una recta que pasa por A, en el plano Ar, que no corta a r.*

EJERCICIO

Cada uno de estos axiomas implica la afirmación más fuerte que dice "un punto cualquiera A y una recta cualquiera r" en lugar de "algún punto A y alguna recta r". El axioma euclidiano, corregido de esta manera, es equivalente al célebre postulado V (nuestro 1.25). ¿Cómo se derrumba el postulado V al aceptar el axioma hiperbólico?

16.2 LA CUESTION DE LA CONSISTENCIA

> *¿Qué habremos de pensar de la pregunta: es verdadera la geometría euclidiana? Carece de sentido. Lo mismo haríamos al preguntar . . . si son verdaderas las coordenadas cartesianas y falsas las polares. Una geometría no puede ser más verdadera que otra; sólo más conveniente.*
>
> H. Poincaré (1854-1912)
>
> (*Science and Hypothesis*, Nueva York, 1952)

Observemos que los axiomas euclidiano e hiperbólico no difieren más que en una palabra: la palabra vital "no". No tiene sentido preguntar cuál de las geometrías es la *verdadera* y resulta imposible prácticamente decidir cuál proporciona una base más *conveniente* para describir el espacio astronómico. Desde el punto de vista de la matemática pura es más importante la cuestión de la *consistencia* lógica de ambos axiomas con respecto al resto de los axiomas de la geometría absoluta. Y esta pregunta también es difícil de responder, pues según el filósofo Gödel, no existe una demostración interna de consistencia con respecto a un sistema que incluya una infinidad de conjuntos. Habremos de conformarnos con una consistencia *relativa*: si está libre de contradicción la geometría euclidiana, también lo está la hiperbólica, y viceversa. La consistencia relativa se obtiene al encontrar en cada una de las geometrías un *modelo* de la otra.

Un modelo euclidiano del plano hiperbólico (que se debe a Poincaré) fue mencionado en § 15.8. Aquí interviene una circunferencia Ω, como se tiene en la figura 16.2*a*. Cada par de puntos inversos representa un punto hiperbólico, y cada circunferencia ortogonal a Ω representa una recta hiperbólica. Las dos paralelas a r desde A son simplemente las circunferencias que pasan por A y tocan r en sus puntos de intersección con Ω. (Estos puntos son los "extremos" de r.) Este modelo se llama *conforme* porque los ángulos conservan sus valores propios, aunque las distancias se distorsionan inevitablemente.

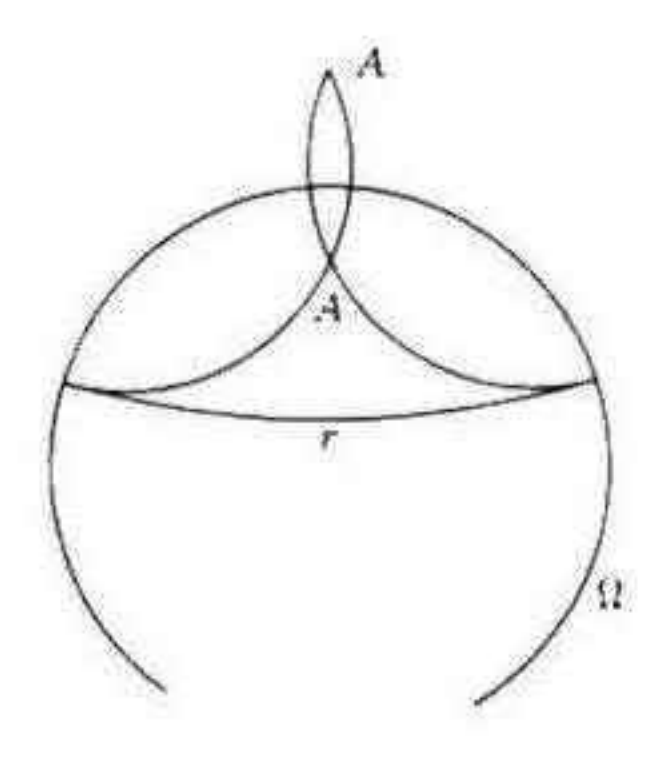


Figura 16.2a

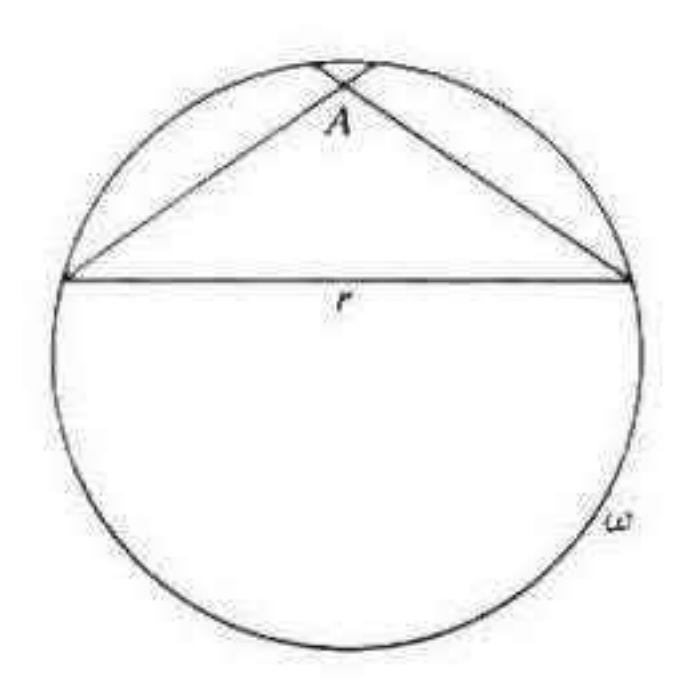


Figura 16.2b

Un modelo euclidiano diferente, que sugirió Beltrami (1835–1900), emplea otra circunferencia ω, como se tiene en la figura 16.2*b*. Todo punto dentro de ω representa un punto hiperbólico. Las dos paralelas a r desde A son las rectas que unen A con los extremos de la cuerda r. (Las cuerdas cuyas rectas se intersectan fuera de ω representan rectas ultraparalelas.) Este modelo se llama *proyectivo* porque en él las rectas se conservan como rectas. No se pierde nada al reemplazar la circunferencia ω en el plano euclidiano por una cónica en el plano proyectivo. De hecho, al proceder así hay una ganancia considerable, pues se puede extender el plano hiperbólico a un plano proyectivo por medio de entidades que se definen en la misma geometría hiperbólica [Coxeter 3, pág. 196]. De esta manera, podemos

demostrar que la geometría hiperbólica es única, o *categórica* [Borsuk y Szmielew **1**, pág. 345]; difiere, por lo tanto, de la geometría absoluta, que incluye dos posibilidades que se contradicen.

Al emplear modelos, es deseable manejar dos en lugar de uno, de manera que no se otorgue a ninguno una prominencia indebida. Nuestro razonamiento geométrico no debe depender sino de los axiomas. Los modelos han cumplido su finalidad de establecer la consistencia relativa [Pedoe **1**, pág. 61; Sommerville **1**, págs. 154–159] y a partir de aquí no son más importantes que los diagramas.

Klein [**4**, pág. 296] señaló la relación entre los modelos conforme y proyectivos de la manera que se puede ver en la figura 16.2*c*. Una esfera que

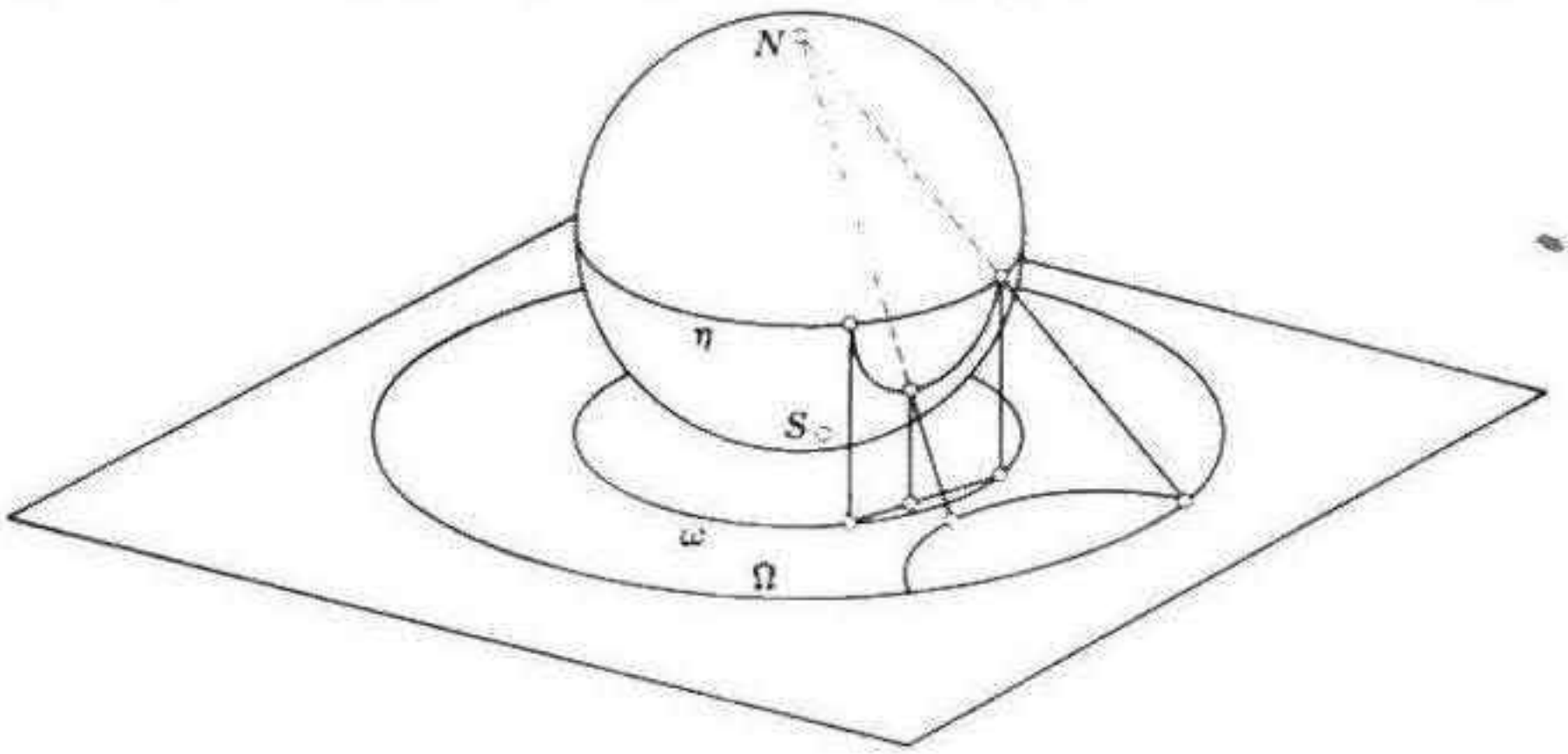


Figura 16.2c

tiene el mismo radio que ω toca el plano (horizontal) en S, que es el centro tanto de ω como de Ω. Comenzamos con el modelo proyectivo y nos valemos de la proyección ortogonal (vertical) para mapear ("enviar") a ω en el "ecuador" η de la esfera y cada punto interior en dos puntos: uno en el hemisferio sur y otro (que no se ha dibujado) en el hemisferio norte. De toda cuerda de ω se obtiene una circunferencia en el plano vertical, es decir, una circunferencia ortogonal a η. Mapeamos ahora la esfera en el plano por medio de una proyección estereográfica, de manera que η se proyecta hacia la circunferencia mayor Ω, concéntrica con respecto a ω. Debido a la naturaleza de la proyección estereográfica, que preserva los ángulos y los círculos, las circunferencias verticales quedan como circunferencias horizontales, ortogonales a Ω, y obtenemos el modelo conforme.

En lugar de la proyección estereográfica hacia el plano tangente en el "polo sur" de la esfera, S (es decir, la inversión con respecto a una esfera de radio NS), podríamos haber empleado la proyección estereográfica (desde el mismo "polo norte" N) en el plano ecuatorial (es decir, la inversión con respecto a una esfera que pasa por η) de manera que tanto ω como Ω coincidan con η [Coxeter **3**, pág. 260.]. El procedimiento de Klein se justifica por la propiedad de que ambos modelos concuerdan en la vecindad inmediata de S. Esto debe haberle parecido más importante que tener la concordancia "en el infinito".

Debemos recordar que los dos modelos pueden ser fuente de equívocos en un aspecto: nos dan la impresión de que el centro S debería tener un papel especial, mientras en el plano hiperbólico abstracto todos los puntos son iguales.

Con el fin de dar una visión completa, mencionaremos el problema que los habitantes de un mundo hiperbólico tendrían al tratar de visualizar el plano euclidiano. Una solución [Coxeter 3, págs. 197–198] consiste en que podrían representarse los puntos y rectas euclidianos por medio de las rectas y planos paralelos a un rayo determinado ¡en el espacio hiperbólico!

EJERCICIOS

1. La reflexión en una recta del plano hiperbólico aparece en el modelo conforme como una inversión con respecto a un círculo, y en el modelo proyectivo como una homología armónica. ¿Qué es la transformación correspondiente en el espacio de la esfera de Klein?

2. Las circunferencias se presentan en el modelo conforme como circunferencias (que no cortan a Ω), y por lo tanto, como circunferencias en la esfera (digamos que se encuentran en el hemisferio sur) y como elipses en el modelo proyectivo.

16.3 EL ANGULO DE PARALELISMO

. . . el cambio de mar hacia algo pleno y extraño

W. Shakespeare (1564–1616)

(The Tempest, 1er. acto, escena 2)

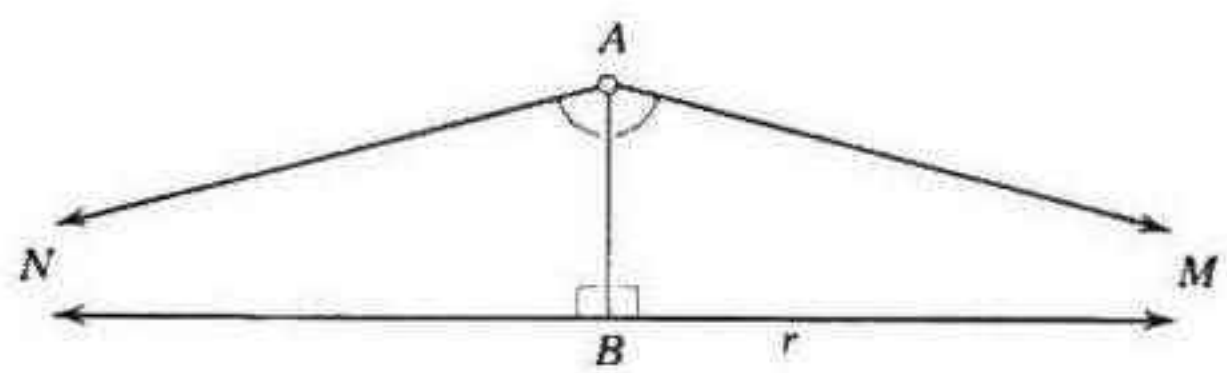


Figura 16.3a

En lo que queda de capítulo, la geometría será hiperbólica, es decir, supondremos el axioma hiperbólico que implica que, para un punto cualquiera A y una recta cualquiera r, que no pase por A, las dos paralelas forman un ángulo NAM, como tenemos en la figura 16.3*a*. Trácese la perpendicular AB de A a r. La reflexión en AB nos muestra que $\angle BAM$ y $\angle NAB$ son ángulos agudos iguales. De acuerdo con Lobachevsky, llamaremos a cualquiera de ellos *ángulo de paralelismo* que corresponde a la distancia AB, y escribimos

$$\angle BAM = \Pi(AB).$$

Antes de que demostremos que esta función es monótona, necesitaremos obtener unas cuantas propiedades adicionales de los triángulos asintóticos. Al demostrar 15.26, descubrimos que si una transversal (AD en la figura 15.2*f*)

corta a dos rectas de manera que los ángulos "alternos" sean iguales, las dos rectas son entonces ultraparalelas. En consecuencia [Carslaw 1, pág. 48]:

16.31 *En un triángulo asintótico EFM, el ángulo externo en E (o en F) es mayor que el ángulo interno en F (o en E).*

Dicho de otra manera, la suma de los ángulos de un triángulo asintótico es menor que π. Esto nos permite demostrar una especie de teorema recíproco del 15.25, con el efecto de que un triángulo asintótico queda determinado por sus dos ángulos positivos:

16.32 *Si dos triángulos asintóticos AEM, $A'E'M'$ tienen $A = A'$ y $E = E'$, entonces $AE = A'E'$.*

Demostración [Carslaw 1, pág. 50]. Si AE y $A'E'$ no son iguales, uno de ellos ha de ser mayor; sea este $A'E'$, como se tiene en la figura 16.3*b*. Tómese F

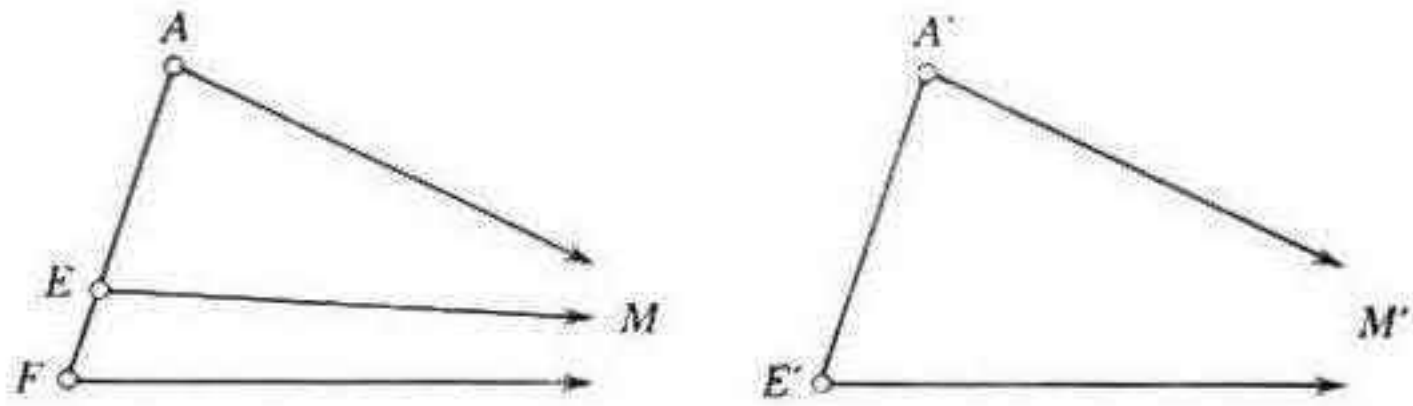


Figura 16.3b

en E/A, de manera que $AF = A'E'$, y trácese la paralela FM a AM. Por 16.31 y 15.25, tenemos

$$\angle MEA > \angle MFA = \angle M'E'A' = \angle MEA,$$

que es absurdo.

Estos resultados posibilitan que establezcamos la existencia de *la paralela común a dos rayos dados* que forman un ángulo NOM, es decir, una recta MN paralela a OM en un extremo y a ON en el otro. Desde los rayos que se dan, OM, ON, córtense dos segmentos iguales cualquiera OA, OA', como se ha hecho en la figura 16.3*c*. Trácese $A'M$, la paralela a OM, y la paralela AN a ON.

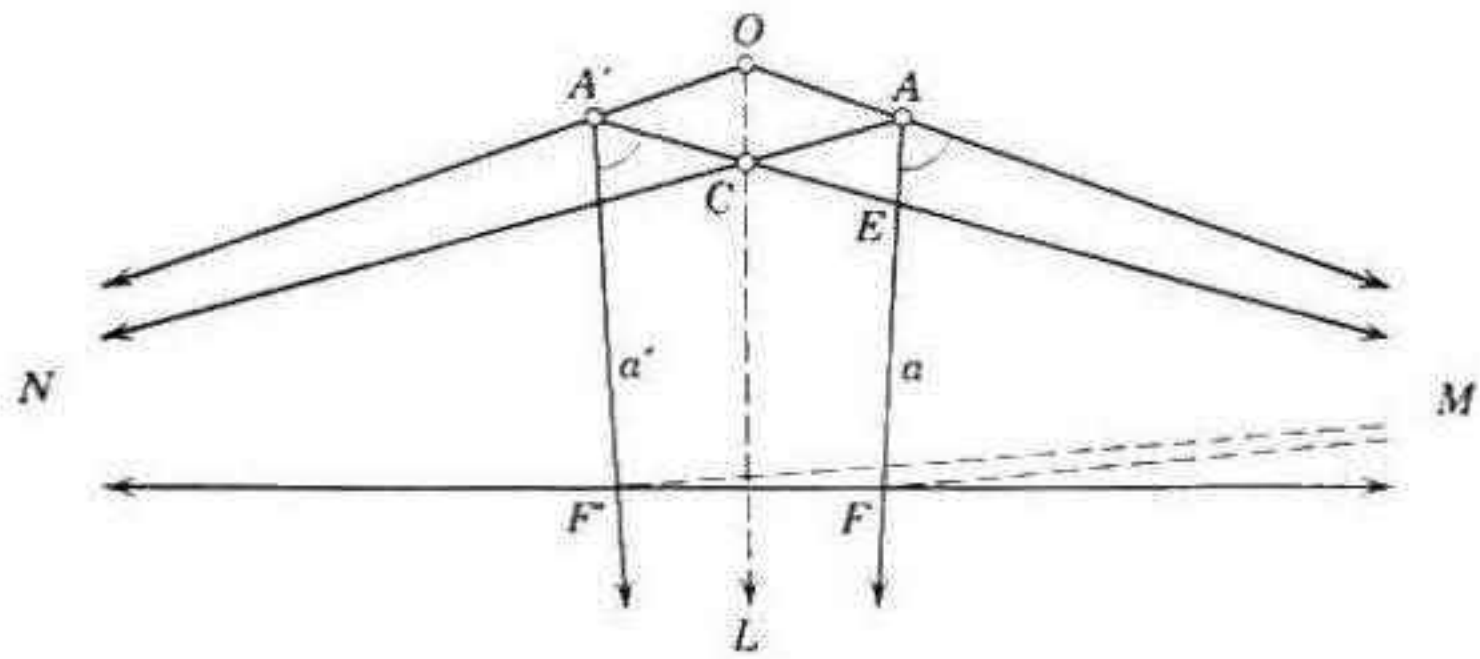


Figura 16.3c

Biséquense los ángulos NAM y $NA'M$ por medio de las rectas a y a'. Demostraremos que *estas rectas son ultraparalelas*, y que *la paralela común MN que se busca es perpendicular a ambas.*

Sea $A'M$ tal que corte a AN en C y a a en E. Puesto que toda la figura es simétrica por reflexión en OC, los dos ángulos con vértice en A y los dos ángulos con vértice en A' son iguales.

De ser ello posible, consideremos el punto común de a y a', L, que, por supuesto, equidista de A y A'. Al aplicar 15.25 a los triángulos asintóticos congruentes ALM y $A'LM$, deducimos que $\angle MLA = \angle MLA'$, que es absurdo.

De ser ello posible, sean paralelas a y a', con el extremo común L. Al aplicar 16.32 a los triángulos asintóticos congruentes AEM y $A'EL$, deducimos que $AE = A'E$, de donde E coincide con C, y esto también es absurdo.

En conclusión, a y a' son ultraparalelas. Por 15.26, tienen una perpendicular común FF'. Al aplicar 15.25 a los triángulos asintóticos congruentes AFM y $A'F'M$, concluimos que

$$\angle MFA = \angle MF'A'.$$

Si $F'F$ no fuera paralela a OM tendríamos un triángulo asintótico $FF'M$ en el que la suma de los ángulos es π, lo que contradice 16.31. En consecuencia, tenemos que, de hecho, $F'F$ es paralelo a OM, y de la misma manera, FF', es paralelo a ON; es decir, la recta FF' es una paralela común a los dos rayos, como se pretendía demostrar.

Además, esta paralela común es *única*, puesto que dos de ellas serían paralelas entre sí en ambos extremos, lo que contradice la "clara distinción" entre las propiedades euclidianas del paralelismo y las hiperbólicas (figura 16.1*a*). De aquí se desprende que

16.33 *Dos rectas ultraparalelas cualesquiera tienen una perpendicular común única.*

Tenemos que, dadas a y a', podemos reconstruir la figura 16.3*c* de la manera siguiente: trácese una perpendicular común cualquiera FF', tómese O en su mediatriz y sean las dos paralelas a la recta FF' que pasan por O tales que corten a a en A y a a' en A'.

Para no extendernos demasiado, nos hemos conformado con afirmar la *existencia* de una recta que pasa por un punto dado y es paralela a un rayo dado. Pero Bolyai y Hilbert han dado respectivamente construcciones con "regla y compás" de estas rectas [véase Coxeter **3**, págs. 204, 191]. Parece ser que Hilbert no advirtió que su construcción de la paralela común a AM y $A'N$ conserva su validez cuando las rectas se cortan en un punto que no equidista de A y A', o incluso cuando no se intersectan en absoluto. De hecho [Carslaw **1**, pág. 76],

16.34 *Dos rayos no paralelos cualesquiera tienen una paralela común única.*

Y este resultado justifica el empleo que hacemos de los *extremos* como si fueran puntos ordinarios: dos extremos cualquiera, M y N, determinan una recta única MN.

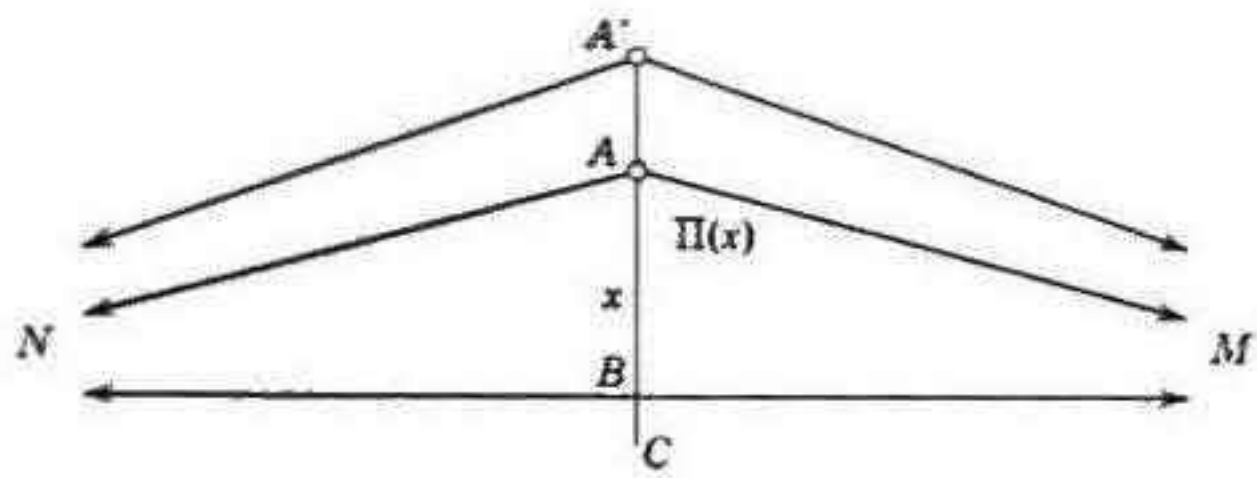


Figura 16.3d

La recta que pasa por A y es paralela a BM (figura 16.3*a* o *d*) determina el ángulo de paralelismo $\Pi(AB)$. Recíprocamente, podemos encontrar una distancia x cuyo ángulo de paralelismo $\Pi(x)$ sea igual a cualquier ángulo agudo dado [Carslaw **1**, pág. 77]. Dicho con otras palabras, dado un ángulo agudo *CAM, podemos encontrar una recta BM que sea simultáneamente perpendicular a AC y paralela a AM.* No tenemos más que reflejar AM en AC, de manera que obtengamos AN, y trazar a continuación la paralela común MN, que corta a AC en el punto que se busca, B. Diremos de paso que, como podemos trazar por cualquier punto un rayo paralelo a otro dado, tenemos en consecuencia que

16.35 *Podemos encontrar, con respecto a dos rectas no perpendiculares, una recta que sea perpendicular a una y paralela a la otra.*

Si A' está en el rayo A/B, de manera que $A'B > AB$ (como se tiene en la figura 16.3*d*), entonces

$$\Pi(A'B) < \Pi(AB).$$

(Esto es simplemente 16.31 aplicado al triángulo asintótico $AA'M$.) De aquí se desprende que la función $\Pi(x)$ decrece continuamente de $\frac{1}{2}\pi$ a 0 cuando x se incrementa de 0 a ∞.

Con naturalidad, decimos que AMN es un triángulo doblemente asintótico [Coxeter **3**, pág. 188]. Hemos visto que un triángulo como ése queda determinado por un ángulo positivo; en otras palabras,

16.36 *Dos triángulos doblemente asintóticos son congruentes cuando sus ángulos son iguales.*

Al aplicar 16.34 a los rayos que pertenecen a dos paralelas LM, LN, obtenemos una tercera recta paralela a ambas, de manera que se forma un *triángulo triplemente asintótico LMN*. Al considerar el comentario de Bolyai 15.24, podemos decir que este triángulo es un triángulo doblemente asintótico de ángulo cero. Por lo tanto, no nos sorprenderá descubrir que

16.37 *Dos triángulos triplemente asintóticos son congruentes.*

Demostración (que se debe a D. W. Crowe). Dados dos triángulos triplemente asintóticos, divídase cada uno de ellos en dos triángulos rectángulos y doblemente asintóticos al trazar una altura (paralela a uno de los lados y perpendicular al otro, como en 16.35). Por 16.36, los cuatro triángulos doblemente asintóticos son iguales. Por lo tanto, los dos triángulos triplemente asintóticos han de ser congruentes.

EJERCICIOS

1. Trácense las figuras que corresponden a los teoremas 16.33–16.35 en términos de los modelos conforme y proyectivos.

2. Si un cuadrángulo $ABED$ tiene ángulos rectos en D y en E mientras $AD = BE$, entonces los ángulos en A y B son ángulos agudos iguales. (*Indicación*: Trácense AM y BM, rectas paralelas a D/E: aplíquese 16.31 al triángulo asintótico ABM.)

3. La suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es menor que dos ángulos rectos. (*Indicación*: En un triángulo dado ABC trácense las perpendiculares AD, BE, CF a la recta que une los puntos medios de BC y CA.)

4. A partir de un triángulo asintótico ABM, con ángulos agudos en A y B, trácese la perpendicular AD a BM, y la perpendicular BE a AM, que se cortan en H. Trácese la perpendicular a AB, que será HF. Entonces FH es paralela a AM [Bonola 1, pág. 106]. ¿Qué sucede cuando tratamos de la misma manera con rayos que pasan por A y B que no son paralelos sino ultraparalelos?

5. Si dos triángulos triplemente asintóticos tienen un lado común, ¿qué isometría los relaciona? (Es evidente que dos triángulos triplemente asintóticos pueden tener un lado común sin tener la misma altura.)

6. El inradio de un triángulo triplemente asintótico es la distancia con respecto a la que el ángulo de paralelismo es de 60°.

7. Desde un punto cualquiera en uno de los lados de un triángulo triplemente asintótico, las rectas perpendiculares a los otros dos lados son perpendiculares entre sí [Bachmann 1, pág. 222].

16.4 LA FINITUD DE LOS TRIANGULOS

Encerrado en una cáscara de nuez ser rey del espacio infinito.

W. Shakespeare

(*Hamlet*, 2o. acto, escena 2)

Uno de los pasajes más elegantes de la literatura acerca de la geometría hiperbólica desde los tiempos de Lobachevsky, es la demostración de Liebmann [1, pág. 43] de que el área de un triángulo permanece finita cuando todos sus lados son infinitos. C. L. Dodgson (*alias* Lewis Carroll) no podía aceptar este teorema y, en consecuencia, consideraba que toda la geometría no euclidiana carecía de sentido.

En lugar de plantear la discusión filosófica acerca del sentido del *área* [Carslaw 1, págs. 84–90], nos conformaremos con considerarla una función numérica definida para todo polígono cerrado simple, que permanece invariante al aplicar isometrías y que resulta aditiva al yuxtaponer dos polígonos.

Sea ABM un triángulo asintótico cualquiera. Cuando lo reflejamos en la bisectriz AF del ángulo A obtenemos AA_1N, como se ve en la figura 16.4*a*, donde F es el punto donde la bisectriz encuentra a la paralela común MN. Al reflejar la recta BM en la bisectriz A_1F_1 de $\angle NA_1M$ obtendremos A_2N (donde A_2 está en AM), y, entonces, reflejémosla en AF. Al proseguir de esta manera, construimos una retícula de triángulos, tales que sus lados "verticales" bisecan los ángulos con vértices en B, A, A_1, A_2, A_3, . . . y son perpendiculares a MN en G, F, F_1, F_2, F_3, . . . Estos puntos están situados a espacios iguales a lo largo de MN, puesto que todos se han derivado de F y

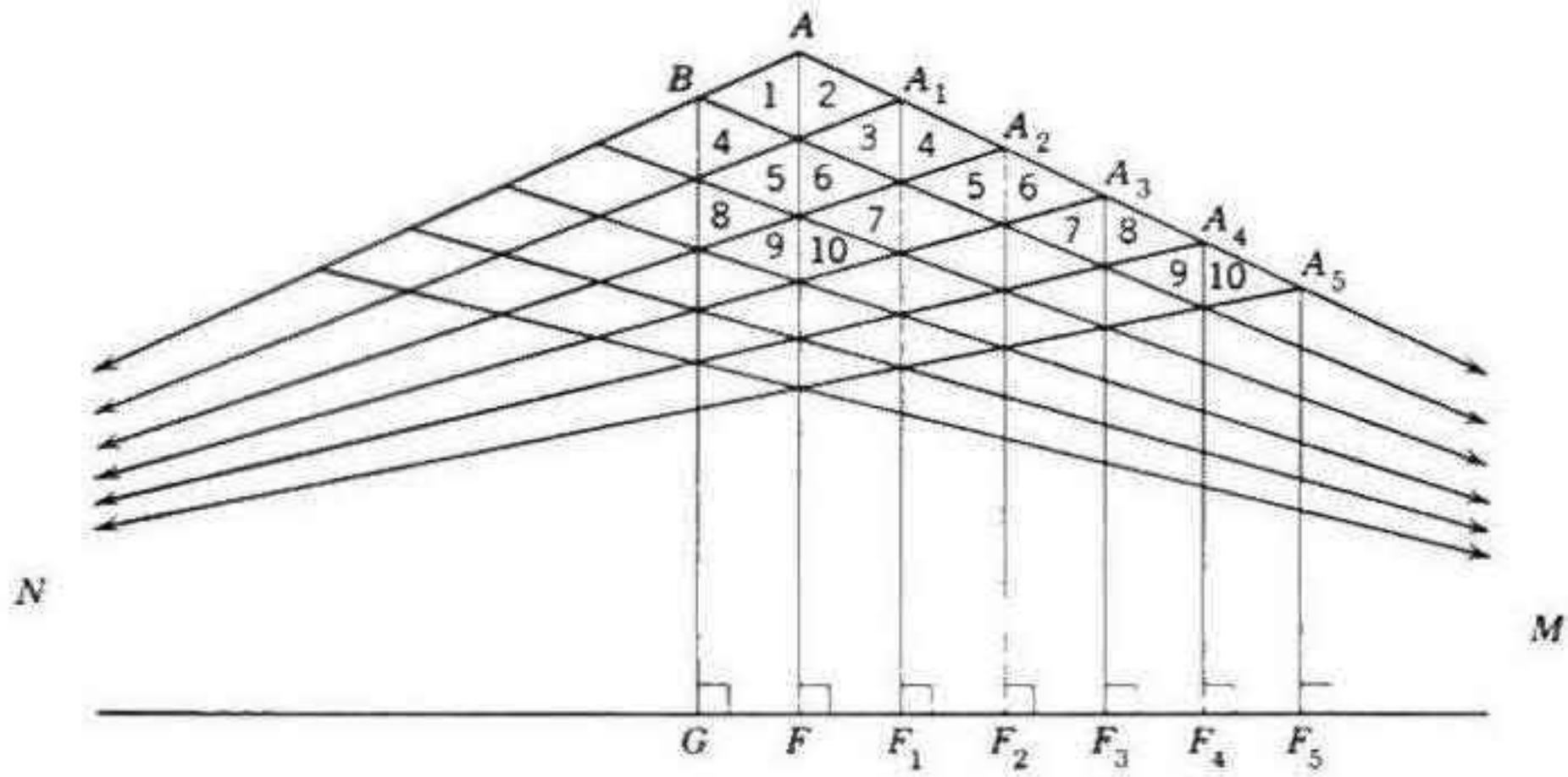


Figura 16.4a

F_1 por medio del grupo D_∞, al que generan las reflexiones en AF y A_1F_1; por ejemplo, G es la imagen de F_1 en el espejo AF. Los triángulos numerados que se ajustan para llenar el triángulo asintótico ABM son respectivamente congruentes a los que se ajustan dentro del pentágono finito $ABGF_1A_1$; de hecho, dos triángulos cualquiera con el mismo número se relacionan por una potencia de la traslación de G a F_1 (o de F a F_2). En consecuencia, el área del triángulo asintótico es menor o igual que el área del pentágono:

16.41 *Un triángulo asintótico cualquiera tiene área finita.*

Puesto que se puede dividir cualquier triángulo doblemente asintótico (figura 16.3*a*) en dos triángulos asintóticos, tenemos que

16.42 *Un triángulo doblemente asintótico cualquiera tiene área finita.*

Por 16.36, el área de un triángulo doblemente asintótico está en función de su ángulo. Al comparar los triángulos AMN y $A'MN$ de la figura 16.3*d*, vemos que esta función es *decreciente*: a mayor triángulo, menor ángulo.

Puesto que se puede dividir cualquier triángulo triplemente asintótico en dos triángulos doblemente asintóticos (como se hizo al demostrar 16.37), 16.42 implica que

16.43 *Un triángulo triplemente asintótico cualquiera tiene área finita.*

Por 16.37, sabemos que el área es constante y no depende más que de la unidad de medida que elijamos.

16.5 EL AREA Y EL DEFECTO ANGULAR

> *Gauss . . . llegó a reconocer la existencia de una geometría no euclidiana de lógica firme no por intuición o gracias a un relámpago de genio . . . al contrario, había pasado muchas horas trabajando en el problema antes de sobreponerse al prejuicio que se hereda contra ella. No permitió que ningún rumor acerca de sus opiniones se extendiera, pues estaba seguro de no ser comprendido. Solamente reveló a ciertos amigos de confianza una parte de su trabajo.*
>
> R. Bonola [1, págs. 66–67]

János Bolyai, o Bolyai János (como se escribe en húngaro), anunció el descubrimiento de la geometría absoluta en un apéndice de un libro escrito por su padre, Bolyai Farkas, amigo de Gauss. Cuando Gauss vio el libro y leyó el apéndice, escribió una carta notable a su viejo amigo, en la que felicitaba a János y admitía que él mismo había llevado su pensamiento por esos caminos, aunque sin publicar los resultados. La carta original (fechada el 6 de marzo de 1832) se ha perdido, pero la copia de Bolyai hijo se conserva, y se publicó en las obras completas de Gauss [Gauss 1, vol. 8, págs. 220–225].

En esta carta hay una demostración maravillosa de que el área del triángulo ABC es proporcional al *defecto angular*

$$\pi - A - B - C:$$

la cantidad por la cual esta suma angular no llega a los dos ángulos rectos. La paráfrasis que hacemos a continuación cubre algunos huecos de la argumentación mientras conserva la división sistemática de Gauss en siete pasos, que se han numerado con números romanos.

I. *Todos los triángulos triplemente asintóticos son congruentes.* (Nuestro 16.37.)

II. *El área de un triángulo triplemente asintótico tiene un valor finito: llamémosle t.* (Este es nuestro 16.43.)

III. *El área de un triángulo doblemente asintótico AMN está en función de su ángulo, NAM: llamémosla $f(\phi)$, donde ϕ es el suplemento del ángulo en cuestión.* A partir del ángulo ϕ, podemos construir el triángulo de manera

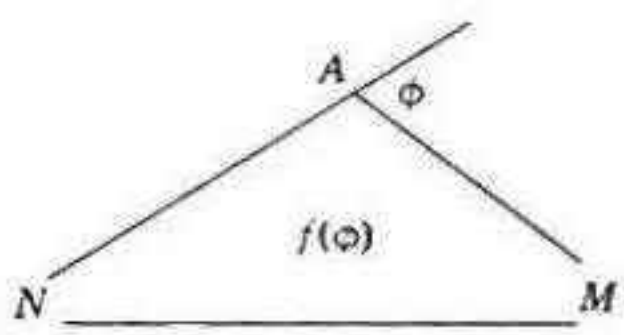


Figura 16.5a

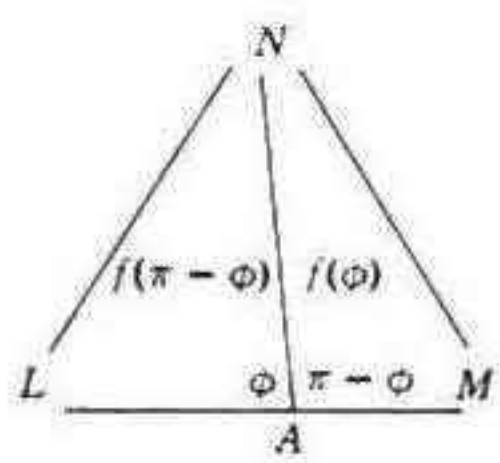


Figura 16.5b

única (figura 16.5*a*; cf. 16.3*c*). Gauss prefería usar el suplemento, en lugar del ángulo NAM, para asegurarse de que $f(\phi)$ es una función *creciente* de ϕ. (Véase el comentario que se hace después de 16.42.)

IV. $f(\phi) + f(\pi - \phi) = t$.

Esto puede verse al ajustar dos triángulos doblemente asintóticos AMN y ANL con ángulos suplementarios, como se ve en la figura 16.5*b*. Se entiende aquí que $0 < \phi < \pi$. Pero cuando ϕ se aproxima a cero, el triángulo doblemente asintótico se derrumba, y cuando ϕ se aproxima a π tiende a convertirse en un triángulo triplemente asintótico. En consecuencia,

16.51 $$f(0) = 0, \qquad f(\pi) = t,$$

y IV tiene validez cuando $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$.

V. $f(\phi) + f(\psi) + f(\pi - \phi - \psi) = t$.

Esto, junto con $\phi > 0$, $\psi > 0$, $\phi + \psi < \pi$ se puede ver al colocar juntos tres triángulos doblemente asintóticos cuyos ángulos sumen 2π, como se ha hecho en la figura 16.5*c*. Esto conserva su validez cuando ϕ o ψ son cero o cuando $\phi + \psi = \pi$.

VI. $f(\phi) + f(\psi) = f(\phi + \psi)$.

Esto, junto con $\phi \geqslant 0$, $\psi \geqslant 0$, $\phi + \psi \leqslant \pi$, se obtiene algebraicamente al escribir $\phi + \psi$ en lugar de ϕ en IV y al emplear V a continuación. De aquí se desprende que $f(\phi)$ es simplemente un múltiplo de ϕ, a saber

16.52 $$f(\phi) = \mu\phi$$

donde, por 16.51, $\mu = t/\pi$.

J. H. Lindsay señaló que esta deducción se puede hacer sin necesidad de suponer que la función es continua. Por VI y al igualar $\phi = \psi$,

$$f(\phi) = \tfrac{1}{2} f(2\phi).$$

Tenemos, así, que 16.52 conserva su validez cuando $\phi = \frac{1}{2}\pi$, también cuando $\phi = \frac{1}{4}\pi$, y así sucesivamente; lo que significa que es válido cuando dividimos π por una potencia cualquiera de 2 para obtener ϕ. Acudamos otra vez a VI para deducir que $f(\phi) = \mu\phi$ siempre que $\phi = n\pi$, donde n es un número que termina al expresarlo como "decimal" en la escala de 2 [cf. Coxeter 3, pág. 102]. Para abreviar, lo llamaremos número *binario*.

Supongamos que, de ser posible, existe un valor particular de ϕ, tal que $f(\phi) \neq \mu\phi$. Tómese un número binario n entre los dos reales distintos ϕ/π y $f(\phi)/\mu\pi$. Si $f(\phi) > \mu\phi$, de manera que

$$\phi < n\pi < \frac{f(\phi)}{\mu},$$

tenemos que, puesto que $f(\phi)$ es una función creciente,

$$f(\phi) < f(n\pi) = \mu n\pi < f(\phi),$$

que es absurdo. Si, por otra parte, $f(\phi) < \mu\phi$, al invertir el sentido de todas las desigualdades llegaremos a otro resultado absurdo. En consecuencia, $f(\phi) = \mu\phi$ para todo valor de ϕ (de 0 a π).

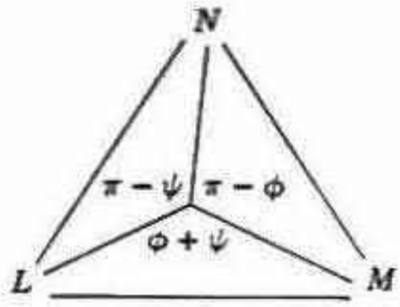


Figura 16.5c

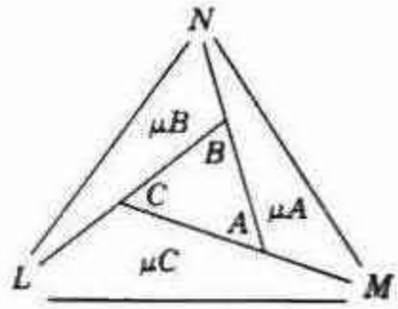


Figura 16.5d

VII. *El área* Δ *de un triángulo cualquiera ABC (de lados finitos) es un múltiplo constante de su defecto angular:*

$$\Delta = \mu(\pi - A - B - C).$$

En este paso final, Gauss exhibía ABC como una parte de un triángulo triplemente asintótico al prolongar sus lados en orden cíclico, como se ha hecho en la figura 16.5*d*. Las demás partes son triángulos doblemente asintóticos cuyas áreas son μA, μB, μC. En consecuencia,

$$\Delta + \mu A + \mu B + \mu C = t = \mu\pi,$$

y en seguida se llega a la fórmula que se quiere encontrar.

Podemos seguir a Lobachevsky al emplear una unidad de medida* tal que el área de un triángulo triplemente asintótico sea π. Entonces, $\mu = 1$, y la fórmula no es sino

16.53 $$\Delta = \pi - A - B - C.$$

Esto nos recuerda de manera impresionante la fórmula 6.92, que nos dice que el área de un triángulo esférico que se traza en una esfera de radio R es

$$(A + B + C - \pi)R^2.$$

Encontramos que, al dar a R^2 el valor de -1, encontramos que el resultado de Gauss concuerda formalmente con el área del triángulo que se traza en una esfera de radio i. J. H. Lambert (1728–1777) sugirió, mucho antes de la época de Gauss, que de existir el plano no euclidiano, habría de parecerse a la esfera de radio i. Por medio de esta analogía, pudo derivar fórmulas de trigonometría hiperbólica (que Lobachevsky desarrolló rigurosamente más tarde) a partir de las fórmulas clásicas de la trigonometría esférica. Su plena significación no se reveló hasta que Minkovski (1864–1909) descubrió la geometría del espacio–tiempo, que constituyó la base geométrica de la teoría restringida de la relatividad de Einstein. Sabemos ahora que en un espacio tiempo de dimensiones $(2 + 1)$, el plano hiperbólico se puede representar sin distorsión en cualquier hoja de una *esfera de radio espacialoide*. En el espacio afín subyacente, esta clase de esfera es un hiperboloide de dos hojas.†

* Coxeter, Hyperbolic triangles, *Scripta Mathematica*, **22** (1956), pág. 9.

† Coxeter, A geometrical background for de Sitter's world, *American Mathematical Monthly*, **50** (1943), pág. 220.

EJERCICIOS

1. La fórmula de Gauss 16.53 conserva su validez cuando el triángulo tiene uno o más ángulos de cero.

2. El área de un *pégono* simple cualquiera es igual a su defecto angular: la cantidad por la que la suma de sus ángulos no llega a ser la del *pégono* del plano euclidiano (*Indicación*: Divídase el polígono en triángulos. Por supuesto, suponemos ahora que $\mu = 1$.) En la figura 16.4*a*, el área de ABM es igual a la de $ABGF_1A_1$.

3. El producto de tres traslaciones a lo largo de los lados dirigidos de un triángulo (que recorren las longitudes de los mismos lados) es la rotación que recorre el defecto angular del triángulo. (Estas traslaciones tienen la mitad de la longitud de las del teorema de Donkin 15.31.) [Lamb 1, pág. 7].

4. El producto de los semigiros alrededor de los puntos medios de los lados de un cuadrángulo simple (en el orden natural) es la rotación que recorre el defecto angular del cuadrángulo.

5. Un polígono cualquiera en el que la suma angular es un submúltiplo de 2π se puede repetir, por medio de semigiros alrededor de los puntos medios de sus lados, hasta cubrir todo el plano sin dejar intersticios [cf. Sommerville 1, pág. 86, ejercicio 15]. (*Indicación*: Véanse las figuras 4.2*b* y *c*.)

16.6 CIRCULOS, HOROCICLOS Y CURVAS EQUIDISTANTES

> *El* círculo *es la* trayectoria ortogonal *de un haz de rectas con un vértice real. . . . El* horociclo *es la trayectoria ortogonal de* un haz de paralelas. . . . *La trayectoria ortogonal de un haz de rectas con un vértice real se llama curva equidistante.*
>
> D. M. Y. Sommerville (1879–1934)
> [Sommerville 1, págs. 51-52]

Tenemos que, por 15.26, dos rectas cualquiera distintas o bien se cortan, o bien son paralelas, o bien son ultraparalelas. En otras palabras, pertenecen a un *haz* de rectas que puede ser de una de tres clases: un haz ordinario, que consiste en todas las rectas que pasan por un mismo punto, un haz de paralelas, compuesto por todas las rectas que son paralelas a un rayo dado, o un *haz de ultraparalelas*, en el que están todas las rectas perpendiculares a otra dada. Por 15.32, sabemos que el producto de las reflexiones en las dos rectas es una rotación, un desplazamiento paralelo o una traslación, respectivamente. Al mantener fija una de las rectas y permitir que otra varíe en el haz, vemos que cada una de estas tres isometrías se puede aplicar como movimiento continuo.

Se puede definir un círculo con centro en O de la manera que se hizo en § 15.1 o como el lugar geométrico de un punto P que se deriva de otro fijo, Q, distinto de O, por medio de la rotación continua alrededor de O, o como el lugar geométrico de la imagen de Q por reflexión en todas las rectas que pasan por O. Cuando el radio OQ se vuelve infinito, tenemos un *horociclo* cuyo centro está en M (en el infinito): es el lugar geométrico de un punto que se deriva de otro fijo Q por medio de un desplazamiento paralelo continuo, o el lugar geométrico de la imagen de Q por reflexión en todas las rectas paralelas al rayo QM [Coxeter 3, pág. 213].

Los rayos paralelos a QM se llaman *diámetros* del horociclo. La primera "o" de la palabra "horociclo" se pronuncia como la de "horror".*

El lugar geométrico de un punto a una distancia constante de una recta fija o no es, como tendríamos en el plano euclidiano, un par de paralelas, sino una *curva equidistante* (o "hiperciclo") con dos ramas, una a cada lado de su *eje* o. Cualquiera de ellas se puede describir como el lugar geométrico de un punto que se deriva de otro fijo Q (que no está en o) por medio de una traslación continua a lo largo de o, o como el lugar geométrico de la imagen de Q por reflexión de todas las rectas perpendiculares a o.

Tenemos en posición ortogonal al haz de rectas que pasan por O un haz de círculos concéntricos. La rotación alrededor de O permuta las rectas y hace que cada círculo se deslice sobre sí mismo. Tenemos en posición ortogonal con respecto al haz de paralelas con un extremo común en M un haz de *horociclos concéntricos*. El desplazamiento paralelo con centro en M permuta las paralelas y hace que cada horociclo se deslice sobre sí mismo. Tenemos en posición ortogonal al haz de rectas ultraparalelas perpendiculares a o un haz de *curvas equidistantes coaxiales*. La traslación a lo largo de o permuta las rectas ultraparalelas y hace que cada curva equidistante se deslice sobre sí misma.

Podemos ahora cumplir la promesa que hicimos después de 15.31 de demostrar que "el producto de dos traslaciones cuyos ejes no se cortan puede ser una rotación". Nos referiremos a la figura 16.3*d* para observar que la recta que pasa por C y es perpendicular a AB es ultraparalela a AM y AN. Tiene, por lo tanto, una perpendicular común GH con AM, y otra perpendicular FE común con AN, de manera que se forma un pentágono, $AEFGH$ con ángulos rectos en E, F, G, H, como se puede ver en la figura 16.6*a*. El ángulo restante, A, puede ser tan pequeño como queramos; cuando sea cero, el pentágono será "asintótico". El producto de las reflexiones en AE y FG es la traslación a lo largo de EF (que recorre $2EF$). El producto de las reflexiones en FG y AH es la traslación a lo largo de GH (que recorre $2GH$). En consecuencia, tenemos que el producto de esas dos traslaciones es igual al producto de las reflexiones en AE y AH, que es una rotación o, si A es un "extremo", un desplazamiento paralelo. Puesto que los ejes de ambas traslaciones son perpendiculares a FG, hemos demostrado así que el producto de las traslaciones a lo largo de dos rectas ultraparalelas puede ser una rotación o un desplazamiento paralelo. (Puede, por supuesto, resultar con la misma facilidad otra traslación.)

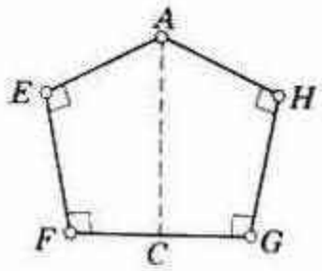


Figura 16.6a

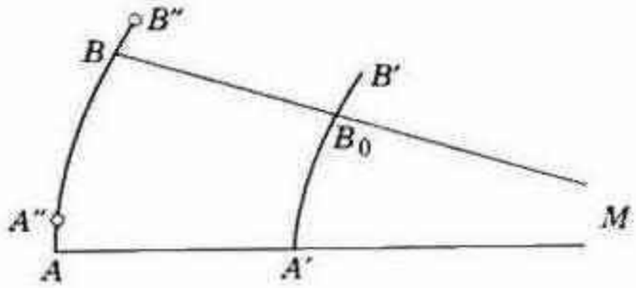


Figura 16.6b

* Este comentario solamente tiene sentido en el original inglés. (*T*)

El producto de las traslaciones a lo largo de dos rectas ultraparalelas, AM y BM, deja invariante el extremo común M; no puede, por lo tanto, ser una rotación, sino que tiene que constituir o bien una traslación a lo largo de otra recta que pase por M o bien un desplazamiento paralelo con centro en M. Veremos pronto que esta última posibilidad se presenta cuando las dos traslaciones originales son de longitudes iguales, una hacia M y la otra en un sentido que la aleja de M. De hecho, tenemos que la traslación a lo largo de AM de A a A' (figura 16.6*b*) transforma el arco AB de un horociclo que pasa por A en un arco igual $A'B'$ del horociclo concéntrico que pasa por A'. Denotemos el punto B_0 en el que el segundo arco corta al diámetro que pasa por B. La traslación a lo largo de este diámetro de B_0 a B transforma el arco B_0A' del segundo horociclo en el arco igual BA'' del primero. Así, tenemos que el producto de dos traslaciones es el desplazamiento paralelo que transforma el arco AB en el $A''B''$: hace que este horociclo (y cualquiera de los concéntricos con respecto a él) se deslice sobre sí mismo.

EJERCICIOS

1. Los tres vértices de un triángulo (finito) están todos en cada una de tres curvas equidistantes, cuyos ejes unen los puntos medios de pares de lados, y en un cuarto "ciclo", que puede ser un círculo o un horociclo, u otra curva equidistante (con los tres vértices en una de sus ramas). [Sommerville 1, págs. 54, 189.]
2. Los tres lados de un triángulo (finito) son tangentes a un círculo (el círculo inscrito) y a otros tres "ciclos", donde cada uno de ellos puede ser de cualquiera de las tres clases.
3. En la figura 15.2*a*, el horociclo que pasa por J y cuyo diámetro es p_1, pasa también por L.
4. ¿Cuántos horociclos pueden pasar por dos puntos dados?
5. Una curva equidistante puede llegar a tener hasta cuatro intersecciones con un círculo, un horociclo u otra curva equidistante.
6. Desarróllese la analogía entre las cónicas del plano afín y los círculos generalizados del plano hiperbólico. El horociclo, como la parábola, se extiende al infinito en una dirección: si los puntos P y Q son respectivamente punto variable y punto fijo en él, la posición límite de la recta QP es el diámetro que pasa por Q. La curva equidistante tiene, como la hipérbola, dos ramas.
7. De manera distinta al eje conjugado de la hipérbola, el eje de la curva equidistante está en el lado *cóncavo* de cada rama.

16.7 EL MODELO DEL "SEMIPLANO" DE POINCARÉ

Se gana en sencillez cuando se toma el círculo fundamental como una recta, por ejemplo, el eje de las x. . . . Podemos evitar el trato con pares de puntos al considerar solamente a los que están por encima del eje de las x. Un círculo propio se representa por el círculo que queda totalmente por encima del eje de las x; un horociclo, por el círculo que toca el eje de las x; una curva equidistante, por el círculo que corta el eje de la x si le añadimos la reflexión de la parte que queda por debajo del eje.

D. M. Y. Sommerville [1, págs. 188–189]

Del modelo conforme (figura 16.2*a*) en el que las rectas se representan por circunferencias (y rectas) ortogonales a una circunferencia fija Ω, Poincaré derivó otro modelo conforme al invertir en un círculo cuyo centro está en Ω. La inversa de Ω es una recta; sea ésta una "horizontal", que seguiremos denotando por Ω. Los puntos del plano hiperbólico quedan representados por los pares de puntos que son imagen uno del otro por la reflexión en Ω y las rectas quedan representadas por las circunferencias y rectas ortogonales a Ω, es decir, circunferencias cuyos centros están en Ω y rectas verticales [Burnside **1**, pág. 387].

Podemos trazar por un par de puntos que son imágenes en Ω un haz intersectante de círculos coaxiales (como los de la figura 6.5*a* si la hiciéramos girar en ángulo recto) que representa un haz ordinario de rectas. El haz ortogonal no intersectante, cuyo eje radical es Ω, representa un haz de circunferencias concéntricas. Los puntos límite del haz no intersectante representan el centro común de ellas.

Se puede trazar otro haz de circunferencias (situado como en la figura 6.5*a*, ahora sin alterarla) que pasen por dos puntos de Ω. Uno de los miembros de este haz, que tiene su centro en Ω, representa una recta o. Las demás circunferencias (o, estrictamente, los demás pares de circunferencias que se relacionan por la reflexión en Ω) representan curvas equidistantes coaxiales con eje en o. Esto se explica al considerar que el haz ortogonal no intersectante representa el haz de rectas ultraparalelas perpendiculares a o.

Un haz tangente de circunferencias cuyos centros están en Ω (figura 6.5*b*) representa el haz de paralelas, mientras el haz tangente ortogonal (que toca a Ω) representa un haz de horociclos concéntricos. Un haz particular de paralelas (particular en el modelo pero, por supuesto, ordinario en la misma geometría hiperbólica) queda representado por todas las rectas verticales (que pasan, como pasa Ω, por un punto en el infinito del plano inversivo). Los horociclos cuyos diámetros son estas rectas quedan representados por las horizontales con la excepción de Ω (o, estrictamente, los pares de horizontales que se relacionan por la reflexión en Ω). Puesto que las reflexiones en las rectas verticales representan reflexiones en las rectas paralelas, las traslaciones horizontales representan desplazamientos paralelos. En consecuencia, las rectas horizontales (diferentes de Ω) representan *isométricamente* a los horociclos: los segmentos iguales representan arcos iguales.

EJERCICIOS

1. ¿Qué figura es la representada por dos rectas que forman un ángulo al que biseca Ω?
2. Cuando dos rectas ultraparalelas se representan por medio de circunferencias no intersecantes (en cualquiera de los modelos conformes de Poincaré), la distancia entre las rectas, que se mide en la dirección de la perpendicular común, aparece como *distancia inversiva* entre las circunferencias (véase el ejercicio 5 de § 6.6).
3. El ángulo de paralelismo (figura 16.3*d*, página 334) es

$$\Pi(x) = 2 \arctan e^{-x}.$$

16.8 LA HOROESFERA Y EL PLANO EUCLIDIANO

> *F. L. Wachter (1792–1817) . . . en una carta a Gauss (diciembre de 1816) . . . habla de la superficie a la que tiende una esfera a medida que su radio se aproxima a infinito. . . . Afirma que* aun en el caso de que el quinto postulado fuera falso, existiría en esta superficie una geometría idéntica a la del plano ordinario.
>
> R. Bonola [1, págs. 62–63]

Es obvia la manera en la que se extienden las ideas de §§ 16.6 y 16.7 de dos a tres dimensiones. El lugar geométrico de las imágenes de un punto Q por la reflexión en todos los planos que pasan por un punto O será una *esfera* de radio OQ. Tenemos un caso límite en la *horoesfera* con centro en M (en el infinito): es el lugar geométrico de las imágenes de un punto Q por la reflexión en todos los planos paralelos al rayo QM [Coxeter 3, pág. 218]. El lugar geométrico de las imágenes de un punto Q por la reflexión en todos los planos perpendiculares a un plano fijo ω es una de las hojas de la *superficie equidistante*, constituida por los puntos que están a una distancia constante de ω en ambos lados.

Hay un modelo conforme en el espacio inversivo, en el que los puntos del espacio hiperbólico quedan representados por pares de puntos que se relacionan por la reflexión en un plano "horizontal" fijo Ω, y los planos son representados por esferas y planos ortogonales a Ω, es decir, esferas tales que sus centros están en Ω y planos verticales. De inmediato se desprende cómo ha de ser la representación de rectas (que son intersecciones de planos). Resulta de interés particular el paquete de rectas verticales, que representa al paquete de las paralelas a un rayo dado QM (que resulta especial en el modelo, aunque no en la geometría hiperbólica). Las horoesferas cuyos diámetros son estas rectas quedan representadas por todos los planos horizontales, con la excepción de Ω. Puesto que todo plano vertical constituye un modelo (de la clase que describimos en § 16.7) de un plano en el espacio hiperbólico, cada plano horizontal (con la excepción de Ω) representa una horoesfera, y toda recta en el plano representa un horociclo en la horoesfera. Puesto que las distancias en estas rectas concuerdan con las distancias a lo largo de los horociclos correspondientes, la representación de la horoesfera en el plano euclidiano es *isométrica*: en correspondencia con una figura cualquiera del plano euclidiano existe en la horoesfera una figura congruente (donde las rectas son reemplazadas por horociclos).

Este asombroso teorema fue descubierto independientemente por Bolyai y Lobachevsky. Se pueden ver dos demostraciones diferentes en Coxeter [3, págs. 197, 251]. Significa que, además de la geometría esférica ordinaria, los habitantes de un mundo hiperbólico estudiarían también geometría horoesférica, ¡que es igual a la geometría euclidiana!

Parte IV

17

Geometría diferencial de las curvas

La geometría diferencial aplica los métodos del análisis a la geometría, sobre todo en el estudio de las curvas y las superficies. En el sentido clásico, el estudio se lleva a cabo en el espacio euclidiano tridimensional. Pero en el siglo veinte se han comenzado a emplear otros espacios, como el inversivo, el afín o el proyectivo. En otras palabras, la geometría diferencial conserva su significación cuando no interviene el concepto de distancia. Sin embargo, tanto la distancia como el paralelismo suelen estar presentes, y en este caso la idea de vector es fundamental.

Una curva, que es el lugar geométrico de un punto P, está íntimamente asociada con un vector variable, a saber, el vector de posición

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$$

que va de un origen fijo O al punto P. Por sencillez no consideraremos más que curvas rectificables para las que hay una tangente bien definida en cada punto [Kreyszig **1**, pág. 29].

Después de un estudio preliminar de los vectores, pasaremos a considerar la curvatura de curvas planas y la curvatura y torsión de curvas torcidas, y aplicaremos los resultados a muchos casos especiales de importancia, como los de las espirales y las hélices.

17.1 LOS VECTORES EN EL ESPACIO EUCLIDIANO

Hemos considerado (en § 13.6) las propiedades *afines* de los vectores, como la adición y la substracción, la multiplicación por números, la independencia y la expresión única

17.11 $$\mathbf{c} = x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g}$$

con respecto a un vector cualquiera $\mathbf{c}$ como combinación lineal de tres vectores básicos $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$. Ha llegado el momento de presentar dos clases de multiplicación de vectores por vectores. Nos valdremos de la notación de J. W. Gibbs (1839–1903), aunque hay autores, como es el caso de Birkhoff y MacLane [1, pág. 175] y Forder [2], que prefieran la de H. Grassmann (1809–1877).

La geometría euclidiana nos permite hablar de la *longitud* (o "magnitud" o "valor absoluto") $|\mathbf{a}|$, de cualquier vector dado $\mathbf{a}$. Si θ es el ángulo que forman el vector $\mathbf{a}$ y el vector $\mathbf{b}$, definiremos el producto *interior* (o "escalar") $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y el producto *exterior* (o "vectorial") $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ por medio de las fórmulas

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta, \qquad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{g},$$

donde $\mathbf{g}$ es el vector unitario ortogonal al plano $\mathbf{ab}$ en el lado en el que θ aparece como ángulo positivo. La introducción de un vector auxiliar $\mathbf{g}$ (que es ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$) se justifica mediante la elegante álgebra que sigue a continuación.

Vemos en seguida que si m y n son números

$$m\mathbf{a}\cdot n\mathbf{b} = mn\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \qquad m\mathbf{a}\times n\mathbf{b} = mn\mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Así la multiplicación interior es conmutativa (como la de números), mientras la multiplicación exterior es "anticonmutativa". Puesto que $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$, tomamos con naturalidad $\mathbf{a}^2$ como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2.$$

Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales cuando $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, y paralelos cuando $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Considérense dos vectores, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, y sea BN la perpendicular de B a OA, como se ve en la figura 17.1*a*. La distancia algebraica ON (negativa cuando $\angle AOB$ es obtuso) se llama *proyección* de $\mathbf{b}$ en $\mathbf{a}$. Si $|\mathbf{a}| = 1$, de manera que $\mathbf{a}$ sea un vector *unitario*, esta proyección es claramente $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Si retiramos la restricción al vector unitario, encontramos que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es $|\mathbf{a}|$ veces la proyección. Esta interpretación geométrica nos permite establecer con facilidad, para los productos interiores, la ley distributiva

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{b}') = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}',$$

que también se puede expresar como

$$(\mathbf{b}+\mathbf{b}')\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}$$

en virtud de la ley conmutativa $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Si reemplazamos $\mathbf{b}'$ por $-\mathbf{b}'$, obtenemos el resultado que corresponde a las diferencias en lugar de las sumas.

La ley distributiva constituye la base de un método útil de establecer ciertas identidades. Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}'$ representan expresiones de que queremos

demostrar que son iguales, a veces nos ayuda la introducción de un vector arbitrario $\mathbf{c}$ para comparar $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ con $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}$. Si encontramos que

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}$$

para todos los vectores $\mathbf{c}$ (o incluso para tres vectores $\mathbf{c}$ independientes) podemos afirmar con seguridad que $\mathbf{b} = \mathbf{b}'$. Tenemos que, como $(\mathbf{b} - \mathbf{b}')\cdot\mathbf{c} = 0$, cuando $\mathbf{b} - \mathbf{b}'$ no es el vector cero

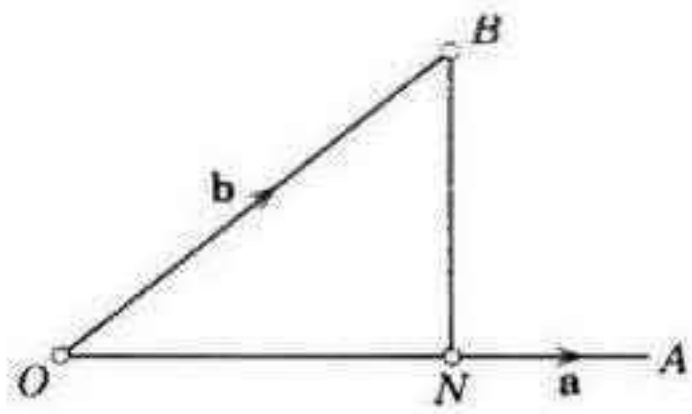


Figura 17.1a

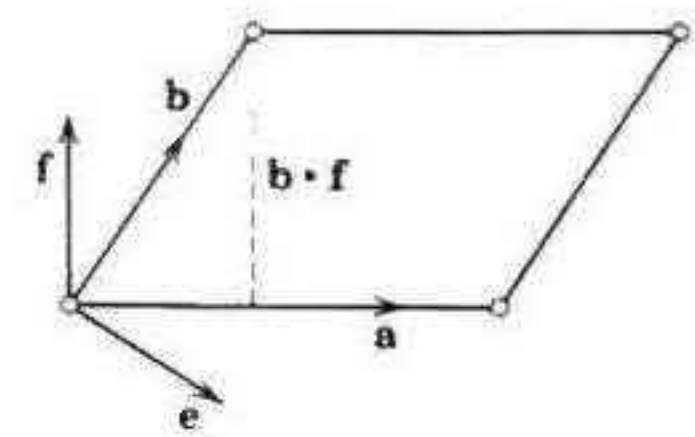


Figura 17.1b

ha de ser ortogonal a $\mathbf{c}$; y como $\mathbf{c}$ se toma arbitrariamente, esto es imposible.

Como un paso para demostrar la ley distributiva para los productos exteriores, compararemos las dos expresiones del área de un paralelogramo, a saber

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{f},$$

donde $\mathbf{f}$ es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{a}$ en el plano $\mathbf{ab}$ (como se tiene en la figura 17.1*b*), de manera que $\mathbf{b}\cdot\mathbf{f}$ es la altura del paralelogramo desde su base $|\mathbf{a}|$. Tenemos análogamente que el paralelepípedo que forman tres vectores independientes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ tiene por base $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, por altura $\mathbf{c}\cdot\mathbf{g}$, y por volumen (si convenimos adecuadamente acerca del signo, según se encuentre el triedro $\mathbf{abc}$ positiva o negativamente orientado)

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{g} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}.$$

Puesto que podríamos tomar otra cara del paralelepípedo como base, podremos expresar el mismo volumen como

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

Y podemos así intercambiar la cruz y el punto:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

(No podemos acercarnos más a una "ley asociativa" de los productos de vectores.) Puesto que la cruz y el punto son intercambiables, es conveniente emplear para $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ o $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, el símbolo especial $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$, de manera que el volumen del paralelepipedo esté dado por

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = [\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}] = [\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}] = -[\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}].$$

Si $[\mathbf{abc}]=0$, el paralelepípedo se derrumba, y los tres vectores son coplanares, es

decir, dependientes. De manera que una condición necesaria y suficiente de la independencia de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ es

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] \neq 0.$$

Para demostrar la ley distributiva para los productos exteriores, introducimos (como catalizador) un vector arbitrario $\mathbf{c}$ y encontramos que

$$\begin{aligned}\{(\mathbf{a} + \mathbf{a}') \times \mathbf{b}\}\cdot\mathbf{c} &= (\mathbf{a} + \mathbf{a}')\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a}'\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\cdot\mathbf{c} + (\mathbf{a}' \times \mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \\ &= \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a}' \times \mathbf{b})\}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

Puesto que hemos tomado arbitrariamente a $\mathbf{c}$, concluimos que

$$(\mathbf{a} + \mathbf{a}') \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}).$$

Puesto que el producto exterior de dos vectores es un vector, podríamos esperar en principio la validez de la ley asociativa. Para comprender por qué $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ son, en general, diferentes, evaluemos ambas expresiones por medio de un procedimiento que elaboraron Coe y Rainich.* Consideremos los vectores unitarios $\mathbf{e}$ y $\mathbf{f}$ en el plano $\mathbf{ab}$, ortogonales a $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}$ respectivamente, como se tiene en la figura 17.1*b*. Puesto que el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular al plano $\mathbf{ab}$ (o $\mathbf{ef}$), los dos vectores

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e}, \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{f}$$

se encuentran en el mismo plano y tienen la misma longitud $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, que se puede expresar en cualquiera de las formas

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}\,|\mathbf{b}|, \qquad \mathbf{b}\cdot\mathbf{f}\,|\mathbf{a}|.$$

Puesto que tienen la misma dirección que $\mathbf{b}$, $-\mathbf{a}$, respectivamente, son, con exactitud,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}\,\mathbf{b}, \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{f} = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{f}\,\mathbf{a}.$$

Si $\mathbf{g}$ es perpendicular al plano, también tenemos que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Al tomar los tres vectores $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ como base, podemos expresar un vector arbitrario $\mathbf{c}$ en la forma de 17.11; así, tendremos

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g}) \\ &= x(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e} + y(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{f} + z(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{g} \\ &= x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{b} - y(\mathbf{b}\cdot\mathbf{f})\,\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot x\mathbf{e})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot y\mathbf{f})\,\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a}\cdot(x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g})\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot(x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g})\,\mathbf{a},\end{aligned}$$

puesto que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{g}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{g}$ son todos cero. En consecuencia, tenemos por último que

17.12 $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}.$$

*C.J.Coe y G.Y.Rainich, *American Mathematical Monthly*, 56 (1949), págs. 175–176.

Al intercambiar $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$, deducimos que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{c}$$
$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

Al considerar $\{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}\} \cdot \mathbf{d}$, encontramos también que cuatro vectores cualquiera $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ satisfacen la *identidad de Lagrange*

17.13 $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

A veces, conviene expresar un vector en términos de sus componentes en la dirección de los ejes de coordenadas cartesianas rectangulares, es decir, emplear el símbolo de coordenadas del punto $P\ (x, y, z)$ también para el vector $\overrightarrow{OP}$, donde O es el origen $(0, 0, 0)$. En otras palabras, empleamos $P = (x, y, z)$ como una abreviatura de

17.14 $$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son vectores unitarios a lo largo de los tres ejes (de manera que éste es un caso especial de 17.11). Puesto que

17.15 $$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0,$$
$$\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}, \qquad [\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}] = 1,$$

deducimos con facilidad para tres vectores cualquiera $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''$ los productos

17.151 $$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = xx' + yy' + zz',$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

y

17.16 $$[\mathbf{r}\,\mathbf{r}'\,\mathbf{r}''] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Puesto que se obtiene el producto de dos determinantes (como sucede con el de dos matrices) al escribir los productos interiores de las hileras del primero con la columna del segundo, podemos agregar a nuestra consideración tres vectores adicionales como $\mathbf{q} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ para encontrar que

$$[\mathbf{q}\,\mathbf{q}'\,\mathbf{q}''][\mathbf{r}\,\mathbf{r}'\,\mathbf{r}''] = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

17.17 $$= \begin{vmatrix} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} & \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}' & \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'' \\ \mathbf{q}' \cdot \mathbf{r} & \mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}' & \mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}'' \\ \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{r} & \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{r}' & \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{r}'' \end{vmatrix}.$$

Al regresar a 17.14 observamos que

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} = x, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} = y, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = z.$$

Así tenemos que se puede expresar cualquier vector $\mathbf{r}$ en términos de un triedro ortogonal cualquiera de vectores unitarios en la forma

17.18 $$\mathbf{r} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k}.$$

Nos servirá también el teorema siguiente:

17.19 *Cuando dos vectores,* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$, *están en planos perpendiculares que cortan la recta de un vector unitario* $\mathbf{k}$.

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Demostración. Puesto que los planos $\mathbf{ak}$ y $\mathbf{kb}$ son perpendiculares, se desprende de 17.13 que

$$0 = (\mathbf{a}\times\mathbf{k})\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{k}^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

EJERCICIOS

1. ¿Cómo se han de relacionar en cuanto a su orden $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ para que se cumpla la ley asociativa $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$?
2. Simplifíquese de dos maneras $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ y, al igualar los resultados, dedúzcase una identidad que relacione cuatro vectores como $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\,\mathbf{d}$.
3. Simplifíquese $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, y señálese que el resultado se podría haber anticipado en virtud de una conocida identidad trigonométrica.

17.2 LAS FUNCIONES VECTORIALES Y SUS DERIVADAS

Se pueden diferenciar las funciones vectoriales de la misma manera en que se procede con las funciones numéricas. Sea el vector

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(s)$$

una función de la variable numérica s, y sea $\Delta\mathbf{a}$ el incremento del vector que corresponde a un incremento Δs de la variable s, de manera que

$$\mathbf{a}(s + \Delta s) = \mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}.$$

Si el vector $\Delta\mathbf{a}/\Delta s$ tiende a un límite cuando Δs tiende a cero, la función vectorial $\mathbf{a}(s)$ recibe la caracterización de *diferenciable*, y su límite es la *derivada*:

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{a}(s+\Delta s) - \mathbf{a}(s)}{\Delta s}.$$

La regla para diferenciar un producto es la misma que se usa para las funciones ordinarias. De hecho,

$$(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{b} + \Delta\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \Delta\mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{b}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b} - \lim \dot{\mathbf{a}}\cdot\dot{\mathbf{b}}\,\Delta s$$

$$= \mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}.$$

De la misma manera, $$\frac{d}{ds}(m\mathbf{a}) = m\dot{\mathbf{a}} + \dot{m}\mathbf{a}$$

y $$\frac{d}{ds}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}}) + (\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}).$$

(Puesto que los productos exteriores no son conmutativos, hemos de tener cuidado para no escribir el segundo término de la derecha como $\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{a}}$.)

Puesto que

$$\frac{d}{ds}\mathbf{a}^2 = 2\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{a}},$$

tenemos que un vector variable de longitud constante es siempre ortogonal a su derivada.

A partir del hecho de que los vectores fundamentales cartesianos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son constantes, sus derivadas son cero, y

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{ds}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Así, al diferenciar un vector, las componentes de las derivadas no son más que las derivadas de las componentes.

EJERCICIO

Cuando una partícula se mueve en una órbita circular (como la que describe una piedra que se hace girar en el extremo de una cuerda), su vector de posición desde el centro tiene longitud constante. ¿En qué dirección es su velocidad? Si la velocidad es constante en magnitud, el vector que la representa tiene longitud constante. ¿En qué dirección está la aceleración?

17.3 CURVATURA, EVOLUTAS E INVOLUTAS

Tenemos el ejemplo más sencillo de vector variable en el caso del vector de posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ de un punto P que se mueve a lo largo de una curva (donde incluimos como curva la recta como el caso más sencillo de todos). Para definir la longitud de un arco de la curva, nos aproximamos a ella por medio de una sucesión de rectas quebradas, como se hizo en § 8.5. Se puede identificar el incremento $\Delta\mathbf{r}$ con el vector que está a lo largo de uno de los segmentos de la recta quebrada, de manera que, antes de que pasemos al límite, el incremento correspondiente de arco es la longitud $|\Delta\mathbf{r}|$.

Para casi todos nuestros propósitos, tendremos que el arco dirigido s (que se mide a lo largo de la curva desde un punto fijo A a otro variable P) resulta el parámetro más conveniente de los que sirven para describir la curva. Es decir, consideramos al vector $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ en función de s. Puesto que

$$\lim \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta s} = \lim\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} = 1$$

[Struik 1, pág. 7], el límite de $\Delta\mathbf{r}/\Delta s$ es el vector unitario tangente

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Si se emplea otro parámetro u en lugar de s, será fácil hacer el ajuste necesario. La derivada $d\mathbf{r}/du$ sigue siendo un vector tangente, a saber

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{du} = \frac{ds}{du}\mathbf{t};$$

la relación entre s y u queda determinada por la longitud ds/du de este vector, y $\mathbf{t}$ es el vector unitario en la misma dirección.

Por ejemplo, en el caso de la circunferencia

$$x = \rho \cos u, \qquad y = \rho \operatorname{sen} u,$$

cuyo radio es ρ, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho(\cos u, \operatorname{sen} u), \\ \frac{ds}{du}\mathbf{t} &= \rho(-\operatorname{sen} u, \cos u), \\ \frac{ds}{du} &= \rho, \qquad \mathbf{t} = (-\operatorname{sen} u, \cos u). \end{aligned}$$

Con respecto a una curva cualquiera en el plano (x, y), el vector tangente es

17.31 $$\mathbf{t} = (\cos\psi, \operatorname{sen}\psi),$$

donde ψ es el ángulo que forma $\mathbf{t}$ con el vector $\mathbf{i}$ a lo largo del eje de las x. La *curvatura* de la curva plana es la derivada de arco de este ángulo

17.32 $$\kappa = \frac{d\psi}{ds} = \dot{\psi}.$$

Puesto que $\mathbf{t}$ es un vector unitario, su derivada está en dirección perpendicular, es decir, en la dirección del vector unitario *normal* $\mathbf{n} = (-\operatorname{sen}\psi, \cos\psi)$, que se deriva de $\mathbf{t}$ por medio de un cuarto de giro positivo. Y así, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \dot{\psi}(-\operatorname{sen}\psi, \cos\psi) \\ &= \kappa\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{17.33}$$

y consideramos κ positivo o negativo según se encuentre $\mathbf{n}$ en el lado cóncavo o convexo de la curva.

La derivada de $\mathbf{n}$, que es ortogonal a $\mathbf{n}$, será un determinado múltiplo de $\mathbf{t}$. Al diferenciar el producto interior $\mathbf{n}\cdot\mathbf{t}$, que es cero, encontramos la expresión precisa

17.34 $$\dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t}.$$

Si aplicamos este método a la circunferencia

$$\mathbf{r} = \rho(\cos u, \operatorname{sen} u),$$

para la que $\mathbf{t} = (-\operatorname{sen} u, \cos u)$, encontramos que

$$\kappa\mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}} = \dot{u}(-\cos u, -\operatorname{sen} u),$$

de donde

$$\kappa = \dot{u} = 1/\rho \quad \text{y} \quad \mathbf{n} = -(\cos u, \operatorname{sen} u).$$

Esto significa que la curvatura de la circunferencia es recíproca del radio, es decir, la curvatura de Soddy (pág. 38), y su normal se dirige al centro a lo largo del radio.

En un punto P de cualquier curva plana, el *centro de curvatura* P_c es el centro de la circunferencia de curvatura, que es, a su vez, la circunferencia que más "se le ajusta" y que comparte con la curva una misma normal y una misma curvatura. Su "radio"

17.35 $$\rho = 1/\kappa$$

(al que dejamos que tome valores positivos o negativos según sea κ) es el *radio de curvatura*. El centro de curvatura en P, que dista ρ de P, donde se mide a lo largo de la normal en este punto, tiene el vector de posición

17.36 $$\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n}.$$

Cuando P se mueve por la curva dada (acerca de la que hemos supuesto que no es una recta ni una circunferencia), el centro de curvatura P_c se mueve por una curva relacionada que se llama *evoluta*,* y se puede expresar paramétricamente en términos de su propia longitud de arco s_c. Su tangente unitaria $\mathbf{t}_c$ se determina por medio de

$$\dot{s}_c\,\mathbf{t}_c = \frac{d}{ds}(\mathbf{r} + \rho\mathbf{n}) = \dot{\mathbf{r}} + \rho\dot{\mathbf{n}} + \dot{\rho}\mathbf{n}$$
$$= \mathbf{t} - \rho\kappa\mathbf{t} + \dot{\rho}\mathbf{n} = \dot{\rho}\mathbf{n}.$$

Puesto que $\mathbf{t}_c$ y $\mathbf{n}$ son vectores unitarios, de lo anterior se desprende que

$$\dot{s}_c = \pm\dot{\rho} \quad \text{y} \quad \mathbf{t}_c = \pm\mathbf{n}:$$

la tangente a la evoluta en P_c es la misma recta que la normal a la curva original en P (véase la figura 17.3*a*). Así, tenemos que la evoluta, que hemos definido como el lugar geométrico del centro de curvatura, se pudo haber definido también como la *envolvente de normales*.

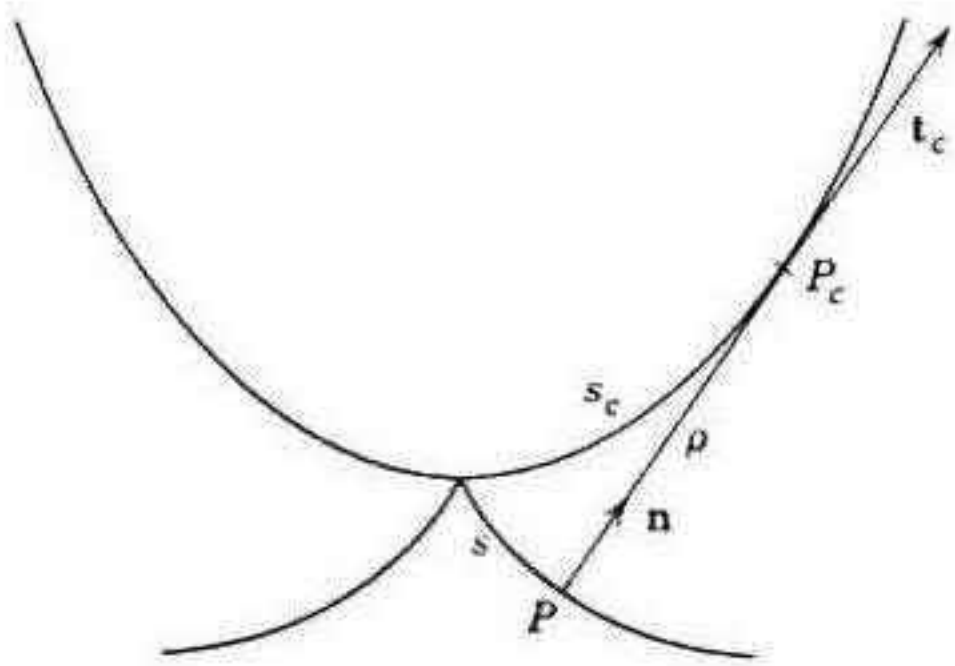


Figura 17.3a

* Un estudio completo del tema se encuentra en A. Ostrowski, Uber die Evoluten von endlichen Ovalen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **198** (1957), págs. 14–27.

Al integrar la ecuación diferencial $ds_c = \pm d\rho$, encontramos que se cumple para cierta a constante que

$$s_c = a \pm \rho.$$

Si consideramos la recta PP_c como una varilla rígida que rueda (sin deslizarse) en la evoluta, vemos ahora que el extremo P de la varilla traza la curva original. Dicho con otras palabras, el lugar geométrico de P es una *involuta* del lugar geométrico de P_c. Hemos dicho "una involuta" y no "la involuta" debido a que si elegimos de distintas maneras el punto de trazado en la varilla que rueda, obtendremos una familia infinita de curvas "paralelas", cada una de las cuales es una involuta.

Si cambiamos la notación (de $\mathbf{r}_c$, s_c, $\mathbf{t}_c$ a $\mathbf{r}$, s, $\mathbf{t}$) podemos afirmar que el vector de posición del punto que traza una involuta de una curva dada es

$$\mathbf{r} + (a - s)\mathbf{t}.$$

Si queremos encontrar $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, y κ con respecto a una curva determinada, el procedimiento que aplicamos a la circunferencia (un poco después de 17.34) suele ser efectivo cuando las coordenadas cartesianas se dan en términos de un parámetro. Sin embargo, en el caso de una cónica central, el mejor modo de obtener la evoluta consiste en determinarla como la envolvente de las normales. (Véase el ejercicio 3 al final de § 8.5.)

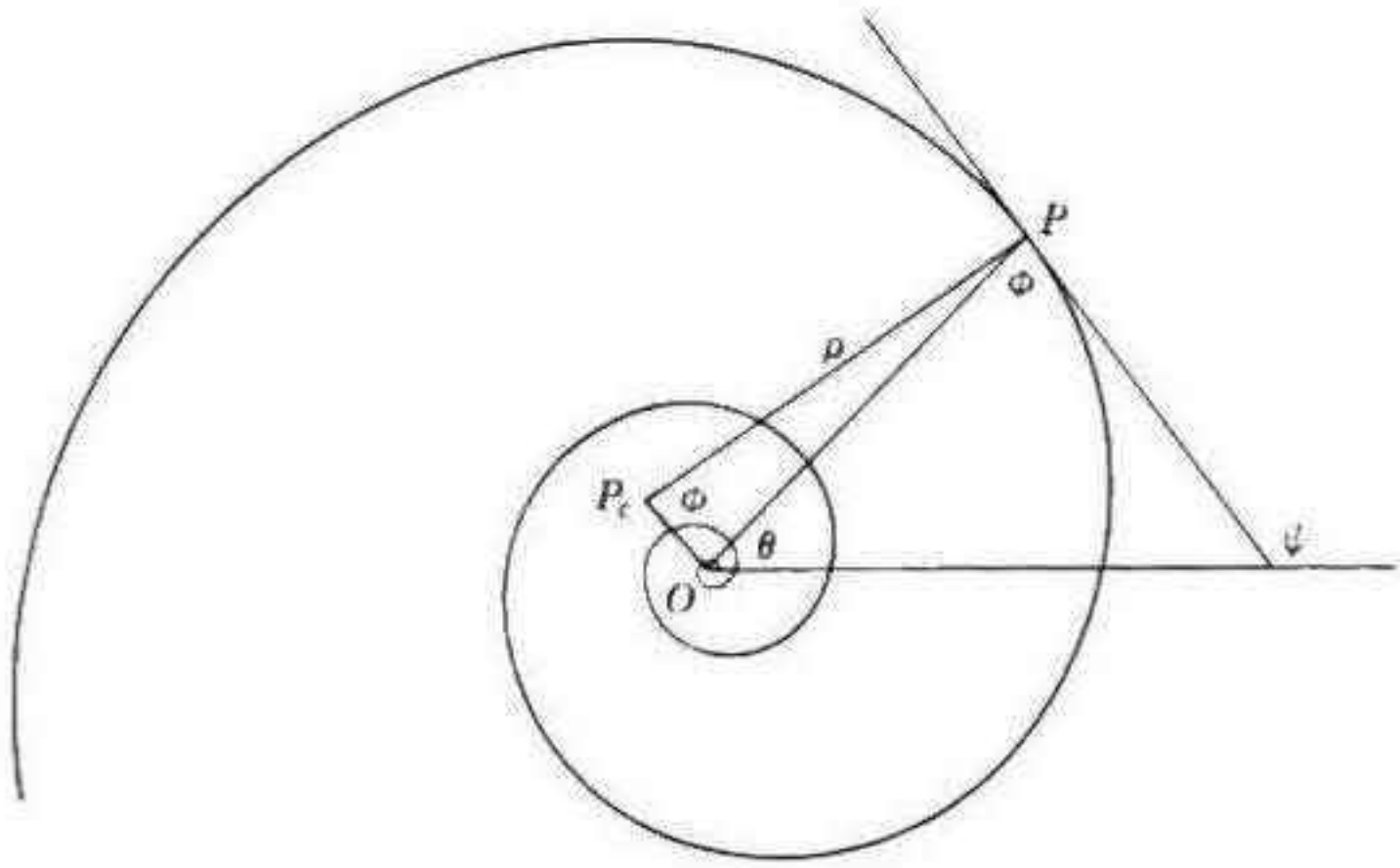


Figura 17.3b

Con respecto a las curvas que se dan en términos de sus coordenadas polares, resulta deseable un procedimiento más geométrico. Por ejemplo, para ubicar el centro de curvatura P_c en un punto cualquiera P de la espiral equiangular 8.71, observamos (figura 17.3*b*) que $\psi = \theta + \phi$. Puesto que también

$$\frac{dr}{ds} = \cos\phi \quad \text{y} \quad \frac{dr}{d\theta} = r\cot\phi,$$

tenemos que

$$\kappa = \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{ds} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{r},$$

de manera que

$$PP_c = \rho = r \csc\phi.$$

Así, OP_c es ortogonal a OP [Lamb **2**, pág. 337] y P_c es (r_c, θ_c) donde

$$r_c = r\cot\phi, \quad \theta_c = \theta + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Puesto que $r = r_c \tan\phi$ y $\theta = \theta_c - \frac{1}{2}\pi$, la evoluta tiene como ecuación

$$r\tan\phi = a\mu^{\theta + \frac{1}{2}\pi}.$$

Puesto que

$$\tan\phi = \mu^{\log\tan\phi\,\log\mu} = \mu^{\log\tan\phi\,\cot\phi} = \mu^{\tan\phi\,\log\tan\phi},$$

esto equivale a

$$r = a\mu^{\theta + \frac{1}{2}\pi - \tan\phi\,\log\tan\phi},$$

lo que nos muestra que la evoluta se ha derivado de la espiral original por medio de una rotación adecuada. (A partir de principios geométricos simples se podría haber obtenido el mismo resultado, puesto que la rotación dilatativa que lleva a la espiral original en deslizamiento sobre sí misma debe causar el mismo deslizamiento en la evoluta.)

La espiral es *su propia evoluta* cuando la "rotación adecuada" consiste en n giros completos, es decir, cuando existe un entero positivo n para el que

$$\tfrac{1}{2}\pi + \tan\phi\log\tan\phi = 2n\pi.$$

Esto sucede si $\tan\phi$ satisface la ecuación trascendente

$$x\log x = (2n - \tfrac{1}{2})\pi.$$

En una tabla de logaritmos naturales veremos que tiene una solución única para cada entero positivo n. Los valores $n = 1$ y $n = 2$ resultan en $\phi = 74°\ 39'$ [Cundy y Rollett **1**, pág. 64] y en $\phi = 80°\ 41'$. Cuando n aumenta, ϕ se aproxima a $90°$, y la espiral toma una "inclinación" cada vez menor.

EJERCICIOS

1. Encuéntrese la evoluta de la cicloide

$$x = u + \operatorname{sen} u, \qquad y = 1 + \cos u.$$

(*Indicación*: $\mathbf{t} = (\cos\frac{1}{2}u, -\operatorname{sen}\frac{1}{2}u)$. Lamb [**2**, págs. 351–352] trata el problema desde el punto de vista sintético.)

2. Encuéntrese la involuta de la circunferencia

$$x = \cos u, \qquad y = \operatorname{sen} u,$$

a partir del punto donde $u = 0$.

3. Sobre la base de "principios geométricos simples", el radio de curvatura de la espiral equiangular es proporcional al arco s, que se mide desde el origen. De hecho,

$$\rho = s\cot\phi.$$

17.4 LA CATENARIA

La *catenaria* es una curva infinita que consiste en la forma idealizada de una cadena uniforme que cuelga libremente bajo la acción de la gravedad. La curva está contenida de manera evidente en el plano, que podemos caracterizar como el plano (x, y) donde el eje de las y es vertical, como se tiene en la figura 17.4*a*. Denotemos por W el peso de una unidad de longitud de la cadena. Consideraremos las fuerzas que actúan en el arco AP, donde A es el

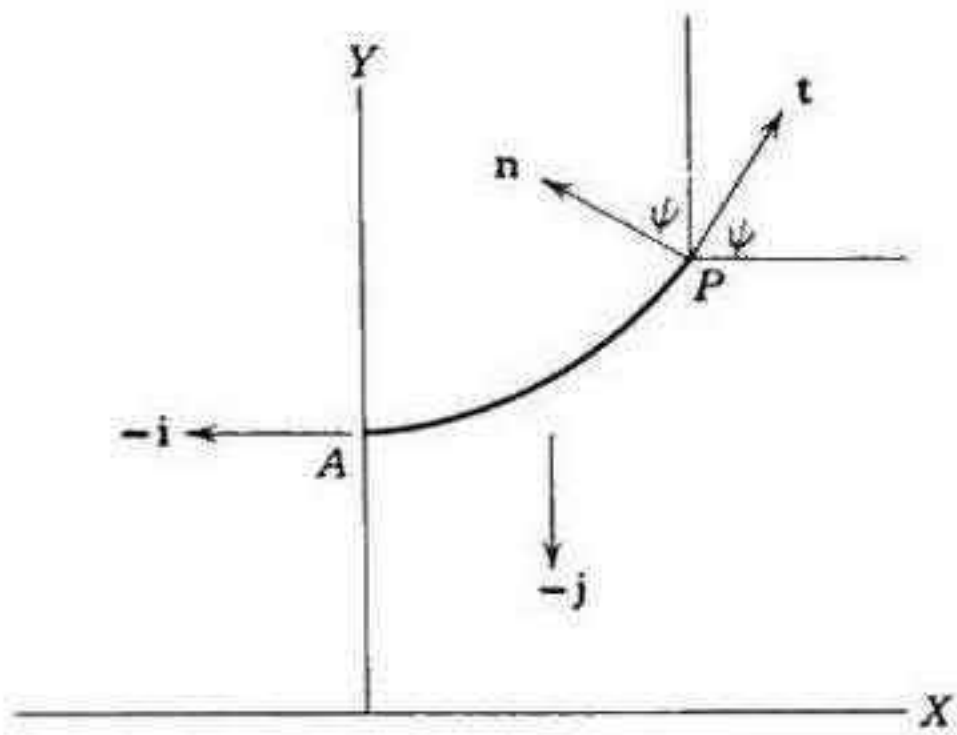


Figura 17.4a

punto inferior ($s = 0$) y P está a una distancia s, que se mide sobre la curva. La tangente $\mathbf{t}$ en P forma un ángulo determinado ψ con el eje de las x $\mathbf{i}$, y la normal $\mathbf{n}$ forma el mismo ángulo con el eje de las y $\mathbf{j}$, de manera que

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{t} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = \cos\psi, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{n} = -\operatorname{sen}\psi.$$

Al considerar varios puntos P en la misma cadena, podremos tomar la inclinación ψ en función del arco s, o viceversa, mientras permanezcan constantes las condiciones en A. Las tres fuerzas que actúan sobre el arco AP son: la tensión T en P, que actúa en la dirección de la tangente $\mathbf{t}$, la tensión Wa (que equivale al peso de una determinada longitud a de la cadena) en la dirección de la tangente $-\mathbf{i}$ en A, y el peso Ws en la dirección de $-\mathbf{j}$. Puesto que las tres fuerzas se encuentran en equilibrio, tenemos que

$$T\mathbf{t} - Wa\mathbf{i} - Ws\mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

Con el objeto de eliminar la tensión T, que no conocemos (ni nos interesa), tomamos el producto interior con $\mathbf{n}$, de manera que obtenemos

$$Wa \operatorname{sen}\psi - Ws\cos\psi = 0,$$

de donde

17.41 $$s = a\tan\psi.$$

Esta ecuación, que expresa la longitud de arco en función de la inclinación ψ se llama ecuación *intrínseca* de la catenaria. Con el objeto de deducir la ecuación cartesiana [cf. Lamb 2, pág. 290], observamos que

$$dx = ds\cos\psi, \qquad dy = ds\operatorname{sen}\psi$$

(figura 8.5*a*) y hacemos la "substitución gudermanniana"

$$\cosh u = \sec \psi, \qquad \operatorname{senh} u = \tan \psi$$

(figura 17.4*b*), que implica

$$\operatorname{senh} u\, du = \sec \psi \tan \psi\, d\psi,$$
$$du = \sec \psi\, d\psi.$$

Al diferenciar 17.41, obtenemos $ds = a \sec^2 \psi\, d\psi$, de donde

$$dx = ds \cos \psi = a \sec \psi\, d\psi = a\, du,$$
$$dy = ds \operatorname{sen} \psi = a \sec \psi \tan \psi\, d\psi = a\, d(\sec \psi) = a\, d(\cosh u).$$

Si tomamos el punto inferior A (donde $s = 0$, $\psi = 0$ y $u = 0$) como $(0, a)$, deducimos

$$x = au, \qquad y = a \cosh u$$

o, en una sola ecuación,

17.42 $$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

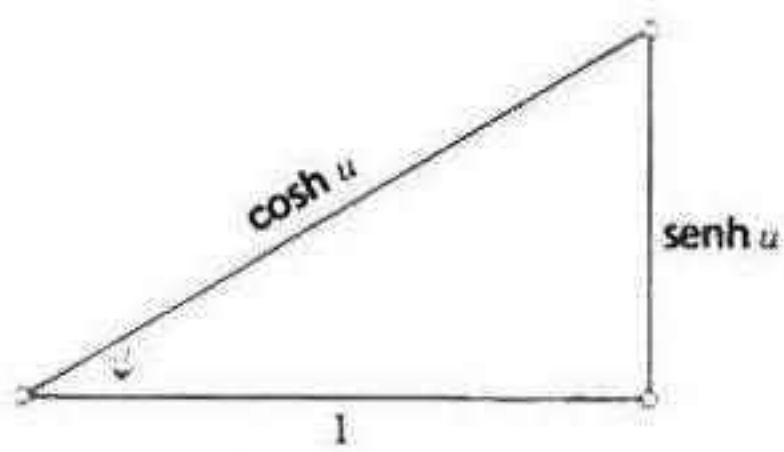


Figura 17.4b

EJERCICIOS

1. Una cadena uniforme OP se sostiene en P y cuelga sobre una espiga lisa en A, de manera que la cadena toma, un poco por encima de A, la posición horizontal, y la espiga le da una vuelta en ángulo recto. Si la parte de la cadena que va de A a P está en la posición que se indica en la figura 17.4*a*, ¿dónde está el extremo suelto O?

2. Se tiene con respecto a la catenaria que $s = a \operatorname{senh} u$ y $\rho = a \cosh^2 u$.

3. Dedúzcase 17.42 a partir de $\dfrac{ds}{dx} = \sec \psi = \left[1 + \left(\dfrac{s}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{s}{a}$.

4. Obténganse las ecuaciones intrínsecas de (a) la cicloide $x = u + \operatorname{sen} u$, $y = \cos u$; (b) la parábola $y^2 = 2lx$.

5. Mediante la substitución gudermanniana resuélvase $\int \sec \psi\, d\psi$.

17.5 LA TRACTRIZ

Investiguemos ahora la involuta de la catenaria, que obtenemos al desenrollarla desde su punto "inferior" A, como se tiene en la figura 17.5*a* [Steinhaus 2, págs. 212–213]. Puesto que el vector de posición del punto general P de la catenaria es

$$\mathbf{r} = (au, a \cosh u) = a(u, \cosh u),$$

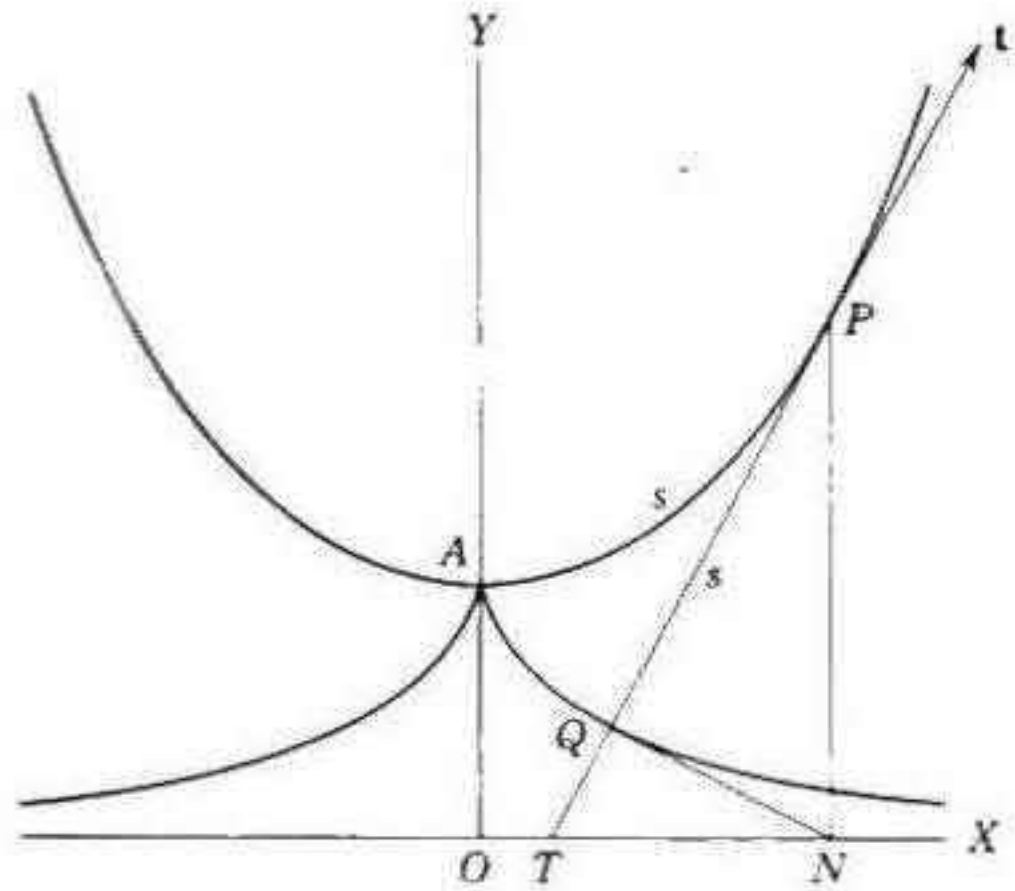


Figura 17.5a

donde u se determina en términos de s por medio de la relación $s = a \operatorname{senh} u$, el vector unitario tangente queda dado por

$$a \cosh u \, \mathbf{t} = \frac{ds}{du}\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{du} = a(1, \operatorname{senh} u),$$

$$\mathbf{t} = (\operatorname{sech} u, \tanh u),$$

y el vector de posición del punto general Q en la involuta es

$$\mathbf{r} - s\mathbf{t} = a(u, \cosh u) - a \operatorname{senh} u (\operatorname{sech} u, \tanh u)$$
$$= a(u - \tanh u, \operatorname{sech} u).$$

Así, tenemos que la involuta, que se conoce con el nombre de *tractriz*, tiene las ecuaciones paramétricas

17.51 $$x = a(u - \tanh u), \qquad y = a \operatorname{sech} u$$

[Lamb 2, pág. 325], donde no aventajaremos en nada si tratamos de eliminar u.

Puesto que el vector normal unitario en P de la catenaria es $(-\tanh u, \operatorname{sech} u)$, el vector unitario tangente en Q a la tractriz será $(\tanh u, -\operatorname{sech} u)$, y el vector de posición del punto N a una distancia a a lo largo de ella es

$$a(u - \tanh u, \operatorname{sech} u) + a(\tanh u, -\operatorname{sech} u) = (au, 0).$$

Tenemos así que la longitud de esta tangente QN desde el punto de contacto hasta la intersección con el eje de las x, tiene el valor constante a. De esta propiedad proviene el nombre de la tractriz: si tomamos el plano (x, y) como horizontal y uno camina por el eje de las x arrastrando una piedra (que originalmente estaba en A) por medio de una cuerda de longitud a, la trayectoria de la piedra es la tractriz. Es evidente que el eje de las x constituye una asíntota.

Otra manera de expresar la misma propiedad, consiste en que la tractriz es una trayectoria ortogonal de un sistema de circunferencias congruentes cuyos centros están en línea recta. E. H. Lockwood* ha desarrollado esta idea para llegar a una construcción aproximada tanto de la tractriz como de la catenaria.

* *Mathematical Gazette*, **43** (1959), págs. 117–118.

EJERCICIO

Calcúlese ρ con respecto a la tractriz. ¿Qué valor toma en la "cresta" A, donde $u = 0$?

17.6 CURVAS TORCIDAS

En 7.52 vimos que todo desplazamiento es una rotación, una traslación o una torcedura (es decir, el producto de una rotación y una traslación). G. Mozzi señaló en 1763 que esta descripción es válida no solamente para los desplazamientos finitos, sino también para los desplazamientos continuos: en el movimiento más general de un cuerpo rígido hay, en cada instante, un eje definido de torcedura. En el caso de una rotación pura, o en el movimiento del tornillo en su tuerca, el eje permanece invariante; pero, en general, cambia continuamente. Por ejemplo, el eje instantáneo de una rueda que avanza por el camino no es la recta del eje de las ruedas, (que avanza con la rapidez del vehículo) sino una paralela que está en el mismo camino.

Se puede describir una rotación cualquiera a partir de su efecto en un triedro ortogonal variable de vectores unitarios que, por razones que se explicarán un poco después, denotaremos por $\mathbf{tpb}$, de manera que

$$\mathbf{t}^2 = \mathbf{p}^2 = \mathbf{b}^2 = 1, \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{t} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{p} = 0,$$

17.61

$$\mathbf{t} = \mathbf{p} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{p}, \quad [\mathbf{t}\,\mathbf{p}\,\mathbf{b}] = 1$$

(cf. 17.15). Consideramos estos vectores unitarios en función de un parámetro s. Puesto que la derivada de un vector unitario cualquiera está en dirección perpendicular al vector, la derivada de cada uno de los vectores $\mathbf{t}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{b}$ está en el plano de los otros dos y constituye una combinación lineal de ellos. Al diferenciar la relación $\mathbf{p}\cdot\mathbf{b} = 0$, vemos que el coeficiente de $\mathbf{p}$ en la expresión de $\dot{\mathbf{b}}$ difiere solamente en cuanto al signo del coeficiente de $\dot{\mathbf{p}}$ en la expresión de $\mathbf{p}$; lo mismo sucede con los otros pares de vectores. En consecuencia, tenemos que con respecto a números adecuados κ, λ, τ (funciones de s)

17.62 $$\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{p} - \lambda\mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}, \quad \dot{\mathbf{b}} = \lambda\mathbf{t} - \tau\mathbf{p}.$$

Estas derivadas se expresan convenientemente en términos del vector de *Darboux*

$$\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \lambda\mathbf{p} + \kappa\mathbf{b}.$$

Lo que se comprende cuando verificamos con facilidad que

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{d} \times \mathbf{a},$$

donde $\mathbf{a} = \mathbf{t}$ o $\mathbf{p}$ o $\mathbf{b}$ u otro vector cualquiera que se encuentre ajustado rígidamente al triedro móvil [cf. Kreyszig **1**, pág. 44]. Incluso, podemos omitir el vector variable $\mathbf{a}$ para escribir "simbólicamente"

17.63 $$\frac{d}{ds} = \mathbf{d} \times.$$

En un punto cualquiera P de una curva torcida, el vector unitario tangente $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$ se puede definir de la manera en la que se le definió con respecto a una curva plana. Pero en lugar de tener una normal única ortogonal a $\mathbf{t}$, tendremos un *plano normal*, que contiene todo un haz plano de normales. Entre los vectores normales unitarios, dos reciben nombres en particular: el *normal principal* $\mathbf{p}$, en la dirección de $\dot{\mathbf{t}}$, y el *binormal*

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{p},$$

perpendicular al plano $\mathbf{tp}$. Puesto que este plano contiene la derivada de $\mathbf{t}$ además del mismo $\mathbf{t}$, su orden de contacto con la curva es más alto que el de cualquier otro plano que pase por $\mathbf{t}$. Debido a este contacto más íntimo, llamamos a $\mathbf{tp}$ *plano osculatorio* en el punto P. (Contiene las direcciones de la velocidad y aceleración de un punto que se mueve a lo largo de la curva [Forder 3, pág. 131].)

Las fórmulas 17.62 para las derivadas de $\mathbf{t}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{b}$ se pueden aplicar aquí si hacemos la simplificación $\lambda = 0$, debido a que hemos elegido $\mathbf{p}$ en la dirección de $\dot{\mathbf{t}}$. Tenemos así las *fórmulas de Serret–Frenet*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \kappa\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}, \\ \dot{\mathbf{b}} &= \quad\;\; - \tau\mathbf{p}, \end{aligned} \tag{17.64}$$

que se pueden resumir en la forma 17.63, donde

$$\mathbf{d} = \kappa\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}. \tag{17.65}$$

Los coeficientes κ y τ se llaman *curvatura* y *torsión* de la curva (en P).

Cuando κ es constantemente cero, $\mathbf{t}$ nunca cambia y la "curva" es una recta. Como lo sugiere el nombre "curvatura", mide la razón en la que cualquier curva distinta de una recta tiende a separarse de su tangente. Como sucede con las curvas planas, una curva torcida tiene un *círculo de curvatura* de radio $1/\kappa$, que está en el plano osculatorio y tiene su centro en el vector normal principal; es decir, el vector de posición de su centro es $\mathbf{r} + \rho\mathbf{p}$, donde $\rho = 1/\kappa$ es el radio de curvatura.

Cuando el valor de τ es constantemente cero, el plano osculatorio nunca cambia, y tenemos una curva *plana* en la que $\mathbf{n} = \mathbf{p}$. La torsión (que debe este nombre a L. I. Vallée, 1825) mide la razón en la que una curva torcida tiende a alejarse de su plano osculatorio.

Los primeros que dieron las fórmulas 17.64 fueron Serret (1851) y Frenet (1852), que no emplearon la notación vectorial; es decir, estaban en la forma de las derivadas de los cosenos directores de la tangente, la normal principal y la binormal. Al combinarlas con

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t},$$

obtenemos $\qquad \ddot{\mathbf{r}} = \kappa\mathbf{p}, \qquad \dddot{\mathbf{r}} = \dot{\kappa}\mathbf{p} + \kappa(\tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}),$

de donde $\qquad |\ddot{\mathbf{r}}| = \kappa, \qquad [\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}}] = \kappa^2\tau.$

EJERCICIOS

1. Con respecto a una curva trazada en una esfera, se tiene que el centro del círculo de curvatura en un punto cualquiera es el pie de la perpendicular que va del centro de la esfera al plano osculatorio en el punto dado.

2. La tangente al lugar geométrico del centro del círculo de curvatura de una curva cualquiera es perpendicular a la tangente en el punto correspondiente de la curva original.

3. Con respecto a cualquier curva torcida, se tiene que

$$[\dot{\mathbf{t}}\ \ddot{\mathbf{t}}\ \dddot{\mathbf{t}}] = \kappa^3(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau) = \kappa^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right),$$

$$[\dot{\mathbf{b}}\ \ddot{\mathbf{b}}\ \dddot{\mathbf{b}}] = \tau^3(\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau}) = \tau^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right).$$

17.7 LA HELICE CIRCULAR

Como vimos en § 8.7, el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano bajo la acción de una rotación dilatativa continua consiste en la espiral equiangular. Tenemos, de manera análoga, que el lugar geométrico de un punto que se mueve en el espacio bajo la acción de una torcedura continua es una *hélice circular* (§ 11.5). En términos de coordenadas *cilíndricas* (r, θ, z), que se definen por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z \text{ de la manera habitual,}$$

una torcedura a lo largo y alrededor de el eje de las x estará dada por

$$(r, \theta, z) \to (r, \quad \theta + u, \quad z + uc):$$

el producto de la rotación $\theta \to \theta + u$ y la traslación $z \to z + uc$. Si apliçamos esta torcedura al punto $(a, 0, 0)$, obtenemos (a, u, uc). Por lo que la hélice circular tiene por ecuaciones paramétricas

$$r = a, \qquad \theta = u, \qquad z = uc,$$

ó

$$x = a\cos u, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,u, \quad z = cu$$

[Weatherburn 2, pág. 16]. En otras palabras, la hélice, que tiene la forma de una escalera caracol, tiene las ecuaciones

$$r = a, \qquad z = c\theta$$

ó

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c},$$

que la expresan como la curva de la intersección de dos superficies: el cilindro circular

$$r = a, \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

y la *helicoide*

$$z = c\theta, \quad \text{o} \quad \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c},$$

que tiene la forma del techo de la escalera (o del aspa de una hélice) [Steinhaus 2, pág. 196].

Al diferenciar

$$\mathbf{r} = (a \cos u,\ a \operatorname{sen} u,\ cu)$$

con respecto a s, obtenemos

$$\mathbf{t} = \dot{u}\,(-a \operatorname{sen} u,\ a \cos u,\ c).$$

Puesto que éste debe ser un vector *unitario*, tenemos

$$\dot{u} = 1/\sqrt{a^2 + c^2},$$

y encontraremos que por el momento es conveniente conservar el símbolo $\dot{u}$ como abreviatura de esta constante. Las fórmulas de Serret–Frenet nos llevan a

$$\kappa\mathbf{p} = \dot{\mathbf{t}} = \dot{u}^2(-a \cos u,\ -a \operatorname{sen} u,\ 0) = -\dot{u}^2 a\,(\cos u,\ \operatorname{sen} u,\ 0),$$

$$\kappa = \dot{u}^2 a = \frac{a}{a^2 + c^2},$$

$$\mathbf{p} = -(\cos u,\ \operatorname{sen} u,\ 0) \qquad \text{(perpendicular al eje de las } z\text{)},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{p} = \dot{u}\,(c \operatorname{sen} u,\ -c \cos u,\ a),$$

$$-\tau\mathbf{p} = \dot{\mathbf{b}} = \dot{u}^2 c\,(\cos u,\ \operatorname{sen} u,\ 0),$$

$$\tau = \dot{u}^2 c = \frac{c}{a^2 + c^2}.$$

Luego tanto κ como τ son constantes; este resultado se podría haber previsto desde los primeros fundamentos y sin acudir al cálculo, puesto que la torcedura que lleva a la hélice circular en deslizamiento sobre sí misma transforma la curvatura y la torsión en un punto en las mismas propiedades en otro punto. Recíprocamente, puesto que todo desplazamiento es una torcedura, toda curva en la que la curvatura y la torsión sean constantes es una hélice circular si agregamos como casos límite la recta ($\kappa = 0$, $a = 0$) y la circunferencia ($\tau = 0$, $c = 0$).

Cuando κ y τ son constantes, podemos aplicar 17.63 al vector de Darboux 17.65, pues es uno de los que está rígidamente ajustado al triedro móvil. De esta manera,

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{d} \times \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

y $\mathbf{d}$ es constante. De hecho, de la misma manera en la que el movimiento de la tangente en un punto que describe una curva plana constituye, en cada instante, una rotación alrededor del centro de curvatura, tenemos que el movimiento del triedro $\mathbf{tpb}$ en un punto que describe una curva torcida es, en cada instante, una torcedura alrededor de una recta determinada (el *eje de torcedura*) en la dirección del vector de Darboux. En el caso de una curva plana, el centro de curvatura aparecía como centro de la circunferencia que "mejor se ajustaba" a la curva en cuestión en el punto que interesaba, de manera que en ese punto la tangente y la curvatura de la circunferencia y de la curva eran iguales. Tenemos, en relación con las curvas torcidas, que se puede obtener el eje de torcedura como eje de la hélice circular que mejor se

le ajusta, es decir, que en un punto dado tenga el mismo **tpb** y la misma curvatura y torsión. Y, así, el eje de torcedura constituye una recta en la dirección $\kappa\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}$ que pasa por el punto que tiene por vector de posición

$$\mathbf{r} + a\mathbf{p},$$

donde a, que es el radio del cilindro circular que contiene a la hélice, se obtiene al eliminar c de las ecuaciones

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + c^2}, \qquad \tau = \frac{c}{a^2 + c^2};$$

de hecho,

$$a = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Tenemos, en el caso de una curva plana, que $\tau = 0$, $a = \rho$, el vector de posición $\mathbf{r} + a\mathbf{p}$ se convierte en $\mathbf{r} + \rho\mathbf{n}$, y el vector de Darboux se vuelve $\kappa\mathbf{b}$: perpendicular al plano de la curva.

EJERCICIOS

1. La proyección ortogonal de la hélice circular en un plano que pasa por su eje, como el plano $x = 0$, es la *sinusoide* (curva del seno)

$$y = a \operatorname{sen} \frac{z}{c}.$$

2. Descríbase la superficie que forman los puntos medios de todas las cuerdas de una hélice circular.

3. El lugar geométrico de los centros de los círculos de curvatura de una hélice circular H es otra hélice circular H', y el lugar geométrico de los centros de curvatura de H' es la misma H. ¿Qué valor de c/a (o τ/κ) hará que H y H' sean congruentes? (Basta, por supuesto, con considerar un solo punto en H, como el punto donde $u = 0$.)

17.8 LA HELICE GENERAL

Hemos visto que la hélice circular está caracterizada por la propiedad de tener curvatura y torsión constantes. Constituye así un caso especial de la *hélice* general, que se puede definir o bien como la curva en la que la curvatura y la torsión están en una razón constante o como la curva en la que la tangente forma un ángulo constante con un vector fijo. Demostraremos a continuación la equivalencia de ambas definiciones.

Empezaremos por suponer que la curvatura y la torsión están en una razón constante (es decir, una razón que no depende de s), por ejemplo

$$\tau = c\kappa.$$

Entonces

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{p}, \qquad \dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{p} = -c\kappa\mathbf{p},$$
$$c\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}.$$

Puesto que esto constituye la derivada $c\mathbf{t} + \mathbf{b}$, el segundo es un vector fijo, al que podemos llamar $\mathbf{a}$, en ángulo constante con $\mathbf{t}$, debido a que

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{t} = (c\mathbf{t} + \mathbf{b})\cdot\mathbf{t} = c.$$

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{t}$ forma un ángulo constante con un vector unitario fijo $\mathbf{k}$. Al diferenciar la ecuación

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{k} = \cos\beta,$$

obtenemos

$$\kappa\mathbf{p}\cdot\mathbf{k} = 0.$$

Si suponemos que $\kappa \neq 0$, tenemos que $\mathbf{p}\cdot\mathbf{k} = 0$, de manera que el vector constante $\mathbf{k}$ está en el plano $\mathbf{bt}$ y forma ángulos complementarios con $\mathbf{b}$ y $\mathbf{t}$. Puesto que $\mathbf{t}\cdot\mathbf{k} = \cos\beta$, también tenemos que

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{k} = \operatorname{sen}\beta.$$

Al diferenciar la ecuación $\mathbf{p}\cdot\mathbf{k} = 0$, obtenemos

$$(\tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t})\cdot\mathbf{k} = 0,$$

$$\tau\operatorname{sen}\beta - \kappa\cos\beta = 0,$$

$$\frac{\kappa}{\tau} = \tan\beta.$$

Las rectas en la dirección constante $\mathbf{k}$ que pasan por todos los puntos de la curva generan un cilindro (general). De esta manera, se puede describir alternadamente la hélice como la curva que se traza en un cilindro de manera que corte los generadores en un ángulo constante. En otras palabras, se puede obtener al dibujar una recta en posición oblicua en una hoja de papel y, enseguida, envolver el cilindro con el papel.

EJERCICIOS

1. Por medio del operador de Darboux 17.63 para diferenciar el vector constante $\mathbf{k}$, obténgase

$$\mathbf{d}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Dedúzcase que el vector de Darboux $\mathbf{d} = \kappa\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}$ es paralelo a $\mathbf{k}$; su dirección es constante (aunque su longitud $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ puede variar).

2. Encuéntrense κ y τ con respecto a la curva

$$x = 3u - u^3, \quad y = 3u^2, \quad z = 3u + u^3,$$

y dedúzcase que esta curva es una hélice.

17.9 LA CONCOESPIRAL

Las espirales que se describen en una concha, llamadas concoespirales, son como las que resultan de enrollar espirales logarítmicas planas en un cono.

Henry Moseley (1801–1872)

[Moseley 1, pág. 301]

Las dos hélices más interesantes son las siguientes: (1) la hélice circular, que es el lugar geométrico de un punto sometido a la acción de una torcedura continua tal que la curvatura y la torsión son constantes; y (2) la *concoespiral*, que es el lugar geométrico de un punto sometido a la acción de

una rotación dilatativa continua, de manera que su curvatura y su torsión son ambas inversamente proporcionales a su arco s, que se mide desde la cúspide O del cono en el que se encuentra evidentemente (de modo que corta los generadores en un ángulo constante). Se puede observar un arco considerable de esta curva en la concha *Turritella duplicata* [Weyl **1**, pág. 68]. Sus aplicaciones en la arquitectura aparecen en las espiras de edificios de Copenhague, sobre todo en el de la Bolsa de Valores, donde las colas de los cuatro dragones se retuercen juntas.

En términos de coordenadas cilíndricas, de la rotación dilatativa alrededor del eje x, que puede ser

$$(r, \theta, z) \to (\mu^u r, \quad \theta + u, \quad \mu^u z),$$

que se aplica al punto $(a, 0, c)$ se obtiene la concoespiral

$$r = \mu^u a, \quad \theta = u, \quad z = \mu^u c.$$

Para ver la manera en la que surge una hélice circular como forma límite de la concoespiral, alteramos el origen al escribir $z + c$ en lugar de z, y dejar entonces que c tienda a infinito y μ a 1, de modo que $(\mu - 1)c$ se aproxime a un número finito b. En lugar de $r = \mu^u a$ y $z = \mu^u c$, tenemos $r = a$ y

$$z = (\mu^u - 1)\, c = \frac{\mu^u - 1}{\mu - 1}\,(\mu - 1)c \to ub.$$

Y, así, la forma límite es la hélice circular

$$r = a, \quad \theta = u, \quad z = ub.$$

EJERCICIOS

1. Exprésense las ecuaciones paramétricas de la concoespiral en términos de coordenadas cartesianas.

2. De esas ecuaciones, verifíquese que el ángulo que forma la tangente $\mathbf{t}$ de la concoespiral con el eje de las z es constante.

3. Obténgase una fórmula que determine el ángulo en el que la concoespiral corta a los generadores del cono

$$\frac{r}{a} = \frac{z}{c}.$$

4. Se obtiene un modelo familiar del cono al cortar un sector circular de una hoja de papel para enrollarlo de manera que el centro del círculo sea el vértice del cono. El ángulo α del sector y el ángulo semivertical β del cono se relacionan por medio de la fórmula

$$\alpha = 2\pi \operatorname{sen} \beta;$$

por ejemplo, el sector es un semicírculo cuando $\beta = \pi/6$. Si $\operatorname{sen} \beta = 1/n$, donde n es un entero mayor que 1, la forma desdoblada de una concoespiral cualquiera en ese cono consta de una sucesión de arcos que pertenecen a n espirales equiangulares.

5. Como cualquier otra hélice, la concoespiral está en un cilindro, y corta a los generadores en un ángulo constante. En el caso que nos ocupa, ¿qué clase de cilindro tenemos?

18

La notación tensorial

En este intermedio entre la geometría diferencial de las curvas (capítulo 17) y la geometría diferencial de las superficies (capítulo 19), introduciremos la famosa notación de Ricci, que es tan sugerente como económica. (Sin su ayuda, habría sido muy difícil formular la teoría general de la relatividad.) Una de sus aplicaciones más sencillas carece de relación con la geometría diferencial: se trata de las "celosías" recíprocas, que se usan en la cristalografía de rayos x (§ 18.3) y la geometría de los números (§ 18.4).

18.1 BASES DUALES

El método de los tensores . . . tiene la gran ventaja de que no es una nueva notación, sino constituye una manera concisa de escribir la notación ordinaria

Harold Jeffreys (1891–)

[Jeffreys I, Prefacio]

Como base de nuestro espacio vectorial (o marco de las coordenadas afines), resulta más sistemático substituir **e**, **f**, **g** (17.11) o **i**, **j**, **k** (17.14) por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Además de este conjunto de tres vectores independientes, empleamos también la *base dual* $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$, que se define en términos de $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ por medio de la ecuación

18.11 $$\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta^\alpha_\beta,$$

donde la *delta de Kronecker* δ^α_β es un símbolo útil que significa 1 ó 0 según sean α y β iguales o desiguales. (Los números "1, 2, 3" de la base dual no son exponentes, sino "índices superiores" o "superíndices" análogos a los

subíndices que se usan en la base original.) De esta manera, tenemos que $\mathbf{r}^1$ es perpendicular al plano $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ y su longitud se ajusta de manera que $\mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}_1 = 1$; lo mismo sucede con $\mathbf{r}^2$ y $\mathbf{r}^3$. Cada $\mathbf{r}^\alpha$, que es perpendicular a dos $\mathbf{r}_\beta$, se puede expresar como producto exterior:

18.12 $$\mathbf{r}^1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{J}, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1}{J}, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{J},$$

donde, puesto que $\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha = 1$,

18.13 $$J = [\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \mathbf{r}_3].$$

Puesto que los vectores básicos $\mathbf{r}_\alpha$ son independientes, $J \neq 0$. Por 17.17, tenemos que

$$[\mathbf{r}^1\,\mathbf{r}^2\,\mathbf{r}^3]\,[\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_3] = \begin{vmatrix} \mathbf{r}^1\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}^1\cdot\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}^1\cdot\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}^2\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}^2\cdot\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}^2\cdot\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}^3\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}^3\cdot\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}^3\cdot\mathbf{r}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

de manera que

18.14 $$[\mathbf{r}^1\,\mathbf{r}^2\,\mathbf{r}^3] = J^{-1}$$

y los vectores básicos duales son, similarmente, independientes. Al intercambiar en 18.12 "superiores e inferiores" obtenemos

18.15 $$\mathbf{r}_1 = J\mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^3, \quad \mathbf{r}_2 = J\mathbf{r}^3 \times \mathbf{r}^1, \quad \mathbf{r}_3 = J\mathbf{r}^1 \times \mathbf{r}^2.$$

EJERCICIO

Dedúzcase 18.14 de 18.12 sin recurrir a 17.17 (*Indicación*: Aplíquese 17.13 a $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$.)

18.2 EL TENSOR FUNDAMENTAL

Se puede expresar un vector cualquiera como $\sum u_\alpha \mathbf{r}^\alpha$, (lo que significa $u_1\mathbf{r}^1 + u_2\mathbf{r}^2 + u_3\mathbf{r}^3$) o como $\sum u^\alpha \mathbf{r}_\alpha$. Los *componentes covariantes** u_α y los *componentes contravariantes* u^α son simplemente los productos interiores $\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}_\alpha$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}^\alpha$; esto se explica al observar que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}_\beta = \sum u_\alpha\,\mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{r}_\beta = \sum u_\alpha\,\delta^\alpha_\beta = u_\beta$$

y

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}^\beta = \sum u^\alpha\,\mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{r}^\beta = \sum u^\alpha\,\delta^\beta_\alpha = u^\beta$$

(En expresiones como $\sum u_\alpha \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta$, se entiende que la suma se toma sobre el índice α que aparece en dos ocasiones, una "arriba" y otra "abajo", y no sobre el índice β que aparece solamente una vez. En la suma $\sum \delta^\alpha_\beta\, u_\alpha$ intervienen tres valores de α, uno de los que ha de ser igual a β, de manera

* Toda la historia de las sutilezas que subyacen los términos *covariante* y *contravariante* se puede leer en Kreyszig [1, pág. 88]. El tratamiento que recibe aquí fue sugerido por G. Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, *Mathematische Annalen*, 78 (1917), 187-217.

que el "símbolo incompleto" $\sum \delta^{\alpha}_{\beta}$ funciona como un operador de substitución que transforma u_α en u_β.)

De esta manera,

18.21 $$\mathbf{u} = \sum \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}_\beta\,\mathbf{r}^\beta = \sum \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}^\beta\,\mathbf{r}_\beta.$$

En particular, esto conserva su validez cuando $\mathbf{u} = \mathbf{r}_\alpha$ o $\mathbf{r}^\alpha$, en cuyos casos las componentes $u_\beta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}_\beta$ y $u^\beta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}^\beta$ se denotan por

18.22 $$g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{r}_\beta, \qquad g^{\alpha\beta} = \mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{r}^\beta,$$

de manera que

18.221 $$\mathbf{r}_\alpha = \sum g_{\alpha\beta}\,\mathbf{r}^\beta, \qquad \mathbf{r}^\alpha = \sum g^{\alpha\beta}\,\mathbf{r}_\beta.$$

(En la expresión $\sum g_{\alpha\beta}\,\mathbf{r}^\beta$, es ahora β la que aparece dos veces, de manera que tomamos la suma sobre los términos β, y obtenemos $g_{\alpha 1}\,\mathbf{r}^1 + g_{\alpha 2}\,\mathbf{r}^2 + g_{\alpha 3}\,\mathbf{r}^3$.) La conmutatividad de los productos interiores nos muestra que

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \qquad g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}.$$

La relación entre el *tensor covariante* $g_{\alpha\beta}$ y el *tensor contravariante* $g^{\alpha\beta}$ se encuentra que es

18.23 $$\begin{aligned}\sum g_{\alpha\gamma}\,g^{\alpha\beta} &= \sum g_{\alpha\gamma}\,\mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{r}^\beta = \mathbf{r}_\gamma\cdot\mathbf{r}^\beta \\ &= \delta^\beta_\gamma.\end{aligned}$$

Así, las dos matrices simétricas $\|g_{\alpha\beta}\|$ y $\|g^{\alpha\beta}\|$ tienen como producto interior la matriz unitaria. Los dos determinantes correspondientes no se pueden anular, puesto que su producto es 1. Cuando los coeficientes $g_{\alpha\gamma}$ están determinados, tenemos en 18.23 para cada valor de β un conjunto de tres ecuaciones lineales

$$g_{1\gamma}g^{1\beta} + g_{2\gamma}g^{2\beta} + g_{3\gamma}g^{3\beta} = \delta^\beta_\gamma \qquad (\gamma = 1, 2, 3)$$

que se deben resolver para tres incógnitas, $g^{1\beta}$, $g^{2\beta}$, $g^{3\beta}$. Por la regla de Cramer [Birkhoff y MacLane **1**, pág. 286] la solución es

$$g^{\alpha\beta} = (\text{cofactor de } g_{\alpha\beta} \text{ en } G)/G, \qquad G = \det(g_{\alpha\beta}).$$

En particular, si $g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0$, se tiene

$$g^{\alpha\alpha} = 1/g_{\alpha\alpha}$$

y $g^{23} = g^{31} = g^{12} = 0$.

Para expresar cualquiera de las clases de componentes de un vector $\mathbf{u}$ en términos de la otra clase, tenemos

18.24 $$\begin{aligned}u_\alpha = \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}_\alpha &= \mathbf{u}\cdot\sum g_{\alpha\beta}\,\mathbf{r}^\beta \\ &= \sum g_{\alpha\beta}\,u^\beta,\end{aligned}$$

y de la misma manera, $u^\alpha = \sum g^{\alpha\beta}\,u_\beta$. El producto interior de dos vectores

$$\mathbf{u} = \sum u^\alpha\,\mathbf{r}_\alpha = \sum u_\alpha\,\mathbf{r}^\alpha \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \sum v^\beta\,\mathbf{r}_\beta = \sum v_\beta\,\mathbf{r}^\beta$$

se puede expresar de varios modos como una forma bilineal:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \Sigma\, u^\alpha\, \mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{v} = \Sigma\, u^\alpha\, v_\alpha,$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \Sigma\, u_\alpha\, \mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{v} = \Sigma\, u_\alpha\, v^\alpha,$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \Sigma\, u^\alpha\, \mathbf{r}_\alpha\cdot\Sigma\, v^\beta\, \mathbf{r}_\beta = \Sigma\Sigma\, g_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, v^\beta,$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \Sigma\, u_\alpha\, \mathbf{r}^\alpha\cdot\Sigma\, v_\beta\, \mathbf{r}^\beta = \Sigma\Sigma\, g^{\alpha\beta}\, u_\alpha\, v_\beta.$$

En particular, la longitud $|\mathbf{u}|$ está dada por

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \Sigma\, u_\alpha\, u^\alpha$$

18.25 $$= \Sigma\Sigma\, g_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta = \Sigma\Sigma\, g^{\alpha\beta}\, u_\alpha u_\beta.$$

Consideremos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como los vectores de posición de puntos con coordenadas contravariantes (u^1, u^2, u^3) y coordenadas covariantes (v_1, v_2, v_3), respectivamente. Si $\mathbf{u}$ está fijo mientras $\mathbf{v}$ varía, las dos ecuaciones

18.26 $$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1$$

definen respectivamente el plano que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathbf{u}$, y el plano paralelo en el que la distancia al origen, que es la proyección de $\mathbf{v}$ en el vector unitario $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, es

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}.$$

El segundo plano, que pasa por el inverso de (u^1, u^2, u^3) en la esfera unitaria

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1,$$

constituye el *plano polar de* (u^1, u^2, u^3) con respecto a la esfera. (Véase § 8.8.)

Resulta conveniente, en ocasiones, expresar los vectores básicos en términos de coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r}_\alpha = x_\alpha\mathbf{i} + y_\alpha\mathbf{j} + z_\alpha\mathbf{k}.$$

Entonces, por 18.22 y 17.151,

18.27 $$g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{r}_\beta = x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta,$$

18.28 $$J = [\mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_2\, \mathbf{r}_3] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

y el determinante del tensor fundamental es

18.29 $$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = J^2.$$

EJERCICIOS

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u^1 v_1 + u^2 v_2 + u^3 v_3$.
2. $|\mathbf{u}|^2 = g_{11}(u^1)^2 + g_{22}(u^2)^2 + g_{33}(u^3)^2 + 2g_{23}\, u^2u^3 + 2g_{31}\, u^3u^1 + 2g_{12}\, u^1u^2$.

Determínese la expresión correspondiente a, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

3. Por medio de 18.12, 18.221 y 18.15 demuéstrese 17.12 en la forma

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 = g_{13}\mathbf{r}_2 - g_{23}\mathbf{r}_1.$$

4. $\Sigma\, \mathbf{r}^\alpha \times \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{0}$.
5. Exprésese det $(g^{\alpha\beta})$ en términos de $G = \det\,(g_{\alpha\beta})$.

18.3 CELOSIAS RECIPROCAS

Se puede afirmar que la celosía recíproca constituye uno de los instrumentos más importantes de los que se dispone en el estudio de la difracción de rayos x debida a cristales.

M. J. Buerger [1, pág. 107]

El estudio de la difracción de los rayos x ha venido a confirmar la idea de que la apariencia simétrica de los cristales es una consecuencia del diseño simétrico con el que se organizan sus átomos o moléculas. En otras palabras, hay un grupo infinito de operaciones de simetría que transforma el diseño (al que consideramos extendido por todo el espacio) en sí mismo. Estas operaciones pueden incluir o no las rotaciones, las reflexiones, las reflexiones en deslizamiento, las reflexiones rotatorias o las torceduras, pero en cualquiera de los casos, las traslaciones que contiene el grupo de simetría forman un subgrupo normal no vacío. Este subgrupo de traslación determina una celosía cuya celda unitaria contiene uno o más átomos. El arreglo de los átomos de la primera celda determina el arreglo que tendrán en todas las demás celdas que se derivan por medio de las traslaciones. Si la celda contiene solamente un átomo, escogeremos naturalmente el origen en el centro de uno de esos átomos; en este caso, en lugar de un átomo en cada celda, tenemos un átomo en cada vértice, es decir, en todo punto de la celosía. Pero si la celda contiene más de un átomo, habrá varias celosías superpuestas de átomos. De esta manera, un cristal determinado posee un grupo de traslación perfectamente definido, y en el momento en que escogemos un origen, la celosía se define (el origen se puede tomar en el centro de un átomo o en cualquier otra parte). Se mantiene teóricamente la posibilidad de elegir entre ilimitadas celdas unitarias, aunque en la práctica se tiende a emplear vectores básicos de longitudes aproximadamente iguales. Sin embargo, el volumen de la celda unitaria está definido, puesto que depende del número de puntos de la celosía en un cristal de tamaño determinado. De hecho, tres vectores independientes cualquiera generan un paralelepípedo, que constituye una celda unitaria siempre que contenga en cada uno de sus ocho vértices un punto de la celosía sin tener ninguno en sus aristas, en sus caras, o en el interior.

La teoría afín nos señala que la sucesión de "planos racionales" 13.93 se puede escoger de una infinidad de maneras. En la geometría euclidiana, no se pueden distinguir ya: cada sucesión tiene su *espacio interplanar*, que se puede medir como la distancia del "primer" plano al origen

18.31 $$Xx + Yy + Zz = 1.$$

Cada sucesión de planos contiene todos los puntos de la celosía. En consecuencia, al comparar una de esas sucesiones con otra, los espacios interplanares son proporcionales a la densidad de la distribución de puntos de la celosía en un plano de la sucesión. Esta idea tiene importancia física debido a que los planos de las caras y los planos de segmentación de un cristal tienden naturalmente a presentarse entre los planos racionales de densidad alta. De acuerdo con esto, nuestra atención se dirige sobre todo en las sucesiones que tienen espacios interplanares relativamente grandes. Por otra parte, los puntos visibles más interesantes son los que distan relativamente poco del origen. Las dos celosías que vamos a considerar se relacionan de manera que los puntos visibles de cualquiera de ellas están en direcciones perpendiculares a los planos racionales de la otra y a distancias recíprocas a los planos interplanares [Buerger 1, pág. 117]. De esta manera, los planos más importantes de cualquiera de las dos celosías corresponderán a los puntos más importantes de la otra.

La definición en términos de una base resulta extremadamente sencilla [Coxeter 1, pág. 181] y se ve en seguida que el resultado es independiente de la base que se ha elegido. Si una celosía determinada está compuesta por los puntos tales que sus coordenadas contravariantes son enteros, la celosía *recíproca* está compuesta por los puntos tales que sus coordenadas covarian tes son enteros. En otras palabras, los vectores de posición son

$$\mathbf{u} = \Sigma\, u^\alpha\, \mathbf{r}_\alpha \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \Sigma\, v_\alpha\, \mathbf{r}^\alpha,$$

respectivamente, donde u^α y v_α son enteros y $\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta^\alpha_\beta$. La ecuación $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1$ ó

$$u^1v_1 + u^2v_2 + u^3v_3 = 1$$

(véase 18.26) implica que los tres números u son primos entre sí, y lo mismo sucede con los tres números v. Con respecto a cada punto visible (u^1, u^2, u^3) de la celosía dada, se puede identificar esta ecuación con 18.31: representa un primer plano racional de la celosía recíproca: perpendicular a $\mathbf{u}$ y a la distancia recíproca $|\mathbf{u}|^{-1}$. Puesto que la distinción entre "covariante" y "contravariante" se hace por una elección arbitraria, la relación entre las dos celosías es simétrica: los primeros planos racionales de cualquiera de ellas son los planos polares (con respecto a la esfera unitaria) de los puntos visibles de la otra.

Las formas de las celdas unitarias de las dos celosías se determinan por medio de los productos interiores 18.22. Por conveniencia, emplearemos para las longitudes de arista de estos paralelepípedos las abreviaturas

18.32 $$g_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = |\mathbf{r}_\alpha|, \quad g^\alpha = \sqrt{g^{\alpha\alpha}} = |\mathbf{r}^\alpha|,$$

de manera que los ángulos que forman pares de aristas adyacentes sean los ángulos cuyos cosenos son

$$\frac{g_{23}}{g_2 g_3}, \frac{g_{31}}{g_3 g_1}, \frac{g_{12}}{g_1 g_2}; \frac{g^{23}}{g^2 g^3}, \frac{g^{31}}{g^3 g^1}, \frac{g^{12}}{g^1 g^2}.$$

Por 18.13 y 18.14, sus volúmenes son J y J^{-1} donde, por 18.29,

$$J = \sqrt{G}, \qquad G = \det(g_{\alpha\beta}).$$

El caso especial más sencillo es el de la celosía *cúbica* que está compuesta por los puntos tales que sus coordenadas cartesianas son enteros. En este caso,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}^2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}^3 = \mathbf{k},$$

la distinción entre covariante y contravariante desaparece, y la celosía constituye su propia recíproca. Se obtienen otras celosías importantes como subcelosías de la celosía cúbica simple, es decir, al colocar restricciones adecuadas en las coordenadas cartesianas de enteros. Al disponer que las tres coordenadas de cada punto tengan como suma un número par, obtenemos la celosía cúbica *con centro en una cara*; y al disponer que sean todas pares o impares, la celosía cúbica *con centro en un cuerpo*. (Estas denominaciones se refieren a celosías simples más grandes cuyos puntos tienen solamente coordenadas pares. En esta celosía mayor el centro de una cara tiene dos coordenadas, y el centro de una celda o "cuerpo" tiene tres coordenadas impares.) Cada una de estas dos celosías es semejante a la recíproca de la otra; cosa que se comprende al observar que las bases

18.33 $\quad \mathbf{r}_1 = (0, 1, 1), \qquad \mathbf{r}_2 = (1, 0, 1), \qquad \mathbf{r}_3 = (1, 1, 0),$

18.34 $\quad \mathbf{r}^1 = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{r}^2 = (1, -1, 1), \quad \mathbf{r}^3 = (1, 1, -1)$

satisfacen evidentemente una forma modificada de manera trivial de 18.11, a saber

$$\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = 2\,\delta^\alpha_\beta.$$

Esto significa que son recíprocas con respecto a una esfera cuyo radio es $\sqrt{2}$. Para que sean recíprocas con respecto a la esfera unitaria, no tenemos más que dividir todas las coordenadas de una celosía por 2 (o todas las coordenadas de las dos por $\sqrt{2}$).

Al comparar con Buerger [1, págs. 117–127], tal vez valga la pena advertir que sus

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*, a, b, c, a^*, b^*, c^*, d_{(hkl)}, \sigma_{hkl}, V, V^*$$

son nuestros

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3, g_1, g_2, g_3, g^1, g^2, g^3, |\mathbf{v}|^{-1}, \mathbf{v}, \qquad J, J^{-1}.$$

EJERCICIOS

1. Considérense dos celosías planas que se han derivado una de otra por medio del cuarto de giro alrededor del origen. Muéstreselas como "celosías recíprocas"

$$u^1\mathbf{r}_1 + u^2\mathbf{r}_2 \quad \text{y} \quad v_1\mathbf{r}^1 + v_2\mathbf{r}^2.$$

(*Indicación*: $\mathbf{r}^1$ es perpendicular a $\mathbf{r}_2$, y $\mathbf{r}^2$ a $\mathbf{r}_1$; también, $\mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{r}_2$.)

2. Escríbanse los tensores fundamentales que corresponden a las celosías cúbicas con centro en una cara y con centro en un cuerpo sobre las bases 18.33 y 18.34. Dibújense las celdas unitarias, que son romboedros. (La primera se puede considerar como un octaedro sólido al que se le añaden un tetraedro regular en cada una de dos caras opuestas.)

3. Como se tenía en dos dimensiones (§ 4.1), una celosía tridimensional tiene una región de Dirichlet (o poliedro de Voronoi) que está compuesta por todos los puntos que están tan cerca del origen como de cualquier otro punto de la celosía. En el caso de la celosía cúbica simple, es un cubo; en el de la celosía con centro en una cara, es un dodecaedro rómbico, cuyas caras son doce rombos iguales; y en el de la celosía con centro en un cuerpo es un octaedro trunco, cuyas caras consisten en seis cuadrados y ocho exágonos regulares [Steinhaus 2, págs. 152, 157].

18.4 LA CELOSIA CRITICA DE UNA ESFERA

> *A partir de una región acotada K . . . que contiene al origen O como punto interior, consideramos todas las celosías que no tienen puntos en el interior de K con la excepción de O. La cota inferior de sus determinantes se llama determinante crítico de K . . . y las celosías para las que se obtiene esta cota inferior se llaman celosías críticas de K.*
>
> Harold Davenport (1907–1969)*

Hay en toda celosía una distancia mínima c entre pares de puntos de la celosía, y un volumen J que corresponde a la celda unitaria (§ 13.9). Esta J se llama *determinante* de la celosía, puesto que es el determinante de las componentes cartesianas de los tres vectores básicos, $\mathbf{r}_a$. Pasaremos a demostrar que, para un valor determinado de c, el valor mínimo de J se tiene cuando la celosía es cúbica con centro en una cara.†

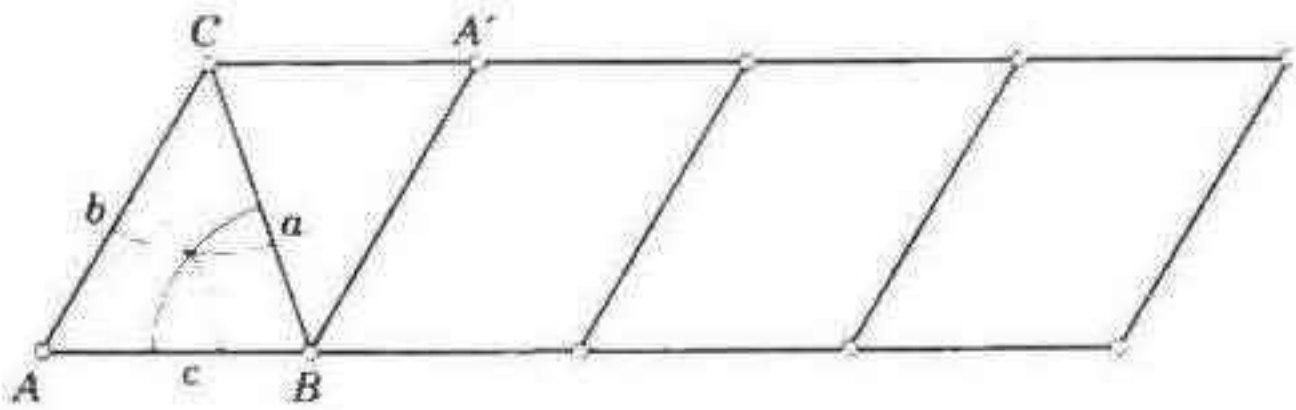


Figura 18.4a

* Recent progress in the geometry of numbers, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1950, vol. I, pág. 166.

† A. P. Dempster, The minimum of a definite ternaty quadratic form, *Canadian Journal of Mathematics*, 9 (1957), págs. 232–234.

Considerese un punto cualquiera A de una celosía dada tal que su celda unitaria tiene un volumen J. Tómese desde A un punto de la celosía B situado a la distancia mínima c, y otro punto de la celosía C distinto de los de la recta AB a la distancia más corta desde A, que es b ($\geqslant c$). Siempre se pueden escoger estos puntos de manera que el ángulo A y los lados a, b, c del triángulo ABC satisfagan

$$A \leqslant \tfrac{1}{2}\pi, \qquad a \geqslant b \geqslant c,$$

y por lo tanto

$$b^2 + c^2 \geqslant a^2$$

(figura 18.4a). Denotemos el área y el circunradio del triángulo por Δ y R, de manera que, por 1.53 y 1.55,

$$16\Delta^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2, \quad 16\Delta^2R^2 = b^2c^2a^2.$$

Por supuesto, el plano ABC constituye un plano racional de la celosía. En uno de los dos planos paralelos más cercanos del mismo sistema, hay un punto de la celosía D tal que su proyección ortogonal D_1 en el plano ABC no queda afuera del paralelogramo $ABA'C$. Si reemplazamos el triángulo ABC, cuando sea necesario, por el triángulo $A'BC$, podemos suponer que D_1 no está fuera del triángulo ABC. (El cambio de notación que puede haber implica que se efectúe la inversión central que intercambia B y C.) Si denotamos por d la distancia DD_1 de D al plano ABC, tenemos

$$J = 2\Delta d.$$

Puesto que AD, BD, CD no son paralelas a AB, todas estas distancias son mayores que o iguales a la distancia que le sigue en magnitud (en orden de mayor a menor): b. Puesto que el triángulo ABC no tiene ángulo obtuso, las circunferencias de radio R cuyos centros están en los vértices se traslapan de manera que todo punto interior del triángulo, con la excepción del circuncentro se encuentra dentro de por lo menos una de las circunferencias. Por lo tanto, la distancia que hay de D_1 a por lo menos uno de los vértices es menor que R, si se exceptúa el caso en que es igual, que ocurre cuando D_1 es el circuncentro. De esta manera, una (por lo menos) de las distancias AD, BD, CD es tal que su cuadrado es menor que o igual a $R^2 + d^2$, y, en consecuencia,

$$R^2 + d^2 \geqslant b^2,$$

donde la igualdad se da solamente cuando D_1 es el circuncentro (y tal vez ni siquiera entonces). En consecuencia,

$$\begin{aligned} J^2 &= (2\Delta d)^2 \\ &\geqslant 4\Delta^2(b^2 - R^2) = \tfrac{1}{4}b^2(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2b^2) \\ &= \tfrac{1}{2}c^6 + \tfrac{1}{4}c^2(b^2 - c^2)(3b^2 + 2c^2) + \tfrac{1}{4}b^2(a^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2) \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}c^6, \end{aligned}$$

donde la igualdad ocurre solamente cuando

$$R^2 + d^2 = b^2, \qquad b = c,$$

y se tiene que

$$\text{(i) } a = b \quad \text{o} \quad \text{(ii) } b^2 + c^2 = a^2.$$

De esta manera, hay al parecer dos celosías "críticas" para las que la razón J/c^3 toma el valor mínimo $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Pronto veremos, sin embargo, que ambas no son sino aspectos diferentes de la misma: la celosía cúbica con centro en una cara.

En el caso (i) (figura 18.4*b*), el tetraedro $ABCD$ es regular, y podemos tomar las coordenadas cartesianas

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 1), \quad (1, 0, 1), \quad (1, 1, 0)$$

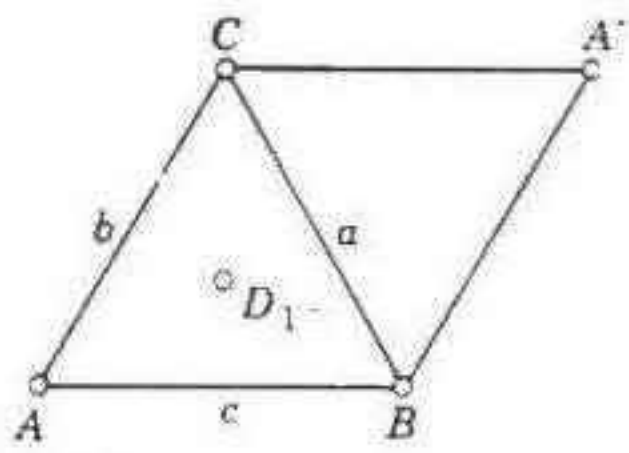


Figura 18.4b

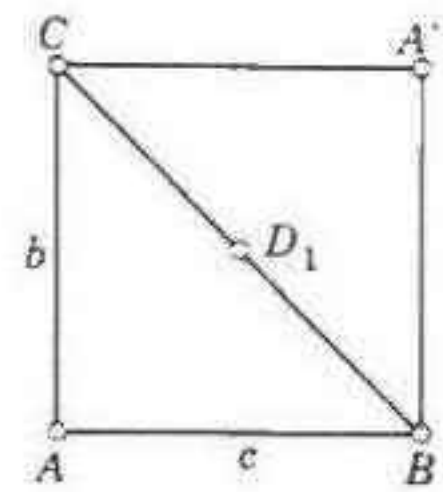


Figura 18.4c

para los vértices, puesto que hemos tomado 18.33 como base de la celosía cúbica con centro en una cara. En el caso (ii) (figura 18.4*c*), $ABA'C$ es un cuadrado y constituye la base de una pirámide cuyas caras inclinadas (como ABD) son triángulos equiláteros. Si escogemos A, B y D como lo hicimos antes, tendremos ahora a C en $(0, 1, -1)$, de manera que obtenemos la base alterna

18.41 $\quad \mathbf{r}_1 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = (0, 1, -1), \quad \mathbf{r}_3 = (1, 1, 0)$

para la misma celosía. Hemos demostrado así que la celosía cúbica con centro en una cara (cuyos puntos tienen coordenadas cartesianas de enteros tales que su suma es par) es en realidad la única celosía "crítica".

Por 18.25, tenemos que la longitud al cuadrado del vector de la celosía

$$\mathbf{u} = \Sigma\, u^\alpha\, \mathbf{r}_\alpha$$

es

$$\Sigma\Sigma\, g_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta,$$

y c^2 es el valor mínimo de esta forma positiva que es cuadrática, ternaria y definida cuando las coordenadas u^1, u^2, u^3 se restringen a los valores de enteros diferentes de 0, 0, 0. En consecuencia, entre todas las formas que tienen un valor mínimo dado c^2 se presenta el determinante mínimo $G = J^2 = \frac{1}{2}c^6$ cuando los vectores básicos se determinan por 18.33, de manera que la forma viene a ser

$$\begin{aligned}(\Sigma\, u^\alpha\, \mathbf{r}_\alpha)^2 &= (u^2 + u^3,\ u^3 + u^1,\ u^1 + u^2)^2 \\ &= (u^2 + u^3)^2 + (u^3 + u^1)^2 + (u^1 + u^2)^2 \\ &= 2\{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + u^2u^3 + u^3u^1 + u^1u^2\}.\end{aligned}$$

En otras palabras, toda forma "extrema" en tres variables equivale a

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + u^2u^3 + u^3u^1 + u^1u^2.$$

Este resultado es famoso, y fue demostrado por primera vez por Gauss [1, vol. 2, págs. 192–196].*

EJERCICIO

Por medio de la base 18.41 en lugar de la 18.33, obténgase la forma equivalente

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + u^2u^3 + u^3u^1.$$

18.5 COORDENADAS GENERALES

Hay muchas maneras diferentes de determinar, por medio de tres puntos, la posición de un punto en el espacio euclidiano. Las coordenadas cartesianas rectangulares (x, y, z) son las más conocidas, pero hemos visto (por ejemplo, en § 17.7) que en ocasiones resulta más conveniente emplear coordenadas cilíndricas. Convengamos en denotar por (u^1, u^2, u^3) las coordenadas generales. Los requisitos esenciales consisten en que, dentro de un margen de variación amplio, x, y, z son funciones diferenciables de un solo valor de u^1, u^2, u^3, mientras u^1, u^2, u^3 son funciones de x, y, z que se comportan de la misma manera. Por ejemplo, si (u^1, u^2, u^3) son coordenadas cilíndricas, tenemos

$$x = u^1 \cos u^2, \qquad y = u^1 \operatorname{sen} u^2, \qquad z = u^3;$$

$$u^1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad u^2 = \arctan \frac{y}{x}, \qquad u^3 = z.$$

Con respecto a constantes arbitrarias a, b, c, las superficies

18.51 $$u^1 = a, \qquad u^2 = b, \qquad u^3 = c$$

se llaman *superficies de nivel*, y sus tres curvas de intersección, que son como

$$u^2 = b, \quad u^3 = c$$

se llaman *curvas de nivel*. Pasa por un punto dado, en general, una curva de nivel de cada clase y una superficie de nivel de cada clase, pero se presentan excepciones. Por ejemplo, en el caso de las coordenadas cilíndricas, las superficies de nivel son los cilindros $u^1 = a$ o $x^2 + y^2 = a^2$, los planos $u^2 = b$ o $y = x \tan b$ que pasan por el eje de las z y los planos $z = c$, ortogonales al eje de las z. El eje de las z es en sí la excepción, puesto que cada uno de sus puntos se encuentra en una infinidad de planos, a saber $u^2 = b$, (y, de hecho, en todos ellos).

Según el significado ordinario de la diferenciación parcial, la derivada parcial del vector de posición

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

* Un relato de la historia de las formas extremas hasta 1951 se encuentra en Coxeter, *Canadian Journal of Mathematics*, 3 (1951), pág. 393.

son los vectores unitarios a lo largo de los ejes cartesianos:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}.$$

La diferencial de $\mathbf{r}$, que representa el desplazamiento en cualquier dirección dada, es

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz = (dx, dy, dz),$$

y el elemento de arco de una curva cualquiera en esta dirección es ds, donde

18.52 $$(ds)^2 = |d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

En lugar de considerar $\mathbf{r}$ en función de x, y, z, podemos tomarlo en función de u^1, u^2, u^3. Si el subíndice α nos indica la derivada parcial con respecto a u^α (de manera que $x_\alpha = \partial x/\partial u^\alpha$) tenemos

18.53 $$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = x_\alpha \mathbf{i} + y_\alpha \mathbf{i} + z_\alpha \mathbf{k}$$

y $$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1\,du^1 + \mathbf{r}_2\,du^2 + \mathbf{r}_3\,du^3 = \sum \mathbf{r}_\alpha\,du^\alpha.$$

Con respecto a un desplazamiento a lo largo de la curva de nivel $u^2 = b$, $u^3 = c$, tenemos $du^2 = 0$, $du^3 = 0$ y $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1\,du^1$. De esta manera, $\mathbf{r}_1$ es un vector *tangente* a la curva de nivel. Y lo mismo sucede con $\mathbf{r}_2$, vector tangente a la curva $u^3 = c$, $u^1 = a$, y $\mathbf{r}_3$ es un vector tangente a $u^1 = a$, $u^2 = b$. Tenemos así en un punto general del espacio un triedro definido $\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_3$, que depende del sistema de coordenadas. Estos vectores básicos no tienen necesariamente una longitud unitaria ni son necesariamente ortogonales (aunque tenemos que son ortogonales en el caso de las coordenadas cilíndricas). Las derivadas de las coordenadas cartesianas se pueden expresar en términos de ellos:

18.54 $$x_\alpha = \mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{i}, \quad y_\alpha = \mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{j}, \quad z_\alpha = \mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{k}.$$

En un punto general del espacio, dos cualesquiera de los tres vectores básicos determinan un plano tangente a una de las tres superficies de nivel que pasan por el punto en cuestión. Por ejemplo, el plano $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ toca la superficie $u^1 = a$, puesto que contiene tangentes a dos curvas que están en esa superficie. En consecuencia, los vectores básicos duales 18.12, que son ortogonales a los planos tangentes $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$, constituyen *normales* a las superficies de nivel 18.51: no son, en general, de longitud unitaria, aunque se ajustan de manera que

$$\mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{r}_\alpha = 1 \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

La notación de 18.22 es la base de la fórmula siguiente del elemento de arco ds en la dirección de un desplazamiento dado $d\mathbf{r}$:

18.55 $$\begin{aligned}(ds)^2 &= d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \sum \mathbf{r}_\alpha\,du^\alpha\cdot\sum \mathbf{r}_\beta\,du^\beta\\ &= \sum\sum g_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta\\ &= g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2 + g_{33}(du^3)^2\\ &\qquad + 2g_{23}\,du^2\,du^3 + 2g_{31}\,du^3\,du^1 + 2g_{12}\,du^1\,du^2.\end{aligned}$$

En el caso especial en el que u^1, u^2, u^3 son x, y, z, este resultado se reduce a 18.52. En general, los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ no son constantes, sino funciones de las coordenadas y sus derivadas (véase 18.27).

Para trabajar con cualquier sistema de coordenadas dado, resolvemos $g_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta$ a partir de las derivadas 18.53, y obtenemos a continuación $g^{\alpha\beta}$ al tomar el cofactor de $g_{\alpha\beta}$ en el determinante G y dividirlo por la misma G.

El empleo de la J que hacemos en 18.13 y 18.28 conmemora al matemático alemán C. G. J. Jacobi (1804-1851). De hecho, para transformar la integral triple de una función

$$f(x, y, z) = F(u^1, u^2, u^3)$$

de coordenadas cartesianas a otras, empleamos la fórmula

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint F(u^1, u^2, u^3) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)}\, du^1\, du^2\, du^3,$$

donde interviene la *jacobiana*

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = [\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \mathbf{r}_3] = J.$$

EJERCICIOS

1. Si u^1, u^2, u^3 son coordenadas *afines*, son las componentes de $\mathbf{r}$ con respecto a tres vectores fijos e independientes $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, de manera que

18.56 $$\mathbf{r} = \Sigma\, u^\alpha\, \mathbf{r}_\alpha.$$

(Esta notación es adecuada, puesto que con ella $\mathbf{r}_\alpha = \partial\mathbf{r}/\partial u^\alpha$.) Las componentes de $\mathbf{r}$ con respecto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son

$$x = \Sigma\, x_\alpha\, u^\alpha, \qquad y = \Sigma\, y_\alpha\, u^\alpha, \qquad z = \Sigma\, z_\alpha\, u^\alpha;$$

$\mathbf{r}_\alpha = x_\alpha\mathbf{i} + y_\alpha\mathbf{j} + z_\alpha\mathbf{k}$ es un vector constante para cada α, y todas las $g_{\alpha\beta}$ son constantes.

2. Las coordenadas cartesianas *oblicuas* son coordenadas afines con la misma medida en los tres ejes, de manera que $|\mathbf{r}_\alpha| = 1$. En este caso, $g_{\alpha\alpha} = 1$ y $g_{\alpha\beta}$ es el coseno del ángulo entre $\mathbf{r}_\alpha$ y $\mathbf{r}_\beta$ (que son los ejes de las coordenadas u^α y u^β).

3. Las coordenadas cartesianas *rectangulares* (donde los ejes rotan para ocupar nuevas posiciones sin cambiar el origen) surgen cuando $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$ es un triedro ortogonal de vectores unitarios, como lo es $\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}$, de manera que

18.57 $$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

(que significa 1 ó 0 según sean α y β iguales o desiguales). Por 18.54, x_α es el coseno del ángulo que forma el eje nuevo $\mathbf{r}_\alpha$ y el viejo $\mathbf{i}$; lo mismo pasa con y_α y z_α. Al intercambiar los papeles de los ejes nuevos y viejos en la relación

$$\mathbf{r}_\alpha = x_\alpha\mathbf{i} + y_\alpha\mathbf{j} + z_\alpha\mathbf{k},$$

obtenemos

18.58 $$\mathbf{i} = \Sigma\, x_\alpha\, \mathbf{r}_\alpha, \qquad \mathbf{j} = \Sigma\, y_\alpha\, \mathbf{r}_\alpha, \qquad \mathbf{k} = \Sigma\, z_\alpha\, \mathbf{r}_\alpha.$$

(Puesto que aquí $\mathbf{r}^\alpha = \mathbf{r}_\alpha$, desaparece la distinción entre covariante y contravariante.) De 18.56 podemos deducir

$$u^\alpha = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r} = x_\alpha x + y_\alpha y + z_\alpha z$$

de manera que (paradójicamente)

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x} = x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial u^\alpha}.$$

Dedúzcase de 18.27 y 18.57

$$x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Evalúense con la ayuda de 18.58 $\sum x_\alpha{}^2$ y $\sum y_\alpha z_\alpha$. (En lenguaje técnico, estas propiedades hacen de

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{Vmatrix}$$

una "matriz ortogonal".)

4. Encuéntrese $g_{\alpha\beta}$ en el caso de las coordenadas *cilíndricas*. Verifíquese que $G = J^2$.

5. Encuéntrese $g_{\alpha\beta}$ en el caso de las coordenadas *polares esféricas*, que se definen por medio de

$$x = u^3 \operatorname{sen} u^1 \cos u^2, \quad y = u^3 \operatorname{sen} u^1 \operatorname{sen} u^2, \quad z = u^3 \cos u^1.$$

Descríbanse las superficies de nivel.

6. Encuéntrese $g_{\alpha\beta}$ en el caso de las coordenadas *confocales*, que se definen por medio de

$$x^2 = \frac{(A - u^1)(A - u^2)(A - u^3)}{(A - B)(A - C)}, \quad y^2 = \frac{(B - u^1)(B - u^2)(B - u^3)}{(B - C)(B - A)},$$

$$z^2 = \frac{(C - u^1)(C - u^2)(C - u^3)}{(C - A)(C - B)},$$

donde $u^1 < C < u^2 < B < u^3 < A$ (y x^2 significa "x al cuadrado"). En este caso, las superficies de nivel son las cuádricas centrales

18.59 $$\frac{x^2}{A - \lambda} + \frac{y^2}{B - \lambda} + \frac{z^2}{C - \lambda} = 1,$$

que serán elipsoides $u^1 = \lambda$ si $\lambda < C$, hiperboloides de una hoja $u^2 = \lambda$ si $C < \lambda < B$, e hiperboloides de dos hojas $u^3 = \lambda$ si $B < \lambda < A$. De hecho, u^1, u^2, u^3 son las raíces de 18.59, cuando se la considera una ecuación cúbica en λ [Weatherburn 2, pág. 211].

18.6 EL SIMBOLO ALTERNANTE

Como una especie de contrapartida de la delta de Kronecker, encontraremos que es conveniente emplear el "épsilon alternante"

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta),$$

cuyo valor es 1 cuando $\alpha\beta\gamma$ es una permutación par de 123, -1 si es una permutación impar, y 0 en cualquier otro caso. Por medio de este recurso se

obtiene una de las mejores presentaciones de la teoría de los determinantes [Jeffreys 1, pág. 13]:

18.61
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \sum\sum\sum \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} x_\alpha y_\beta z_\gamma,$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \sum\sum\sum \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{1\alpha} g_{2\beta} g_{3\gamma}.$$

De 18.12–18.15 deducimos

$$[\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J, \qquad [\mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta \mathbf{r}^\gamma] = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J^{-1},$$
$$J^{-1} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta = \sum \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{r}^\gamma, \qquad J \mathbf{r}^\alpha \times \mathbf{r}^\beta = \sum \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{r}_\gamma.$$

Puesto que $\sum\sum \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\beta} = 0$, de ello se desprende que

$$\sum \mathbf{r}^\alpha \times \mathbf{r}_\alpha = \sum \mathbf{r}^\alpha \times \sum g_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\beta = \sum\sum\sum \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\beta} \mathbf{r}_\gamma / J$$
$$= \mathbf{0}.$$

El símbolo análogo "bidimensional" es

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon_{ij} = j - i \qquad (i = 1 \text{ ó } 2,\ j = 1 \text{ ó } 2)$$

que nos permite escribir

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \sum\sum \varepsilon^{ij} g_{1i} g_{2j}.$$

(Empleamos latín o griego según la variedad de valores sea 12 ó 123.)

EJERCICIOS

1. Por medio de 18.61 obténgase una fórmula para determinar el cofactor de x_α. Resuélvase cuando $\alpha = 3$.

2. Si $c^{ij} = c^{ji}$, $\sum\sum \varepsilon_{ij} c^{ij} = 0$. Por medio de la misma idea, justifíquese el paso $\sum\sum \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\beta} = 0$ en la evaluación anterior de $\sum \mathbf{r}^\alpha \times \mathbf{r}_\alpha$.

19

La geometría diferencial de las superficies

En este capítulo, el concepto de *curvatura* se extenderá de las curvas a las superficies. Realizaremos la extensión al considerar secciones planas de una superficie determinada, sobre todo secciones normales. Podemos trazar por la normal en un punto dado una infinidad de planos; podemos incluso imaginarnos a uno de esos planos en rotación continua alrededor de la normal. En general, tenemos que la curvatura de la sección varía de manera continua. En uno de los planos la curvatura toma su valor máximo, y en otro, el mínimo. Veremos que estos dos planos forman ángulos rectos y que el producto de las dos "curvaturas principales" determina en esencia la naturaleza de la superficie. Por ejemplo, esta "curvatura gaussiana" resulta ser positiva en una superficie oval, como la del elipsoide, cero en una superficie desarrollable, como la del cilindro o el cono, y negativa en una superficie con forma de silla de montar, como la del paraboloide hiperbólico.

19.1 EL EMPLEO DE DOS PARAMETROS EN UNA SUPERFICIE

Al determinar la posición de un punto en la superficie de la tierra se dan su latitud y su longitud. . . . Por los puntos del ecuador se trazan meridianos; por los puntos del meridiano de Greenwich, se trazan paralelos de latitud. La posición de un punto . . . queda determinada por las dos curvas, una de cada familia, que pasan por él. . . . Cada punto, con la excepción de los polos, adquiere dos coordenadas definidas. Podemos generalizar el método a cualquier superficie o, mejor dicho, a un fragmento de cualquier superficie: tomamos dos familias de curvas en la superficie, tales que por cada punto no pase más de una curva de cada familia . . . como si arrojáramos una red fina de pescar sobre la superficie.

H. G. Forder [3, pág. 133]

Se suele representar convenientemente una superficie $f(x, y, z) = 0$ por medio de un conjunto de tres ecuaciones paramétricas:

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2),$$

de donde se podría derivar la ecuación sencilla $f = 0$ al eliminar los *parámetros* u^1, u^2. Como hicimos antes, supondremos que las funciones que intervienen son continuas y que todas poseen las derivadas continuas que nos son precisas.

Tenemos un caso sencillo en la consideración de x y y como parámetros, de manera que las tres ecuaciones se convierten en

$$x = u^1, \quad y = u^2, \quad z = F(u^1, u^2),$$

donde la expresión de z resulta de la solución de la ecuación $f(x, y, z) = 0$ para z en términos de x y y. Una ecuación como

$$z = F(x, y)$$

se llama *forma de Monge* de la ecuación de una superficie. Por ejemplo, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se convierte en

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

La presencia de la raíz cuadrada hace de ésta una manera enfadosa de investigar la esfera. Resulta mucho mejor tomar u^1 y u^2 como colatitud y longitud de manera que

19.11 $\quad x = \operatorname{sen} u^1 \cos u^2, \qquad y = \operatorname{sen} u^1 \operatorname{sen} u^2, \qquad z = \cos u^1.$

(La colatitud u^1 significa la latitud $\frac{1}{2}\pi - u^1$.)

La ecuación vectorial de una superficie es

19.12 $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2),$$

de la manera en que teníamos que la ecuación vectorial de una curva era $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$. La diferencia esencial consiste en que la curva tiene un solo parámetro, mientras la superficie tiene dos parámetros independientes.

Una de las maneras de estudiar una superficie consiste en investigar las familias de curvas que se encuentra en ella. Entre éstas, tenemos las curvas *paramétricas*

$$u^1 = a \quad \text{y} \quad u^2 = b,$$

donde a y b son constantes arbitrarias. Por un punto dado suele pasar una curva paramétrica de cada clase, pero se admiten las excepciones. Por ejemplo, cuando se emplean en la esfera unitaria la colatitud y la longitud, las curvas $u^1 = a$ son las circunferencias que se llaman paralelos de latitud y las curvas $u^1 = b$ son las circunferencias de los círculos mayores, que se llaman *meridianos*. Casi todos los puntos de la esfera están en un "paralelo" y en un meridiano, pero los polos norte y sur están en todos los meridianos.

El vector de posición $\mathbf{r}$, de un punto de la superficie es una función vectorial de u^1 y u^2 Si empleamos el subíndice i para señalar la derivada parcial con respecto a u^i, tenemos

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1\, du^1 + \mathbf{r}_2\, du^2 = \sum \mathbf{r}_i\, du^i,$$

donde

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}.$$

La diferencial $d\mathbf{r}$ se puede considerar como el desplazamiento a lo largo de una curva dada por la superficie, o, con más precisión, el desplazamiento a lo largo de una tangente. En el caso de la curva paramétrica $u^2 = b$, tenemos $du^2 = 0$, de manera que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1\, du^1$. Por esto, $\mathbf{r}_1$ es un vector tangente a la curva en cuestión y, de la misma manera, $\mathbf{r}_2$ es un vector tangente a la otra curva paramétrica $u^1 = a$. De aquí se desprende que el plano $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$, al que abarcan nuestros dos vectores básicos y covariantes, es el *plano tangente* a la superficie en el punto que se considera, que es el punto $(u^1, u^2) = (a, b)$. Definimos en el mismo plano los dos vectores básicos y contravariantes $\mathbf{r}^i$ como normales a las curvas paramétricas, y los ajustamos de manera que

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \delta^i_j.$$

Hay, en el plano tangente, vectores que parten del punto de contacto en todas direcciones. De uno cualquiera de esos vectores

19.13 $$\mathbf{t} = \Sigma\, a_i\, \mathbf{r}^i = \Sigma\, a^i\, \mathbf{r}_i$$

se dice que tiene componentes covariantes a_i y componentes contravariantes a^i. Es fácil verificar (cf.§ 18.2) que

19.14 $$a_j = \mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_j, \qquad a^j = \mathbf{t} \cdot \mathbf{r}^j.$$

En particular, los mismos vectores básicos tienen componentes g_{ij}, g^{ij}, tales que

19.15
$$\mathbf{r}_i = \Sigma\, g_{ij}\, \mathbf{r}^j, \qquad \mathbf{r}^i = \Sigma\, g^{ij}\, \mathbf{r}_j,$$
$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \qquad g^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j.$$

En términos de las *magnitudes fundamentales de primer orden*

$$g_{11}, \quad g_{12} = g_{21}, \quad g_{22},$$

que se definen por medio de $g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$, tenemos la fórmula siguiente, que corresponde al elemento de arco ds (de cualquier curva de la superficie):

19.16
$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \Sigma\, \mathbf{r}_i\, du^i \cdot \Sigma\, \mathbf{r}_j\, du^j \\ &= \Sigma\Sigma g_{ij}\, du^i\, du^j \\ &= g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}\, du^1\, du^2 + g_{22}(du^2)^2. \end{aligned}$$

Las magnitudes fundamentales (que son funciones de los parámetros u^i) reciben colectivamente la denominación de tensor covariante. El tensor contravariante g^{ij} que le corresponde se determina por medio de la última parte de 19.15, que implica

$$\Sigma\, g_{ik}\, g^{ij} = \delta^j_k.$$

Con respecto a cada valor de j, tenemos un par de ecuaciones que se han de resolver para las dos incógnitas g^{ij} $(i = 1, 2)$. La solución es

$$g^{ij} = (\text{cofactor de } g_{ij} \text{ en } g)/g,$$

donde
$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2.$$

Puesto que el número de hileras (o columnas) del determinante es solamente 2, los cofactores son elementos singulares, y tenemos las expresiones explícitas

19.17 $$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}.$$

Es fácil ahora derivar las componentes covariantes del vector tangente $\mathbf{t}$ a partir de sus componentes contravariantes, o viceversa:

$$a_j = \mathbf{t}\cdot\mathbf{r}_j = \Sigma\, a^i\, \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_j = \Sigma\, g_{ij}\, a^i,$$
$$a^j = \mathbf{t}\cdot\mathbf{r}^j = \Sigma\, a_i\, \mathbf{r}^i\cdot\mathbf{r}^j = \Sigma\, g^{ij}\, a_i.$$

Podemos, por supuesto, intercambiar i y j, de manera que

19.18 $$a_i = \Sigma\, g_{ij}\, a^j, \qquad a^i = \Sigma\, g^{ij}\, a_j.$$

Puesto que $g_{12} = \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2$, donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son tangentes a las curvas paramétricas, la condición para que se intersecten las dos familias de curvas paramétricas en ángulos rectos es

$$g_{12} = 0.$$

De esta manera, tenemos sencillamente en el caso de las curvas paramétricas ortogonales

$$g = g_{11}\, g_{22}, \quad g^{12} = 0, \quad g^{ii} = 1/g_{ii},$$

de donde, por 19.15,

$$\mathbf{r}^i = g^{ii}\, \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i/g_{ii}.$$

EJERCICIOS

1. El vector básico $\mathbf{r}_i$ tiene por componentes covariantes g_{ij} y por componentes contravariantes δ^j_i.
2. $\Sigma\, \mathbf{r}^j \times \mathbf{r}_j = \mathbf{0}$. Interprétese geométricamente esta expresión en términos de áreas de triángulos.
3. Encuéntrense $\mathbf{r}^1$ y $\mathbf{r}^2$ con respecto a la superficie general de revolución

$$\mathbf{r} = (u^1 \cos u^2, \quad u^1 \operatorname{sen} u^2, \quad z),$$

donde z es una función solamente de u^1.
4. Encuéntrense g_{ij} y g^{ij} con respecto a la esfera unitaria; exprésense en términos de colatitud y longitud.

19.2 DIRECCIONES EN UNA SUPERFICIE

De la manera en que se determina una curva en el plano (x, y) por medio de una ecuación que relaciona a x y y, en la superficie 19.12 se determina

una curva por medio de una ecuación que relaciona a u^1 y u^2. Una ecuación diferencial determina una familia de curvas. En general, una ecuación diferencial de primer grado y primer orden

$$\Sigma\, c_i\, du^i = 0$$

determina una familia de curvas del mismo parámetro: una por cada punto de posición general de la superficie, que parte de ese punto con una dirección determinada por $du^2/du^1 = -c_1/c_2$; por ejemplo, la ecuación

$$du^2 = 0$$

determina la "primera familia" de curvas paramétricas. Por otra parte, una ecuación de primer orden y de segundo grado

19.21 $$\Sigma\Sigma\, c_{ij}\, du^i\, du^j = 0,$$

donde $c_{12} = c_{21}$ y $c_{11}c_{22} < c_{12}{}^2$, determina una *red* de curvas: dos de las cuales pasan por un punto general de la superficie; por ejemplo, la ecuación cuadrática

$$du^1\, du^2 = 0$$

determina una red que consta de las dos familias de curvas paramétricas cuando se toman ambas a un tiempo.

Hemos visto que los vectores $\mathbf{r}_i$ están colocados en las direcciones de las tangentes a las curvas paramétricas. Puesto que

$$\mathbf{r}_i{}^2 = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = g_{ii},$$

sus longitudes son $\sqrt{g_{ii}}$. Debido a que surge con frecuencia, emplearemos como abreviatura g_i para significar esta raíz cuadrada; así,

$$g_i = \sqrt{g_{ii}} = |\mathbf{r}_i|,$$

y de manera análoga,

$$g^i = \sqrt{g^{ii}} = |\mathbf{r}^i|.$$

Con esta notación, tenemos que los vectores *unitarios* tangentes a las curvas paramétricas (que tocan $du^2 = 0$ y $du^1 = 0$ respectivamente) son

$$\mathbf{r}_1/g_1 \quad y \quad \mathbf{r}_2/g_2.$$

El ángulo ϕ en el que se cortan las dos curvas paramétricas se determina por medio de

19.22 $$\cos\phi = \frac{\mathbf{r}_1}{g_1}\cdot\frac{\mathbf{r}_2}{g_2} = \frac{g_{12}}{g_1\, g_2}.$$

A partir de 19.17, vemos que $g^1 = g_2/\sqrt{g}$, $g^2 = g_1/\sqrt{g}$; por lo tanto

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\sqrt{g}}{g_1\, g_2} = \frac{1}{g_1\, g^1} = \frac{1}{g_2\, g^2},$$

es decir,

$$g_1 g^1 = g_2 g^2 = \csc\phi.$$

De la definición de producto exterior se desprende que la longitud del vector $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ es

19.23 $$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = g_1 g_2 \operatorname{sen} \phi = \sqrt{g}.$$

y que el elemento de *área* de la superficie (que se define con naturalidad como el elemento de área en el plano tangente) es

19.24 $$dS = |\mathbf{r}_1 du^1 \times \mathbf{r}_2 du^2| = \sqrt{g}\, du^1 du^2$$

[Kreyszig I, págs. 111–117]. La ecuación 19.23, en la forma

$$g = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2,$$

constituye en ocasiones un medio útil de calcular g sin tener que encontrar antes g_{ij}.

El desplazamiento a lo largo de una curva cualquiera de la superficie está dado por

$$d\mathbf{r} = \Sigma\, \mathbf{r}_i\, du^i.$$

Si denotamos por s el arco de la curva, el vector unitario tangente será

19.25 $$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \Sigma\, a^i\, \mathbf{r}_i = a^1\, \mathbf{r}_1 + a^2\, \mathbf{r}_2,$$

donde

19.251 $$a^i = \frac{du^i}{ds} \qquad (i = 1, 2).$$

De esta manera, las derivadas de arco de los parámetros constituyen las componentes contravariantes de $\mathbf{t}$. No trataremos de encontrar la interpretación correspondiente acerca de las componentes covariantes a_i, que se determinan por medio de 19.14 o de 19.18. Por otra parte, resulta fácil dar la interpretación *geométrica* de las dos clases de componentes. Sean $\overrightarrow{PQ}_1$ y $\overrightarrow{PQ}_2$ vectores tangentes a las curvas paramétricas, de longitudes tales que PT, que representa a $\mathbf{t}$, es una diagonal del paralelogramo PQ_1TQ_2, como se puede ver en la figura 19.2*a*. Sea $\mathbf{t}$ tal que divida el ángulo $\phi = \angle Q_1PQ_2$ en dos partes, θ y $\phi - \theta$. Sea PR_1TR_2 un paralelogramo cuyos lados son paralelos a las tangentes. Puesto que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PT} = \mathbf{t} &= a^1\, \mathbf{r}_1 + a^2\, \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{PQ}_1 + \overrightarrow{PQ}_2 \\ &= a_1\, \mathbf{r}^1 + a_2\, \mathbf{r}^2 = \overrightarrow{PR}_1 + \overrightarrow{PR}_2.\end{aligned}$$

las longitudes de las diversas rectas son:

$$PQ_i = g_i\, a^i, \quad PR_i = g^i\, a_i, \quad PS_i = \mathbf{t}\cdot\mathbf{r}_i/g_i = a_i/g_i.$$

Los ángulos se determinan por medio de

$$\cos\theta = PS_1, \qquad \cos(\phi - \theta) = PS_2.$$

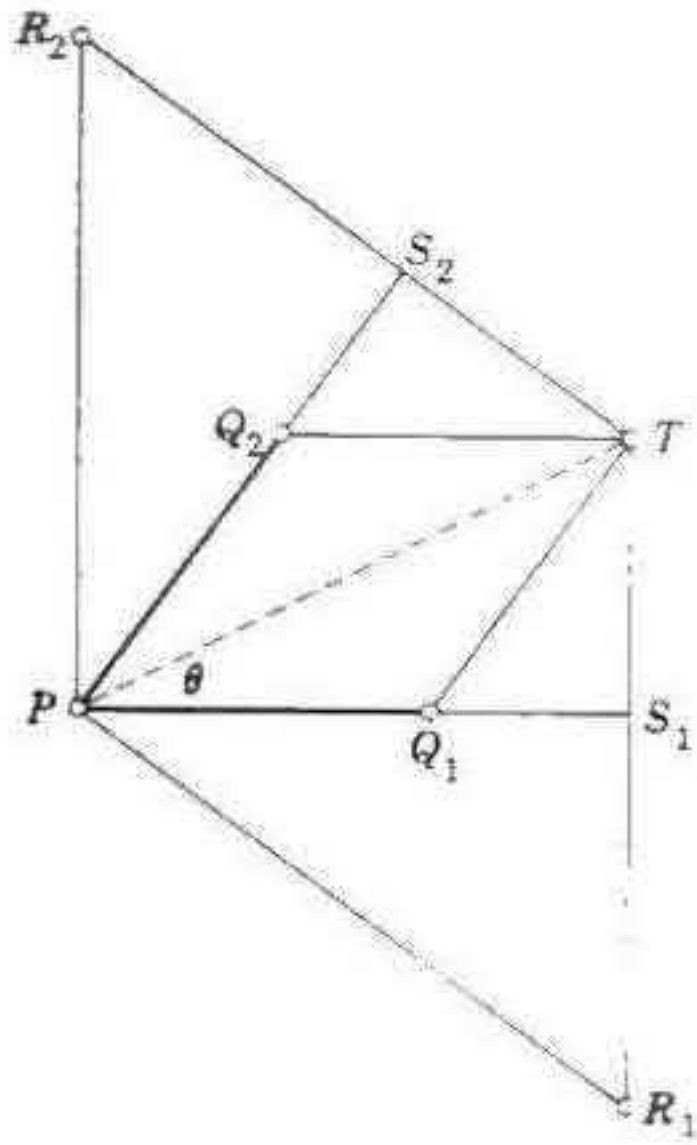


Figura 19.2a

Al tomar de diversas maneras el producto interior 19.13 consigo mismo, podemos expresar la relación obvia $\mathbf{t}^2 = 1$ en las formas equivalentes

19.26 $$\Sigma\Sigma\, g^{ij} a_i a_j = \Sigma\, a_i a^i = \Sigma\Sigma\, g_{ij} a^i a^j = 1.$$

En virtud de 19.25, la última de estas relaciones no es sino un nuevo enunciado de 19.16.

De la misma manera, al elaborar el producto interior de dos de los vectores unitarios tangentes

$$\Sigma\, a_i \mathbf{r}^i = \Sigma\, a^i \mathbf{r}_i \quad \text{y} \quad \Sigma\, b_j \mathbf{r}^j = \Sigma\, b^j \mathbf{r}_j,$$

obtenemos diversas expresiones del coseno del ángulo que forman:

19.27 $$\Sigma\Sigma\, g^{ij} a_i b_j = \Sigma\, a_i b^i = \Sigma\, a_j b^j = \Sigma\Sigma\, g_{ij} a^i b^j = \Sigma\, a^i b_i.$$

Al eliminar ds de las dos ecuaciones 19.251, obtenemos la ecuación diferencial

$$a^2\, du^1 - a^1\, du^2 = 0$$

de una familia de curvas cuya tangente característica se determina por medio de 19.25. Otra familia, que corta a todos los miembros de la primera en ángulos rectos, tiene la ecuación diferencial

19.28 $$b^2\, du^1 - b^1\, du^2 = 0,$$

donde, por 19.27,

$$\Sigma\Sigma\, g_{ij} a^i b^j = 0.$$

Si escribimos esta relación en la forma $\Sigma\, a_j b^j = 0$ ó

$$a_1 b^1 + a_2 b^2 = 0.$$

donde $a_j = \Sigma\, g_{ij}a^i$, encontramos que la ecuación 19.28 equivale a

$$a_1\, du^1 + a_2\, du^2 = 0.$$

Dicho de otra manera,

Las trayectorias ortogonales de las curvas $a^2du^1 - a^1du^2 = 0$ *son las curvas*

$$\Sigma\, a_i\, du^i = 0.$$

De donde también se desprende que las dos familias de curvas

$$\Sigma\, a_i\, du^i = 0, \qquad \Sigma\, b_j\, du^j = 0$$

serán ortogonales si y sólo si

19.29 $$\Sigma\Sigma\, g^{ij}\, a_i\, b_j = 0.$$

La red de curvas que se determina mediante la ecuación diferencial y cuadrática 19.21 será una red *ortogonal* si y sólo si

19.291 $$\Sigma\Sigma\, g^{ij}\, c_{ij} = 0.$$

Esto se comprende al observar que esta condición es la misma que 19.29 si se factoriza la expresión cuadrática en la forma

$$\Sigma\Sigma\, c_{ij}\, du^i\, du^j = \Sigma\, a_i\, du^i \cdot \Sigma\, b_j\, du^j,$$

de manera que $$c_{ij} + c_{ji} = a_i\, b_j + a_j\, b_i.$$

EJERCICIOS

1. Por medio de 17.13, demuéstrese que $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2 = g$ (cf. 19.23).
2. Exprésese tan ϕ en términos de las magnitudes fundamentales g_{ij} y su determinante g.
3. En la figura 19.2*a*, $TS_1 = a^2/g^2$ y $TS_2 = a^1/g^1$.
4. Concíliense las fórmulas

$$\cos\theta = a_1/g_1, \quad \cos(\phi - \theta) = a_2/g_2,$$
$$\operatorname{sen}\theta = a^2/g^2, \quad \operatorname{sen}(\phi - \theta) = a^1/g^1$$

con 19.22.

5. La red de curvas que bisecan los ángulos que forman las curvas paramétricas ($du^1\, du^2 = 0$) se determina por medio de la ecuación diferencial

$$g_{11}\,(du^1)^2 - g_{22}\,(du^2)^2 = 0.$$

(*Indicación*: encuéntrese la condición para que el paralelogramo PQ_1TQ_2 sea un rombo.)

6. Interprétese la ecuación 19.21 en el caso en el que $c_{11} = c_{22} = 0$. ¿Qué podemos deducir de la condición 19.291 en este caso? ¿Qué nos dice acerca de las curvas que describimos en el ejercicio anterior?
7. Por medio de 19.24 demuéstrese que el área de la esfera unitaria es de 4π.

19.3 CURVATURA NORMAL

El vector *normal* unitario $\mathbf{n}$ en un punto P de la superficie se define con naturalidad como el vector unitario perpendicular al plano tangente en una

dirección tal que los tres vectores $\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \mathbf{n}$ forman un triedro dextrógiro. Por 19.23, tenemos que $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \sqrt{g}\,\mathbf{n}$, de manera que

19.31
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g}},$$
$$[\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \mathbf{n}] = \sqrt{g},$$

y

19.32
$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = \varepsilon_{ij}\sqrt{g}\,\mathbf{n} \qquad (\varepsilon_{ij} = j - i).$$

Al identificar el triedro $\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \mathbf{n}$ con el triedro $\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \mathbf{r}_3$ de § 18.1, podemos ver, a partir de 18.12, que

$$\mathbf{r}^1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{n}}{\sqrt{g}}, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}_1}{\sqrt{g}}, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g}} = \mathbf{n} = \mathbf{r}_3.$$

Y de esta manera,

19.33
$$\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i = \Sigma\, \varepsilon_{ij}\sqrt{g}\ \mathbf{r}^j.$$

El plano tangente en P contiene un haz plano de tangentes

$$\mathbf{t} = \Sigma\, a^i \mathbf{r}_i$$

cada una de las que determina un plano normal $\mathbf{tn}$. La sección de la superficie por uno de estos planos se llama sección normal; constituye una curva plana; su curvatura κ en P se llama *curvatura normal* en P en la dirección $\mathbf{t}$. Al diferenciar con respecto al arco s de la sección normal, obtenemos

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{d}{ds}\Sigma\, a^i \mathbf{r}_i = \Sigma \frac{da^i}{ds}\mathbf{r}_i + \Sigma\, a^i \frac{d}{ds}\mathbf{r}_i.$$

Por 17.33, esto no es sino $\kappa\mathbf{n}$. Puesto que $\mathbf{n}$ es perpendicular a $\mathbf{r}_i$, la multiplicación interior por $\mathbf{n}$ eliminará la primera suma de la derecha. (Para diferenciar $\mathbf{r}_i$ empleamos el operador

$$\frac{d}{ds} = \Sigma\, a^j \frac{\partial}{\partial u^j},$$

donde $a^j = du^j/ds$.) De esta manera, nos queda

$$\kappa = \kappa\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n} = \Sigma\left(a^i \frac{d}{ds}\mathbf{r}_i\right)\cdot\mathbf{n}$$
$$= \Sigma\left(a^i\, \Sigma\, a^j \frac{\partial}{\partial u^j}\mathbf{r}_i\right)\cdot\mathbf{n} = \Sigma\Sigma\, a^i a^j \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i\, \partial u^j}\cdot\mathbf{n} = \Sigma\Sigma\, a^i a^j \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{n}.$$

Si introducimos la notación

19.34
$$b_{ij} = \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{n} \qquad (i, j = 1, 2)$$

que es importante, tendremos la fórmula sencilla

19.35
$$\kappa = \Sigma\Sigma\, b_{ij}\, a^i a^j$$

para determinar la curvatura normal en la dirección $\Sigma a^i \mathbf{r}_i$. Puesto que $\mathbf{r}_{ij}$ es una segunda derivada,

$$b_{ij} = b_{ji}.$$

Las tres funciones b_{11}, b_{12}, b_{22} se conocen como *magnitudes fundamentales de segundo orden*. Como las de primer orden, se presentan como coeficientes de una forma diferencial cuadrática

19.36
$$\begin{aligned} \kappa\, ds^2 &= \Sigma\Sigma\, b_{ij}\, du^i\, du^j \\ &= b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}\, du^1\, du^2 + b_{22}(du^2)^2. \end{aligned}$$

(No hay que olvidar que la curvatura normal κ depende de la dirección de la tangente, y, por lo tanto, de $du^1 : du^2$.)

Al diferenciar la identidad $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n} = 0$, obtenemos

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j = 0,$$

de donde
$$b_{ij} = -\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j = -\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_j.$$

Además del "tensor covariante" b_{ij}, resultará conveniente, en ocasiones, considerar el "tensor mixto"

19.37
$$b_j^k = \Sigma\, g^{ik}\, b_{ij} = -\Sigma\, g^{ik}\, \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j = -\mathbf{r}^k \cdot \mathbf{n}_j$$

y el "tensor contravariante"

19.371
$$\begin{aligned} b^{ik} &= \Sigma\, g^{ij}\, b_j^k = \Sigma\Sigma\, g^{ij}\, g^{kl}\, b_{jl} \\ &= \Sigma\Sigma\, g^{kl}\, g^{ji}\, b_{jl} = \Sigma\, g^{kl}\, b_l^i = b^{ki}. \end{aligned}$$

La derivada $\mathbf{n}_i$, que es perpendicular a la normal $\mathbf{n}$, es un vector tangente susceptible de expresarse como combinación lineal de los vectores básicos $\mathbf{r}^j$ o $\mathbf{r}_j$. Puesto que las componentes covariantes y contravariantes son

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_j = -b_{ij}, \qquad \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}^j = -b_i^j,$$

las expresiones son

19.38
$$\mathbf{n}_i = -\Sigma\, b_{ij}\, \mathbf{r}^j = -\Sigma\, b_i^j\, \mathbf{r}_j.$$

De esta manera, hemos llegado a las "ecuaciones de Weingarten"

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= -b_1^1\, \mathbf{r}_1 - b_1^2\, \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{n}_2 &= -b_2^1\, \mathbf{r}_1 - b_2^2\, \mathbf{r}_2, \end{aligned}$$

que expresan las derivadas de la normal $\mathbf{n}$ en términos de las derivadas del vector de posición $\mathbf{r}$.

EJERCICIOS

1. Evalúese $\mathbf{r}^1 \times \mathbf{r}^2$.
2. Obténgase b_{ij} con respecto a la esfera unitaria en términos de colatitud y de longitud. Verifíquese que la curvatura normal es la misma en todas las direcciones, así como en todos los puntos de la esfera. (*Indicación*: puesto que $\mathbf{n} = \mathbf{r}$, $b_{ij} = -g_{ij}$.)

19.4 CURVATURAS PRINCIPALES

Tómese la esfera unitaria y trácese un radio paralelo a la normal en un punto P de una superficie [dada]. *El radio corta la esfera en la* representación esférica *de P. Es evidente que habremos de distinguir entre los dos lados de la superficie, y trazaremos la normal en el lado que escojamos. Por medio de esta representación, tenemos, en general, una curva de la superficie en correspondencia con una curva de la esfera, y un fragmento de una con un fragmento de la otra. Pero debido a que las normales a la superficie pueden ser paralelas en puntos distintos, los fragmentos de la esfera se pueden traslapar, aunque correspondan a fragmentos de la superficie que no se traslapan. Sin embargo, si tomamos fragmentos en la superficie que no sean demasiado grandes, no pasará eso. . . . A un fragmento pequeño alrededor de P en la superficie corresponderá un fragmento pequeño en la esfera, y la razón del área de la segunda a la de la primera cuando las áreas disminuyen hasta cero tiende a la curvatura total en P.*

H. G. Forder [3, págs. 139–140]

Considérese un plano variable que pasa por la normal en el punto P de una superficie dada. Con respecto a cada posición del plano, la sección normal tiene una curvatura κ que se determina por medio de 19.35. En casos de excepción (por ejemplo, los polos norte y sur de un esferoide) puede suceder que κ permanezca constante; entonces el punto P se llama *umbílico*. Cuando P no es umbílico, la rotación continua del plano normal $\mathbf{n}\mathbf{t}$ hace que κ varíe de manera que vuelva a tomar su valor original en cuanto realiza un semigiro completo. Si nos valemos de 19.26, podremos expresar 19.35 en la forma homogénea

$$\kappa \sum\sum g_{ij} a^i a^j = \sum\sum b_{ij} a^i a^j$$

o bien,

19.41 $$\sum\sum (b_{ij} - \kappa g_{ij}) a^i a^j = 0.$$

Esto nos muestra a κ como función continua de la razón

$$\frac{a^2}{a^1} = \frac{du^2}{du^1},$$

que determina la dirección de la tangente

$$\mathbf{t} = \sum a^i \mathbf{r}_i.$$

En el curso de su variación continua, la curvatura κ debe llegar, por lo menos, a un máximo y a un mínimo. Demostraremos en seguida que no hay más que uno de cada uno, y que ocurren en direcciones perpendiculares. Los valores máximo y mínimo de κ se llaman *curvaturas principales*, las posiciones de $\mathbf{t}$ en las que ocurren se llaman *direcciones principales* y las curvas

cuya dirección es siempre principal se llaman (tal vez no muy acertadamente) *líneas de curvatura*.*

Por el momento, abreviaremos mediante

$$c_{ij} = b_{ij} - \kappa g_{ij},$$

de manera que $c_{ij} = c_{ji}$. Con el objeto de encontrar las curvaturas y direcciones principales, podemos diferenciar 19.41 e igualar a continuación $d\kappa = 0$ o, lo que resulta más conveniente, diferenciar 19.41 mientras se considera a κ constante. Puesto que b_{ij} y g_{ij} no dependen sino del punto fijo P, esto significa que diferenciamos

$$\Sigma\Sigma\, c_{ij}\, a^i\, a^j = 0$$

donde tratamos los coeficientes c_{ij} como si fueran constantes. Al diferenciar parcialmente con respecto a a^k, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a^k}\ \Sigma\Sigma\ c_{ij}\, a^i\, a^j &= \Sigma\Sigma\ c_{ij}\left(\frac{\partial a^i}{\partial a^k}\, a^j + a^i\, \frac{\partial a^j}{\partial a^k}\right)\\ &= \Sigma\Sigma\, c_{ij}(\delta^i_k a^j + a^i\, \delta^j_k) = \Sigma\, c_{kj}\, a^j + \Sigma\, c_{ik}\, a^i\\ &= \Sigma(c_{ki} + c_{ik})a^i = 2\Sigma\, c_{ik}\, a^i.\end{aligned}$$

Y al volver a la expresión propia de c_{ik}, deducimos que

19.42 $$\Sigma\,(b_{ik} - \kappa g_{ik})\, a^i = 0 \qquad (k = 1, 2).$$

Si multiplicamos por g^{jk} (y sumamos sobre κ) para eliminar el coeficiente g_{ik}, obtenemos

19.43 $$\Sigma\,(b^j_i - \kappa\delta^j_i)\, a^i = 0,$$

es decir,

19.44 $$\Sigma\, b^j_i\, a^i - \kappa a^j = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

A partir de estas dos ecuaciones, podemos encontrar las curvaturas principales si eliminamos a^2/a^1, y las direcciones principales si eliminamos κ.

Escritas en detalle, las ecuaciones son:

$$(b^1_1 - \kappa)\, a^1 + b^1_2\, a^2 = 0,$$

$$b^2_1\, a^1 + (b^2_2 - \kappa)\, a^2 = 0.$$

Al eliminar a^2/a^1, obtenemos

$$\begin{vmatrix} b^1_1 - \kappa & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 - \kappa \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

19.45 $$\kappa^2 - \Sigma\, b^i_i\, \kappa + \det(b^j_i) = 0.$$

Las dos raíces de esta ecuación cuadrática consisten en las curvaturas

* *Lines of curvature*, en inglés. El desacierto proviene de que en este idioma *line* suele significar línea recta. (*T*)

principales $\kappa_{(1)}, \kappa_{(2)}$, cuyo producto y media aritmética se conocen por el nombre de *curvatura gaussiana* K y *curvatura media* H. De esta manera, $\kappa_{(1)}$ y $\kappa_{(2)}$ son las raíces de la ecuación

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0,$$

donde

19.46 $$2H = \kappa_{(1)} + \kappa_{(2)} = \Sigma b_i^i = b_1^1 + b_2^2$$

y

19.47 $$K = \kappa_{(1)}\,\kappa_{(2)} = \det(b_i^j) = b_1^1\, b_2^2 - b_2^1\, b_1^2.$$

Puesto que

$$gK = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b,$$

si convenimos en ello, otra expresión de K consiste en la razón de los dos determinantes fundamentales:

19.471 $$K = \frac{b}{g}.$$

Cuando K es positiva, la curvatura normal (que nunca sobrepasa los valores se limitan $\kappa_{(1)}$ y $\kappa_{(2)}$) tiene el mismo signo en todas las direcciones; el plano tangente en P corta la superficie "instantáneamente" en P y en ninguna otra parte en la vecindad de P. Se dice, en estas circunstancias, que la superficie es *sinclástica* (u "oval"). Los elipsoides, los paraboloides elípticos y los hiperboloides de dos hojas son superficies sinclásticas en todos sus puntos.

Cuando K es negativa, la curvatura normal cambia de signo dos veces (durante la rotación del plano normal que recorre un semigiro alrededor de la normal en P); es, por lo tanto, cero en las direcciones de dos tangentes especiales, que se llaman *tangentes inflexionales* en P. La superficie corta al plano tangente, y su sección por este plano consiste en un par de curvas que se cortan en P, puesto que las dos tangentes en este "nodo" son las tangentes inflexionales.

En la práctica, tenemos un ejemplo en la forma general del suelo en la cumbre del desfiladero entre dos montañas. El plano tangente es el plano horizontal, que toca la curva del sendero y corta el suelo en ambos lados. El hecho de que la sección tangente contenga un nodo se puede ver en un mapa en el que se han trazado curvas de nivel. El desfiladero se encuentra en el lugar en el que una de las curvas de nivel se corta a sí misma [Hardy **1**, pág. 65].

Se dice que una de estas superficies es *anticlástica* (o con "forma de silla de montar"). Las cuádricas regladas que no han degenerado (a saber, los paraboloides hiperbólicos y los hiperboloides de una hoja) son anticlásticas en todos sus puntos.

Las superficies más complicadas que las cuádricas pueden ser sinclásticas en algunas regiones y anticlásticas en otras. Las regiones de las dos clases quedan separadas, entonces, por un lugar geométrico de puntos *parabólicos* en los que $K = 0$. Hilbert y Cohn–Vossen [**1**, pág. 197] muestran un busto

de Apolo en el que se han trazado las curvas de los puntos parabólicos. Son bastante complicadas, sobre todo alrededor de la nariz y la boca.

Las superficies en las que $K = 0$ en todos los puntos se llaman *desarrollables*. Superficies de éstas son los conos y los cilindros, así como la superficie que describen las tangentes de una curva torcida cualquiera.

Las ecuaciones de Weingarten de 19.38 constituyen una expresión que se puede utilizar para expresar la curvatura gaussiana como un producto triple:

19.48 $$K = [\mathbf{n}\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{n}_2]/\sqrt{g}.$$

De hecho,

$$\begin{aligned}[\mathbf{n}\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{n}_2] &= [\mathbf{n}\ \ \Sigma\, b_1^j \mathbf{r}_j\ \ \Sigma\, b_2^k \mathbf{r}_k] \quad = \Sigma\Sigma\, b_1^j b_2^k [\mathbf{n}\,\mathbf{r}_j\,\mathbf{r}_k] \\ &= \Sigma\Sigma\, b_1^j b_2^k \varepsilon_{jk} \sqrt{g} \quad = \det(b_i^j)\sqrt{g} \\ &= K\sqrt{g}.\end{aligned}$$

Otra expresión, en la que interviene un vector tangente unitario que se escoge arbitrariamente y se denota por $\mathbf{t}$, fue descubierta por A. J. Coleman:

19.49 $$\sqrt{g}\,K = \Sigma\Sigma\, \varepsilon^{ij} [\mathbf{n}\,\mathbf{t}\,\mathbf{t}_i]_j.$$

donde el subíndice final indica la diferenciación con respecto a u^j. Esto se deduce a partir de la identidad de Lagrange 17.13 al introducir otro vector tangente unitario $\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$, de manera que $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{m}$ y

$$\begin{aligned}[\mathbf{n}\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{n}_2] &= (\mathbf{t} \times \mathbf{m})\cdot(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \\ &= \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}_1\, \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}_2 - \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}_2\, \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}_1 \\ &= \Sigma\Sigma\, \varepsilon^{ij}\, \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}_i\, \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}_j.\end{aligned}$$

Al diferenciar, $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0$, si empleamos 17.19 veremos que

$$\begin{aligned}\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}_i\, \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}_j &= \mathbf{t}_i\cdot\mathbf{n}\, \mathbf{m}_j\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}_i\cdot\mathbf{n}\, \mathbf{n}\cdot\mathbf{m}_j \\ &= \mathbf{t}_i\cdot\mathbf{m}_j = (\mathbf{t}_i\cdot\mathbf{m})_j - \mathbf{t}_{ij}\cdot\mathbf{m}.\end{aligned}$$

Puesto que $\Sigma\Sigma\, \varepsilon^{ij}\, \mathbf{t}_{ij} = 0$, de esto se desprende que

$$\begin{aligned}\sqrt{g}\,K &= \Sigma\Sigma\, \varepsilon^{ij} (\mathbf{t}_i\cdot\mathbf{m})_j = \Sigma\Sigma\, \varepsilon^{ij} (\mathbf{m}\cdot\mathbf{t}_i)_j \\ &= \Sigma\Sigma\, \varepsilon^{ij} [\mathbf{n}\,\mathbf{t}\,\mathbf{t}_i]_j.\end{aligned}$$

(Hemos intercambiado la $\mathbf{t}$ y la $\mathbf{m}$ de Kreyszig [1, pág. 146].)

Puesto que $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ es paralelo a $\mathbf{n}$, podemos expresar 19.48 en la forma

$$|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2| = |K|\sqrt{g}.$$

que puede servir para establecer la interpretación geométrica de Gauss acerca de K. Para obtener su *representación esférica* de una superficie, Gauss tomó el lugar geométrico del extremo Q de un vector

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{n},$$

donde O es un punto fijo y $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en el punto P, que

varía en la superficie en cuestión. [Hilbert y Cohn–Vossen 1, págs. 193–196]. Cuando P se desplaza por una región suficientemente pequeña, F, que está limitada por una curva simple cerrada en la superficie, Q se desplaza por una región correspondiente G de la esfera unitaria cuyo centro es O. Gauss definió la *curvatura total* de la superficie en el punto P como el límite de la razón de las áreas de G y F cuando estas regiones disminuyen hasta ser simples puntos. Por 19.24, el área de F es

$$\iint |\mathbf{r}_1\, du^1 \times \mathbf{r}_2\, du^2| = \iint \sqrt{g}\, du^1\, du^2.$$

Y, de manera análoga, el área de G es

$$\iint |\mathbf{n}_1\, du^1 \times \mathbf{n}_2\, du^2| = \iint |K| \sqrt{g}\, du^1\, du^2.$$

En consecuencia, el límite de la razón es $|K|$.

La propiedad característica de una superficie desarrollable consiste en que, en lugar de tener una familia biparamétrica de planos tangentes, no tiene más que una familia de planos tangentes de un solo parámetro, y por ende, una familia de normales de un parámetro. En este caso, G no es una región propia, sino simplemente un arco, y, por lo tanto $K = 0$.

Si se tiene que las curvas paramétricas son ortogonales, de manera que $g_{12} = 0$, entonces $g^{11} = 1/g_{11}$, $g^{12} = 0$, $g^{22} = 1/g_{22}$, de donde, por 19.37,

$$b^j_i = \Sigma\, g^{jk} b_{ik} = g^{jj} b_{ij} = b_{ij}/g_{jj}.$$

En este caso, la curvatura media H se determina por medio de

$$2H = \Sigma\, b^j_j = \frac{b_{11}}{g_{11}} + \frac{b_{22}}{g_{22}}.$$

EJERCICIOS

1. Encuéntrese la curvatura media H en un punto cualquiera del helicoide $y = x \tan (z/c)$, con la forma paramétrica

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \operatorname{sen} u^2, \quad z = cu^2.$$

2. Encuéntrese la curvatura media H en un punto dado de la superficie general de revolución

$$\mathbf{r} = (u^1 \cos u^2, \quad u^1 \operatorname{sen} u^2, \quad z),$$

donde z es función solamente de u^1. Esta curvatura media es cero cuando z se determina por medio de

$$u^1 = a \cosh (z - c)/a,$$

por ejemplo, cuando la superficie es un catenoide.

3. Ubíquense las curvas de puntos parabólicos del toro

$$x = (a + b \cos u^1) \cos u^2, \quad y = (a + b \cos u^1) \operatorname{sen} u^2, \quad z = b \operatorname{sen} u^1.$$

4. Las tangentes $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$ de una curva torcida $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ generan una superficie

$$\mathbf{r}(s, u) = \mathbf{r}(s) + u\,\mathbf{t}(s).$$

Por medio de los parámetros s y u obténganse las magnitudes fundamentales

$$b_{11} = \kappa\tau u, \qquad b_{12} = b_{22} = 0.$$

Dedúzcase que en todos los puntos $K = 0$.

5. Las curvaturas media y gaussiana se relacionan mediante la desigualdad

$$H^2 \geqslant K.$$

¿Qué clase de punto es tal que en él encontramos $H^2 = K$? (*Indicación*: $H^2 - K = \frac{1}{4}(\kappa_{(1)} - \kappa_{(2)})^2$.)

6. Obténgase 19.48 de otra manera al aplicar la identidad de Lagrange a $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$.

7. Obténgase 19.49 de otra manera al aplicar 17.62 en la forma

$$\mathbf{t}_i = \nu_i \mathbf{m} - \mu_i \mathbf{n}, \quad \mathbf{m}_i = \lambda_i \mathbf{n} - \nu_i \mathbf{t}, \quad \mathbf{n}_i = \mu_i \mathbf{t} - \lambda_i \mathbf{m}$$

(donde λ_i, μ_i, ν_i son funciones de u^1 y u^2, de manera que

$$[\mathbf{n}\ \mathbf{n}_1\ \mathbf{n}_2] = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{t}_1 - \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{t}_2.$$

19.5 DIRECCIONES PRINCIPALES Y LINEAS DE CURVATURA

Al volver a 19.44, que se puede expresar como

$$\Sigma\, b_j^k\, a^j = \kappa a^k \qquad (k = 1, 2),$$

encontramos que la manera más fácil de eliminar κ consiste en multiplicar por $\Sigma\, \varepsilon_{ik}\, a^i$ y sumar sobre κ, de manera que obtengamos

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, \varepsilon_{ik}\, b_j^k\, a^i\, a^j = \kappa\, \Sigma\Sigma\, \varepsilon_{ik}\, a^i\, a^k = 0.$$

(Esta suma es cero debido a que en los únicos términos que no se anulan intervienen $\varepsilon_{12}\, a^1\, a^2$ y $\varepsilon_{21}\, a^2\, a^1$, que se cancelan.) Así, tenemos que las direcciones principales $\Sigma a^i\, \mathbf{r}_i$ se determinan por medio de las raíces de la ecuación cuadrática

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, \varepsilon_{ik}\, b_j^k\, a^i\, a^j = 0$$

al resolverla para los valores de $a^1 : a^2$. Dicho de otra manera, las líneas de curvatura se determinan por medio de la ecuación diferencial

19.51 $$\Sigma\Sigma\Sigma\, \varepsilon_{ik}\, b_j^k\, du^i\, du^j = 0$$

o

19.52 $$-b_1^2\,(du^1)^2 + (b_1^1 - b_2^2)\, du^1\, du^2 + b_2^1\,(du^2)^2 = 0.$$

Para demostrar que las líneas de curvatura forman una *red ortogonal*, podemos aplicar el criterio de 19.291 ya sea a 19.51 o a 19.52 si empleamos

$$c_{ij} = \Sigma\, \varepsilon_{ik}\, b_j^k.$$

Con la notación de 19.371, obtenemos

$$\Sigma\Sigma\, g^{ij}\, c_{ij} = \Sigma\Sigma\Sigma\, \varepsilon_{ik}\, g^{ij}\, b_j^k = \Sigma\Sigma\, \varepsilon_{ik}\, b^{ik} = 0.$$

De donde se desprende que, en un punto P cualquiera de una superficie, *las dos direcciones principales son perpendiculares.*

Tenemos otra consecuencia de 19.44 en la fórmula de Rodrigues

19.53 $$d\mathbf{n} + \kappa\, d\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

donde se ve lo que sucede con el vector normal $\mathbf{n}$ cuando $\mathbf{r}$ se desplaza en una dirección principal. (El coeficiente κ es la curvatura principal correspondiente.) De hecho, al combinar las ecuaciones de Weingarten

$$\mathbf{n}_i = -\Sigma\, b_i^j\, \mathbf{r}_j$$

(19.38) con 19.44 en la forma

19.54 $$\Sigma\, b_i^j\, du^i = \kappa\, du^j,$$

obtenemos

$$d\mathbf{n} = \Sigma\, \mathbf{n}_i\, du^i = -\Sigma\Sigma\, b_i^j\, \mathbf{r}_j\, du^i$$
$$= -\kappa\Sigma\, \mathbf{r}_j\, du^j = -\kappa\, d\mathbf{r}.$$

(Olinde Rodrigues, 1794–1851.)

De donde se desprende que, si $d\mathbf{r}$ se encuentra en una dirección principal, $d\mathbf{n}$ se encuentra en la misma dirección (aunque tal vez en sentido opuesto). Además, esto no sucede sino con las direcciones principales, pues si $d\mathbf{n}$ es paralelo a $d\mathbf{r}$, el análisis que acabamos de efectuar señala que hay un número λ para el que

$$\Sigma\Sigma\, b_i^j\, \mathbf{r}_j\, du^i = \lambda\, \Sigma\, \mathbf{r}_j\, du^j.$$

Al escribir esto en la forma

$$\Sigma(\Sigma\, b_i^j\, du^i - \lambda\, du^j)\, \mathbf{r}_j = \mathbf{0},$$

vemos que implica

$$\Sigma\, b_i^j\, du^i - \lambda\, du^j = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

Al eliminar λ de la manera en que eliminamos antes κ, volvemos a obtener 19.51, que constituye la ecuación diferencial de las líneas de curvatura.

Si las curvas paramétricas son ortogonales, de manera que, $b_i^j = b_{ij}/g_{jj}$, la ecuación 19.52 se convierte en

19.55 $$-\frac{b_{12}}{g_{22}}(du^1)^2 + \left(\frac{b_{11}}{g_{11}} - \frac{b_{22}}{g_{22}}\right) du^1\, du^2 + \frac{b_{12}}{g_{11}}(du^2)^2 = 0.$$

Cuando se investiga una superficie, se puede usar cualquier red de curvas de la superficie como curvas paramétricas. Las líneas de curvatura constituyen una red estándar de la que siempre se dispone. Al comparar 19.52 con $du^1 du^2 = 0$, vemos que

19.56 $$b_1^2 = b_2^1 = 0.$$

En consecuencia,

Las curvas paramétricas constituyen líneas de curvatura si y sólo si b_1^2 y b_2^1 son cero de manera idéntica.

En este caso, la ecuación 19.45 se reduce a

$$(\kappa - b_1^1)(\kappa - b_2^2) = 0,$$

de manera que las dos curvaturas principales son b_1^1 y b_2^2. Para saber cuál es

cuál, podemos aplicar la fórmula de Rodrigues 19.53 a los desplazamientos a lo largo de las curvas paramétricas. La "primera" dirección principal será tal que a lo largo de ella u^1 varía mientras u^2 permanece constante, es decir, la dirección de $\mathbf{r}_1$: la segunda será la dirección de $\mathbf{r}_2$. De esta manera,

19.57 $$\mathbf{n}_i + \kappa_{(i)}\,\mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

Al tomar los productos interiores con $\mathbf{r}^j$ y $\mathbf{r}_j$, deducimos

$$-b_i^j + \kappa_{(i)}\,\delta_i^j = 0, \quad -b_{ij} + \kappa_{(i)}\,g_{ij} = 0.$$

Por lo que tenemos que las dos curvaturas principales son precisamente

19.58 $$\kappa_{(1)} = b_1^1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad \kappa_{(2)} = b_2^2 = \frac{b_{22}}{g_{22}},$$

y también vemos que

$$b_{12} = \kappa_{(1)}\,g_{12} = 0$$

(puesto que las líneas de curvatura son ortogonales).

Recíprocamente, cuando se escogen los parámetros de una superficie cualquiera de manera que

19.59 $$g_{12} = 0, \qquad b_{12} = 0,$$

entonces las curvas paramétricas resultan ser las líneas de curvatura, pues como

$$g^{21} = -\frac{g_{12}}{g} = 0,$$

tenemos

$$b_1^2 = \Sigma\, g^{2j}\, b_{1j} = g^{22}\, b_{12} = 0$$

y, de la misma manera, $b_2^1 = 0$. De hecho, las condiciones 19.59 equivalen a 19.56.

EJERCICIOS

1. Aplíquese 19.291 a 19.52 con el objeto de demostrar la ortogonalidad de las direcciones principales sin emplear el símbolo ϵ_{ik}.

2. La ecuación diferencial de las líneas de curvatura se puede expresar en la forma

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ (du^2)^2 & -du^1\,du^2 & (du^1)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Encuéntrense las líneas de curvatura del paraboloide hiperbólico $x^2 - y^2 = 2z$, en la forma paramétrica

$$x = \operatorname{senh} u^1 + \operatorname{senh} u^2, \quad y = \operatorname{senh} u^1 - \operatorname{senh} u^2, \quad z = 2 \operatorname{senh} u^1 \operatorname{senh} u^2.$$

4. Encuéntrense las líneas de curvatura del helicoide $y = x \tan (z/c)$, en la forma paramétrica

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \operatorname{sen} u^2, \quad z = cu^2.$$

5. Las ecuaciones 19.56 ó 19.59, válidas en un punto particular (aunque no de manera necesariamente idéntica), constituyen condiciones para que las direcciones paramétricas coincidan con las direcciones principales en el punto del que se trata. Las fórmulas 19.58 siguen siendo válidas en este punto.

19.6 UMBILICOS

Un umbílico es un punto en el que la curvatura normal κ es igual en todas las direcciones. En un punto de ésos, las ecuaciones 19.42, 19.43 se cumplen para todos los valores de $a^1 : a^2$, y, por lo tanto,

$$b_{ik} = \kappa g_{ik}, \qquad b^j_i = \kappa \delta^j_i.$$

Tenemos de hecho dos conjuntos alternos de condiciones con respecto al umbílico; uno de los conjuntos consiste en

$$b_{11} : b_{12} : b_{22} = g_{11} : g_{12} : g_{22},$$

y el otro en

19.61 $$b^2_1 = b^1_2 = 0, \qquad b^1_1 = b^2_2.$$

Cuando una superficie es simétrica por reflexión en un plano, su sección por el plano es una línea de curvatura. Para comprender la razón por la que esto sucede, consideremos un punto P de la sección. Si las direcciones principales en P fueran oblicuas con respecto al plano, cualquiera de ellas tendría por imagen reflejada otra dirección principal asociada con la misma curvatura principal. Una abundancia de direcciones principales como la que describimos haría de P un umbílico. Pero una curva totalmente compuesta por umbílicos será trivialmente una línea de curvatura.

En particular, tenemos que *en cualquier superficie de revolución los meridianos y los paralelos son líneas de curvatura.* Se presenta un caso especial de interés al aplicar a una curva plana una rotación alrededor de una de las normales de su evoluta; es decir, si C es el centro de curvatura de un punto P de la curva plana, aplicamos la rotación alrededor de la recta que pasa por C y es paralela a la tangente en P. En este caso, el "lugar geométrico" de P es un "ecuador" tal que su radio es igual al radio de curvatura del meridiano. El ecuador, como el meridiano, es línea de curvatura y también sección normal. Puesto que las dos curvaturas principales son iguales, todo punto del ecuador es umbílico.

En un umbílico, la fórmula de Rodrigues 19.53 es válida para todos los desplazamientos de la superficie. En particular, la podemos aplicar a los desplazamientos a lo largo de las curvas paramétricas, de manera que obtengamos

19.62 $$\mathbf{n}_j + \kappa \mathbf{r}_j = \mathbf{0} \qquad (j = 1, 2).$$

En consecuencia,

19.63 *Si todo punto es umbílico, la superficie es o bien un plano o bien una esfera.*

Lo que se comprende al pensar que 19.62 es válida en cualquier punto. Al diferenciar, deducimos

$$\mathbf{n}_{ij} + \kappa \mathbf{r}_{ij} + \kappa_i \mathbf{r}_j = \mathbf{0}, \qquad \kappa_1 \mathbf{r}_2 = \kappa_2 \mathbf{r}_1,$$

y $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. De esta manera, tenemos que κ es constante y de 19.62 obtenemos $(\mathbf{n} + \kappa \mathbf{r})_j = \mathbf{0}$, de manera que $\mathbf{n} + \kappa \mathbf{r}$ es constante. Si $\kappa = 0$, $\mathbf{n}$ es constante, y tenemos un plano. Cuando $\kappa \neq 0$, la elección acertada del origen realiza la transformación $\mathbf{r} = -\kappa^{-1}\mathbf{n}$, $|\mathbf{r}| = |\kappa|^{-1}$, y tenemos una esfera.

EJERCICIOS

1. ¿Cómo se puede emplear la ecuación 19.52 para derivar las condiciones

$$b_1^2 = b_2^1 = 0, \qquad b_1^1 = b_2^2$$

con respecto a un umbílico?

2. ¿Qué le pasa a la ecuación 19.45 al cumplirse estas condiciones?
3. Las superficies anticlásticas carecen de umbílicos.
4. La superficie

$$x = \sqrt{2}\cos u^1, \quad y = \sqrt{2}\cos u^2, \quad z = \operatorname{sen} u^1 \operatorname{sen} u^2$$

tiene una curva de umbílicos que se encuentra en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5. ¿Se encuentra todo umbílico en una infinidad de líneas de curvatura?

19.7 EL TEOREMA DE DUPIN Y EL TEOREMA DE LIOUVILLE

Dupin investigó las familias de superficies triplemente ortogonales no como un ejercicio estéril de cálculo, sino debido a que hay casos de estas familias que son de gran importancia en . . . la física matemática. Fueron el tema de una de las obras más famosas de Darboux, de 567 páginas de extensión.

E. T. Bell [2, pág. 331]

Encontrábamos en los ejercicios al final de § 18.5 varios casos de coordenadas tridimensionales con la propiedad especial

$$g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0,$$

de manera que todas las superficies de nivel se cortaban unas a otras en ángulos rectos. En este caso, se dice que los tres sistemas de superficies son *mutuamente ortogonales.*

Al diferenciar la ecuación $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$ con respecto a u^3, obtenemos

$$\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{23} = 0.$$

De ésta y dos ecuaciones más (que se derivan por medio de las permutaciones cíclicas de 123) deducimos

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_{12} = 0.$$

Puesto que $\mathbf{r}_3$ es normal a la superficie $u^3 = c$ del tercer sistema, esta

superficie no solamente cumple $g_{12} = 0$, sino también, dado que $\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_{12} = 0$,

$$b_{12} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{12} = 0,$$

como se tenía en 19.59. En consecuencia, las curvas paramétricas $u^1 = a$ y $u^2 = b$ de esta superficie son líneas de curvatura. Puesto que tendremos resultados parecidos al investigar las superficies de cualquiera de los otros sistemas, hemos demostrado el

TEOREMA DE DUPIN *En tres sistemas mutuamente ortogonales de superficies, las líneas de curvatura de una superficie cualquiera en uno de los sistemas son las intersecciones de tal superficie con las superficies de los otros dos sistemas.*

Es más, se puede exhibir cualquier superficie como miembro de uno de tres sistemas mutuamente ortogonales. Esto se puede llevar a cabo de muchas maneras. Una de ellas consiste en emplear un sistema de superficies *paralelas*, que se define como el lugar geométrico de los puntos situados a distancias constantes, que se miden a lo largo de las normales de la superficie en cuestión. Al emplear las líneas de curvatura como curvas paramétricas, podemos expresar el vector de posición de una superficie paralela característica en la forma

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + u^3 \mathbf{n}.$$

19.57 nos señala que las direcciones de las curvas paramétricas en la superficie nueva se determinan por medio de

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_i &= (\mathbf{r} + u^3\mathbf{n})_i = \mathbf{r}_i + u^3\mathbf{n}_i \\ &= \mathbf{r}_i - u^3 \kappa_{(i)} \mathbf{r}_i = (1 - \kappa_{(i)} u^3)\, \mathbf{r}_i, \end{aligned}$$

lo que equivale a decir que son paralelas a la superficie original. Por lo tanto, las dos superficies tienen la misma normal: $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$. Puesto que

$$\bar{g}_{12} = \bar{\mathbf{r}}_1 \cdot \bar{\mathbf{r}}_2 = 0$$

y

$$\bar{b}_{12} = -\bar{\mathbf{n}}_1 \cdot \bar{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{n}_1 \cdot \bar{\mathbf{r}}_2 = \kappa_{(1)} \mathbf{r}_1 \cdot \bar{\mathbf{r}}_2 = 0,$$

tenemos de nuevo que las curvas paramétricas de la nueva superficie son líneas de curvatura [Weatherburn 2, pág. 159]. Si permitimos que u^3 tome diversos valores, obtenemos todo un sistema de superficies paralelas. Los otros dos sistemas ortogonales son los que trazan las normales en puntos que corren a lo largo de las líneas de curvatura [La Vallée Poussin 2, pág. 447].

Analizamos en § 6.7 y § 7.7 las transformaciones generales que preservan círculos y las esferas. En § 9.7 señalamos la manera en la que se puede emplear la teoría de las funciones de variable compleja para demostrar que las transformaciones que preservan círculos son las únicas transformaciones de la totalidad del plano inversivo en sí mismo que preservan ángulos. ¡Resulta muy notable que el teorema análogo en tres (o más) dimensiones sea elemental! No tenemos más que observar que, si una transformación del

espacio conserva los ángulos en los que se cortan las superficies, transforma sistemas mutuamente ortogonales de superficies en sistemas mutuamente ortogonales de superficies. En consecuencia, transforma una superficie σ en otra superficie σ'; transforma las líneas de curvatura de σ en las líneas de curvatura de σ'. Puesto que una esfera (donde incluimos como caso especial el plano) se caracteriza por la propiedad de que *todas* sus direcciones son direcciones principales, podemos deducir de inmediato el

TEOREMA DE LIOUVILLE. *Toda transformación que preserva ángulos preserva también esferas.*

Si tomamos este teorema junto con 7.71, podemos observar que toda transformación que preserva ángulos es, o bien una semejanza, o bien el producto de una inversión y una isometría [Forder **3**, págs. 137–138].

EJERCICIOS

1. Cuando las superficies $u^1 = a$ y $u^2 = b$ se trazan por medio de las normales a lo largo de las líneas de curvatura, mientras las superficies $u = c$ son "paralelas", las magnitudes fundamentales con respecto a $u^1 = a$ se denotan con naturalidad por g_{22}, g_{23}, g_{33}, b_{22}, b_{23}, b_{33}. El teorema de Dupin señala que $g_{23} = b_{23} = 0$. Calcúlese b_{33} y dedúzcase que, en relación con esta superficie, $K = 0$.

2. Las cuádricas centrales

$$\frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} + \frac{z^2}{C-\lambda} = 1 \qquad (A > B > C)$$

(que son elipsoides cuando $\lambda < C$, hiperboloides de una hoja cuando $C < \lambda < B$, hiperboloides de dos hojas cuando $B < \lambda < A$) se denominan *confocales*. En un punto (x, y, z) de una de estas cuádricas, la dirección de la normal consiste en

$$\left(\frac{x}{A-\lambda}, \frac{y}{B-\lambda}, \frac{z}{C-\lambda}\right).$$

Cuando se dan x, y, z, 18.59 es una ecuación cúbica en λ, cuyas raíces (u^1, u^2, u^3 (enumeradas en orden creciente) satisfacen

$$u^1 < C < u^2 < B < u^3 < A.$$

Dedúzcase que cualquier punto para el que $xyz \neq 0$ se encuentra en tres cuádricas del sistema (una de cada clase), tales que se cortan ortogonalmente [La Vallée Poussin **2**, pág. 448].

3. ¿Dónde se encuentran las líneas de curvatura de un elipsoide? [Hilbert y Cohn–Vossen **1**, pág. 189].

19.8 LA INDICATRIZ DE DUPIN

Aunque Dupin no inventó la indicatriz, la empleó con más efectividad que sus predecesores; se trata de una cónica sugerente, a la que un plano paralelo e "infinitesimalmente cercano" al plano tangente en un punto cualquiera de una superficie, intersecta la superficie.

E. T. Bell [**2**, pág. 331]

Cuando se expresa una superficie en la forma de Monge $z = F(x, y)$ suele ser conveniente el empleo de las mismas coordenadas x, y como parámetros, de manera que se tenga z en función de x y y, con derivadas

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_2 = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad z_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Al diferenciar $\mathbf{r} = (x, y, z)$ obtenemos

$$\mathbf{r}_1 = (1, 0, z_1), \quad \mathbf{r}_2 = (0, 1, z_2), \quad \mathbf{r}_{ij} = (0, 0, z_{ij}),$$

de donde

$$g_{11} = 1 + z_1^2, \quad g_{12} = z_1 z_2, \quad g_{22} = 1 + z_2^2,$$

$$g = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2 = 1 + z_1^2 + z_2^2,$$

$$\sqrt{g}\, \mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (-z_1, -z_2, 1),$$

$$\sqrt{g}\, b_{ij} = \sqrt{g}\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{ij} = z_{ij}.$$

Si escogemos los ejes de coordenadas de manera que el punto en cuestión sea el origen y la normal en ese punto sea el eje de las z, tenemos

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1),$$

de donde $z_1 = z_2 = 0$, $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$, $g = 1$, $b_{ij} = z_{ij}$.

Puesto que z es función de x y y, podemos desarrollarla en una serie de Maclaurin

$$z = z(0, 0) + z_1 x + z_2 y + \tfrac{1}{2}(z_{11} x^2 + 2z_{12} xy + z_{22} y^2) + \tfrac{1}{6}(z_{111} x^3 + \dots) + \dots$$

$$= \tfrac{1}{2}(b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2) + (\text{términos de grado mayor en } x \text{ y en } y).$$

Los "términos de grado mayor" cobran importancia cuando $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$, y en este caso el origen es un umbílico parabólico. En todos los demás casos, la sección por el plano $z = \varepsilon$, paralelo al plano tangente $z = 0$ a una distancia pequeña $|\varepsilon|$, se parece a la cónica

$$b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2 = 2\varepsilon,$$

que es semejante a la *indicatriz de Dupin*

19.81 $$b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2 = \pm 1.$$

Encontraremos que esta cónica (o par de cónicas) señala de manera notablemente sencilla la curvatura normal en todas las direcciones. Empecemos por observar que esta parte de la superficie será sinclástica, anticlástica o parabólica según se tenga

$$b > 0, \quad b < 0, \quad \text{o} \quad b = 0,$$

es decir, según sea la indicatriz una elipse, dos hipérbolas conjugadas o dos rectas paralelas. (En el caso sinclástico, el signo ambiguo de la ecuación 19.81 debe concordar con el signo de b_{11}; de no ser así, el plano $z = \varepsilon$ no cortaría la superficie. En el caso anticlástico, necesitamos los dos signos: uno para cada una de las dos hipérbolas conjugadas.)

En el plano $z = 0$, que es el plano tangente en el origen, el vector $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, que forma un ángulo θ con el eje de las x $(1, 0, 0)$, se puede identificar con el vector tangente

$$\overrightarrow{PT} = \mathbf{t} = \Sigma\, a^i\, \mathbf{r}_i = (a^1, a^2, 0)$$

de la figura 19.2*a*. De esta manera, las componentes contravariantes de $\mathbf{t}$ consisten en $a^1 = \cos\theta$, $a^2 = \operatorname{sen}\theta$, y, por 19.35, la curvatura normal en esta dirección es

$$\kappa = \Sigma\Sigma\, b_{ij}\, a^i\, a^j$$

19.82 $$= b_{11}\cos^2\theta + 2b_{12}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + b_{22}\operatorname{sen}^2\theta.$$

Si expresamos la indicatriz 19.81 en coordenadas polares, obtenemos

$$b_{11}\, r^2\cos^2\theta + 2b_{12}\, r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + b_{22}\, r^2\operatorname{sen}^2\theta = \pm 1,$$

es decir, $\kappa r^2 = \pm 1$, o

$$r = |\kappa|^{-\frac{1}{2}}.$$

En otras palabras [La Vallée Poussin **2**, pág. 427],

El radio de la indicatriz en cualquier dirección es igual a la raíz cuadrada del radio de curvatura normal en la misma dirección.

Otra manera de expresar la misma idea consiste en comentar que a la superficie se aproxima el paraboloide o cilindro parabólico

$$2z = b_{11}\, x^2 + 2b_{12}\, xy + b_{22}\, y^2.$$

En cualquier dirección, la superficie dada y la cuádrica tienen (en el origen) la misma curvatura normal.

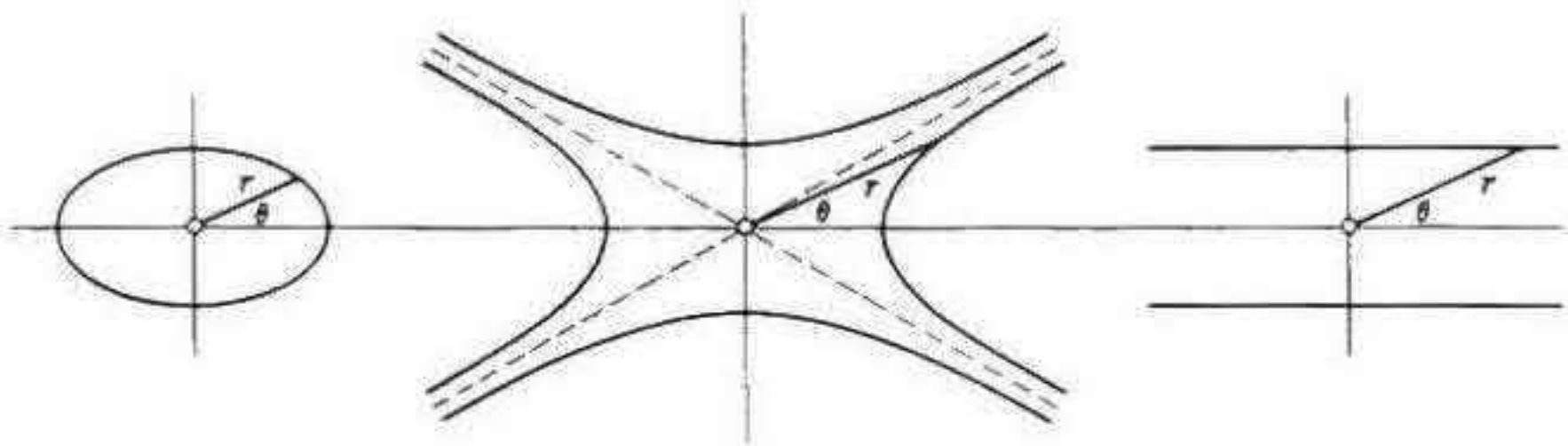


Figura 19.8a

Si tomamos los ejes de las x y de las y en las direcciones principales en el origen, como se ha hecho en la figura 19.8*a*, de manera que $b_{12} = 0$ y, por 19.58 $\kappa_{(i)} = b_{ii}$, la indicatriz 19.81 es sencillamente

$$\kappa_{(1)}\, x^2 + \kappa_{(2)}\, y^2 = \pm 1,$$

y de 19.82 se desprende la *fórmula de Euler*

$$\kappa = \kappa_{(1)}\cos^2\theta + \kappa_{(2)}\operatorname{sen}^2\theta$$

de la curvatura normal en una dirección que forma un ángulo θ con la primera dirección principal.

EJERCICIOS

1. ¿Con respecto a qué direcciones en una superficie iguala la curvatura normal la media artimética de las dos curvaturas principales?

2. Con respecto a la superficie $z = F(x, y)$,

$$2H = \frac{g_{22}\, b_{11} - 2g_{12}\, b_{12} + g_{11}\, b_{22}}{g} = \frac{(1 + z_2^2)z_{11} - 2z_1\, z_2\, z_{12} + (1 + z_1^2)z_{22}}{(1 + z_1^2 + z_2^2)^{3/2}}.$$

3. La superficie $xyz = 1$ tiene umbílicos en los cuatro vértices de un tetraedro regular [Salmon 2, pág. 300].

4. La superficie $z = x(x^2 - 3y^2)$ tiene un umbílico parabólico en el origen. Trácese la sección por un plano $z = \varepsilon$, donde ε es un número pequeño que puede ser positivo o negativo.

Esta superficie se llama *silla de montar de mono* porque constituiría la silla adecuada para un mono que anduviera en bicicleta: una extensión para cada pata trasera y una tercera para la cola. Hilbert y Cohn–Vossen [1, pág. 202, figura 213] hicieron un bonito dibujo de la superficie, pero otro de su indicatriz generalizada que conduce a conclusiones erróneas [*ibid.*, pág. 192, figura 200]. La forma verdadera se puede ver en la segunda edición de Struik [1, pág. 85].

20

Las geodésicas

Imaginemos a una criatura bidimensional con inteligencia suficente para hacer mediciones precisas en la superficie que habita, aunque incapaz de concebir una tercera dimensión. Su mundo podría ser un cilindro plano o parabólico; no podría distinguirlos desde su punto de vista. Si fuera un cilindro circular, las medidas locales darían los mismos resultados, aunque una expedición que lo rodeara por completo descubriría una peculiaridad topológica. En todos estos casos, concluiría que su superficie tiene curvatura de cero: $K = 0$. Si, por otra parte, la superficie fuera una esfera, podría detectar su curvatura positiva por medio de mediciones, sin alejarse demasiado de su casa, incluso en el caso de que el radio de la esfera fuera relativamente grande. Esta información es consecuencia de la fórmula de Gauss 20.16, que expresa a K en términos de las magnitudes fundamentales de primer orden. Veremos en § 20.3 que la expresión complicada de Gauss se puede substituir por una sencilla en la que intervienen los tres ángulos de un triángulo (como sucedía en nuestra fórmula 6.92 para determinar el área de un triángulo esférico). En § 20.4 extenderemos las mediciones locales a las mediciones globales, que permitirían a nuestra hormiga dotada de inteligencia determinar la naturaleza topológica de su mundo: esta idea será investigada más sistemáticamente en el capítulo 21.

Las demás secciones de este capítulo tratan del punto de vista de la geometría diferencial al estudiar los planos no euclidianos, que se pueden considerar como superficies de curvatura constante.

20.1 THEOREMA EGREGIUM

> *Los símbolos de Christoffel se llaman así por Erwin Bruno Christoffel (1829-1901), que los introdujo en 1869, . . .* [aunque] *denotaba nuestra* Γ^i_{jk} *por* $\left\{ {jk \atop i} \right\}$. *Este cambio a la notación actual se ha realizado debido a la influencia de la teoría de los tensores.*
>
> D. J. Struik (1894–)
>
> [Struik 1, pág. 108]

Para estudiar de manera adecuada las "geodésicas", que son las curvas más importantes de una superficie, necesitaremos otro recurso de notación: los *símbolos de Christoffel*

20.11 $$\Gamma_{ij,k} = \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{r}_k, \quad \Gamma^k_{ij} = \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{r}^k.$$

En virtud de 19.15, estos símbolos se relacionan de la manera siguiente:

20.12 $$\Gamma_{ij,k} = \Sigma g_{kl}\,\Gamma^l_{ij}, \quad \Gamma^k_{ij} = \Sigma g^{kl}\,\Gamma_{ij,l}$$

Es claro que $$\Gamma_{21,k} = \Gamma_{12,k} \quad \text{y} \quad \Gamma^k_{21} = \Gamma^k_{12}.$$

Puesto que las derivadas de las magnitudes fundamentales g_{ij} son

$$(g_{ij})_k = \frac{\partial}{\partial u^k}(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_j) = \mathbf{r}_{ik}\cdot\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_{jk}$$

20.13 $$= \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i},$$

podemos calcular los símbolos de Christoffel de la primera clase por medio de la fórmula

20.14 $$\Gamma_{ij,k} = \tfrac{1}{2}\{(g_{jk})_i + (g_{ik})_j - (g_{ij})_k\}$$

y deducir a continuación los símbolos de Christoffel de la segunda clase por medio de la segunda mitad de 20.12.

Si aplicamos 18.21 cuando $\mathbf{u} = \mathbf{r}_{ij}$ y $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}^3 = \mathbf{n}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{ij} &= \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{r}^1\,\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{r}^2\,\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{r}^3\,\mathbf{r}_3\\ &= \Gamma^1_{ij}\,\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{ij}\,\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{n}\,\mathbf{n}\end{aligned}$$

20.15 $$= \Sigma\,\Gamma^k_{ij}\,\mathbf{r}_k + b_{ij}\,\mathbf{n}.$$

Estas expresiones de las segundas derivadas de $\mathbf{r}$ se conocen como "ecuaciones de Gauss".

Otro descubrimiento de Gauss, que le gustó tanto que lo llamó *Theorema egregium*, consiste en una expresión de K en términos de las g y sus derivadas. Esto significa que la curvatura gaussiana se puede calcular por medio de mediciones hechas en la misma superficie, sin que sea necesario referirse al espacio tridimensional en el que se encuentra. Dicho de otra manera, K es un "valor invariante de la curvatura", que no se altera por la clase de distorsión que ocurre cuando se enrolla una hoja plana de papel para hacer un cilindro o un cono. La expresión ha aparecido en la literatura acerca del tema en diversas formas, cuya identidad no se determina obviamente. Una de las más pulcras, que descubrió Liouville,* es

20.16 $$\sqrt{g}\,K = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{11}\right) - \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{12}\right).$$

Esta fórmula se puede derivar a partir de la aplicación de 19.49 al vector unitario tangente $\mathbf{t} = \mathbf{r}_1/g_1$. Puesto que $[\mathbf{n}\,\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_1] = 0$ y (por 19.33) $\mathbf{n}\times\mathbf{r}_1 = \sqrt{g}\,\mathbf{r}^2$, tenemos

* J. Liouville, Sur la théorie générale des surfaces, *Journal de Mathematiques* **16** (1851), págs. 130–132.

$$[\mathbf{n}\ \mathbf{t}\ \mathbf{t}_i] = \left[\mathbf{n}\ \frac{\mathbf{r}_1}{g_1}\ \frac{\mathbf{r}_{1i}}{g_1}\right] = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_1)\cdot\frac{\mathbf{r}_{1i}}{g_{11}}$$

$$= \sqrt{g}\,\mathbf{r}^2\cdot\frac{\mathbf{r}_{1i}}{g_{11}} = \frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{1i}.$$

En consecuencia $\sqrt{g}\,K = \Sigma\Sigma\varepsilon^{ij}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{1i}\right)_j$

$$= \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{11}\right)_2 - \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{12}\right)_1.$$

La forma del *Theorema egregium* es más simétrica cuando las curvas paramétricas son ortogonales, de manera que se tiene

$$g_{12} = 0, \quad g^{ii} = 1/g_{ii} = 1/(g_i)^2,$$

$$\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_{11}}\,\frac{(g_{22})_1}{2g_{22}} = \frac{g_2}{g_1}\,\frac{2g_2(g_2)_1}{2g_2{}^2} = \frac{(g_2)_1}{g_1}$$

y

$$\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{11} = \frac{g_1 g_2}{g_{11}}\left(-\frac{(g_{11})_2}{2g_{22}}\right) = -\frac{g_2}{g_1}\,\frac{2g_1(g_1)_2}{2g_2{}^2} = -\frac{(g_1)_2}{g_2}.$$

De hecho,

$$-g_1\,g_2\,K = \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{12}\right)_1 - \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\,\Gamma^2_{11}\right)_2$$

20.17 $$= \left(\frac{(g_2)_1}{g_1}\right)_1 + \left(\frac{(g_1)_2}{g_2}\right)_2$$

[Weatherburn **2**, pág. 98; Struik **1**, pág. 113].

EJERCICIOS

1. Obténgase una variante de 20.16 al tomar $\mathbf{t} = \mathbf{r}_2/g_2$.
2. Para el caso en el que $g_{12} = 0$, exprésense todos los símbolos de Christoffel en términos de g_{11}, g_{22}, y sus derivadas.
3. Calcúlense los símbolos de Christoffel con respecto a coordenadas polares en el plano.
4. En relación con una superficie en la forma de Monge $z = F(x, y)$,

$$\Gamma^k_{ij} = z_{ij}\,z_k/(1 + z_1{}^2 + z_2{}^2).$$

5. $\Sigma\,\Gamma^i_{ij} = (\log\sqrt{g})_j$.
6. *Calcúlese K con respecto a una superficie en la que

$$g_{11} = \frac{(u^2)^2 + a^2}{\{(u^1)^2 + (u^2)^2 + a^2\}^2}, \quad g_{12} = \frac{-u^1 u^2}{\{(u^1)^2 + (u^2)^2 + a^2\}^2},$$

$$g_{22} = \frac{(u^1)^2 + a^2}{\{(u^1)^2 + (u^2)^2 + a^2\}^2}$$

* E. Beltrami, *Annali de Matematica* (1) 7 (1866), págs. 197–198.

20.2 LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE LAS GEODESICAS

Toda porción suficientemente pequeña de una geodésica es el camino más corto en la superficie que une los extremos de la porción que se ha tomado. . . . Todas las propiedades intrínsecas de una superficie (y entre ellas su curvatura gaussiana) se pueden determinar al trazar las geodésicas y medir sus longitudes de arco. . . . Obtendremos una aproximación a las geodésicas al mover un carrito muy pequeño por la superficie sobre dos ruedas, fijas en el eje común, de manera que las velocidades de rotación sean iguales en cada rueda. . . . La totalidad del curso de una geodésica se determina si se da uno de sus puntos junto con la dirección en ese punto. . . . Las líneas más rectas se pueden caracterizar también por medio del requisito geométrico de que el plano osculatorio de la curva debe contener la normal a la superficie en todo punto de la curva.

Hilbert y Cohn-Vossen

[1, págs. 220–221]

Consideremos la posibilidad de que una curva de una superficie tenga todas sus normales principales normales a la superficie. Como vimos en § 19.3, cualquier curva de una superficie satisface

$$\kappa\mathbf{p} = \dot{\mathbf{t}} = \frac{d}{ds}\,\Sigma\,\dot{u}^i\,\mathbf{r}_i = \Sigma\,\ddot{u}^i\,\mathbf{r}_i + \Sigma\Sigma\,\dot{u}^i\,\dot{u}^j\,\mathbf{r}_{ij}.$$

En nuestro caso, puesto que $\mathbf{p} = \mathbf{n}$ es perpendicular a $\mathbf{r}^k$, tenemos que

$$(\Sigma\,\ddot{u}^i\,\mathbf{r}_i + \Sigma\Sigma\,\dot{u}^i\,\dot{u}^j\,\mathbf{r}_{ij})\cdot\mathbf{r}^k = 0.$$

Puesto que $\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}^k = \delta_i^k$ y $\mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{r}^k = \Gamma_{ij}^k$, estas ecuaciones se reducen a

20.21 $$\ddot{u}^k + \Sigma\Sigma\,\Gamma_{ij}^k\,\dot{u}^i\,\dot{u}^j = 0 \qquad (k = 1, 2),$$

lo que significa que

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Sigma\Sigma\,\Gamma_{ij}^k\,\frac{du^i}{ds}\,\frac{du^j}{ds} = 0$$

[Struik 1, pág. 132]. Podríamos eliminar teóricamente s de las dos ecuaciones, de manera que tuviéramos una sola ecuación diferencial; pero suele ser más conveniente el empleo de ambas ecuaciones, o de una sola junto con 19.16.

Las curvas que se determinan de la manera recién descrita se llaman *geodésicas* [Weatherburn 2, pág. 100]. Puesto que las ecuaciones expresan las segundas derivadas de u^k en términos de las primeras, hay una geodésica que pasa por un punto cualquiera A (de la superficie) en cualquier dirección dada. Hay también, en general, una geodésica única que une dos puntos dados A y B. En este aspecto, las geodésicas de una superficie se parecen a las rectas del plano; y veremos que, de hecho, son rectas cuando la superficie es el plano.

Cuando $g_{12} = 0$, de manera que las curvas paramétricas son ortogonales, las ecuaciones diferenciales toman la forma

20.22 $$g_{11}\,\ddot{u}^1 + \tfrac{1}{2}(g_{11})_1\,(\dot{u}^1)^2 + (g_{11})_2\,\dot{u}^1\,\dot{u}^2 - \tfrac{1}{2}(g_{22})_1\,(\dot{u}^2)^2 = 0.$$

20.23 $$g_{22}\,\ddot{u}^2 - \tfrac{1}{2}(g_{11})_2\,(\dot{u}^1)^2 + (g_{22})_1\,\dot{u}^1\,\dot{u}^2 + \tfrac{1}{2}(g_{22})_2\,(\dot{u}^2)^2 = 0.$$

La segunda ecuación nos muestra que las curvas paramétricas $\dot{u}^2 = 0$ serán unas de las geodésicas si y sólo si g_{11} es función solamente de u^1 (sin que intervenga u^2), de manera que $(g_{11})_2 = 0$. En este caso, las curvas $\dot{u}^2 = 0$ constituyen un sistema de geodésicas de un parámetro y las curvas $\dot{u}^1 = 0$ sus trayectorias ortogonales. Puesto que g_{11} es función solamente de u^1, la forma diferencial

$$ds^2 = g_{11}\,(du^1)^2 + g_{22}\,(du^2)^2$$

se puede simplificar por medio de un cambio de notación, de manera que $\int g_1\,du^1$ se denote por u^1. Entonces, $g_{11} = 1$, $g = g_{22}$, y

20.24 $$ds^2 = (du^1)^2 + g(du^2)^2.$$

El efecto que resulta del cambio de notación consiste en que u^1 mide ahora el arco de cada geodésica $u^2 =$ constante. Las ecuaciones diferenciales son aquí

20.25 $$\ddot{u}^1 - \tfrac{1}{2}(g)_1\,(\dot{u}^2)^2 = 0,$$

20.26 $$\frac{d}{ds}(g\dot{u}^2) - \tfrac{1}{2}(g)_2\,(\dot{u}^2)^2 = 0.$$

Obtendremos, en particular, coordenadas *polares geodésicas* (análogas a las coordenadas polares ordinarias del plano) al medir u^1 a partir de A a lo largo de todas las geodésicas que pasan por A, mientras definimos u^2 como el ángulo que la geodésica en cuestión $u^2 =$ constante forma con la geodésica "inicial" $u^2 = 0$.

La longitud de una curva cualquiera desde A a un punto B (de posición general) se obtiene al integrar ds a lo largo de la curva. La ecuación 20.24 nos muestra que $\int ds \geqslant \int du^1$, donde la igualdad ocurre solamente cuando $du^2 = 0$. En consecuencia, la geodésica AB es la menor distancia entre A y B. Tenemos, de hecho, que es la curva sobre la que descansaría un cordoncito muy tenso ajustado al lado convexo y liso de una superficie material. Puesto que las únicas fuerzas que actúan sobre un "elemento" de la cuerda son las tensiones en los dos extremos y la reacción de la superficie en la dirección de la normal $\mathbf{n}$, las tres fuerzas han de estar en equilibrio. En consecuencia, $\mathbf{n}$ debe estar en el plano de las dos tensiones, que es el plano osculatorio de la curva. Estas consideraciones constituyen la explicación estática de la ecuación $\mathbf{p} = \mathbf{n}$ con la que empezamos nuestra investigación.

Las curvas $u^1 =$ constante (que no son, por supuesto, geodésicas) se llaman "círculos geodésicos". La circunferencia de uno de estos "círculos" se mide al integrar ds (que se determina por medio de 20.24 cuando $du^1 = 0$); de esta manera, es

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g}\,du^2.$$

Cuando el radio u^1 es pequeño, se aproximan a la circunferencia tanto $2\pi\sqrt{g}$ como $2\pi u^1$. En consecuencia, el primer término de la serie de Maclaurin con respecto a $\sqrt{g}$ es simplemente u^1, es decir,

20.27 $$\text{Si} \quad u^1 = 0, \text{ entonces } (\sqrt{g})_1 = 1.$$

Puesto que las geodésicas son curvas de longitud mínima, las geodésicas de una esfera son los círculos mayores, y las del plano son las rectas. Podemos adaptar la figura 8.5*b* a las coordenadas polares geodésicas si escribimos u^1 y u^2 en lugar de r y θ, de manera que 20.24 viene a expresar el teorema de Pitágoras en relación con el triángulo infinitesimal $PP'N$, y el ángulo ϕ que forman las geodésicas OP' y PP' se determina a partir de

$$\cos\phi = \lim \frac{NP'}{PP'} = \dot{u}^1 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\phi = \lim \frac{NP}{PP'} = \sqrt{g}\,\dot{u}^2.$$

Al diferenciar $\cos\phi$ y al aplicar 20.25, obtenemos

$$-\operatorname{sen}\phi\,\dot{\phi} = \ddot{u}^1 = \tfrac{1}{2}(g)_1\,(\dot{u}^2)^2 = \frac{(g)_1}{2\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,\dot{u}^2)\dot{u}^2$$
$$= (\sqrt{g})_1(\operatorname{sen}\phi)\dot{u}^2.$$

De esta manera,

20.28 $$d\phi = -(\sqrt{g})_1\,du^2.$$

EJERCICIOS

1. En el caso de la superficie general de revolución

$$\mathbf{r} = (u^1 \cos u^2, \quad u^1 \operatorname{sen} u^2, \quad z),$$

donde z es función solamente de u^1, la ecuación diferencial 20.23 de las geodésicas se reduce a

$$\frac{d}{ds}\left[(u^1)^2\,\dot{u}^2\right] = 0.$$

Una de las soluciones es $du^2 = 0$, lo que demuestra que *los meridianos son geodésicas*. En todos los demás casos, el valor constante de $(u^1)^2\,\dot{u}^2$ se puede denotar por $1/h$, de manera que

$$ds = h\,(u^1)^2\,du^2.$$

Al comparar esto con 19.16, obténgase la integral completa

$$u^2 = C \pm \int \left[\frac{1 + z_1{}^2}{h^2(u^1)^2 - 1}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{du^1}{u^1}$$

[Weatherburn 2, pág. 102].

2. Las geodésicas del cilindro son hélices.
3. Las geodésicas del cono

$$\mathbf{r} = (u^1 \cos u^2, \quad u^1 \operatorname{sen} u^2, \quad u^1 \cos\alpha)$$

se determinan por medio de

$$au^1 = \sec(\beta + u^2 \operatorname{sen}\alpha),$$

donde α y β son constantes. ¿Constituyen estas curvas concoespirales?

20.3 LA CURVATURA INTEGRAL DE UN TRIANGULO GEODESICO

La curvatura integral de una región de la superficie es igual al área de su imagen esférica. . . . Esta propiedad de la curvatura integral era conocida por la escuela francesa de Monge antes de que Gauss señalara su significación en la geometría intrínseca de las superficies.

D. J. Struik [1, pág. 156]

Las fórmulas 6.92 y 16.53 para determinar las áreas de triángulos esféricos e hiperbólicos constituyen un caso particular de la bella fórmula que descubrió Gauss para determinar la *curvatura integral* del triángulo formado por los arcos de tres geodésicas de cualquier superficie lisa. Procedamos a establecer su fórmula

20.31 $$\iint_{ABC} K\,dS = A + B + C - \pi.$$

Al dar los valores $g_1 = 1$ y $g_2 = \sqrt{g}$ en 20.17, vemos que al emplear coordenadas polares geodésicas, la fórmula para K es simplemente

20.32 $$\sqrt{g}\,K = -(\sqrt{g})_{11}.$$

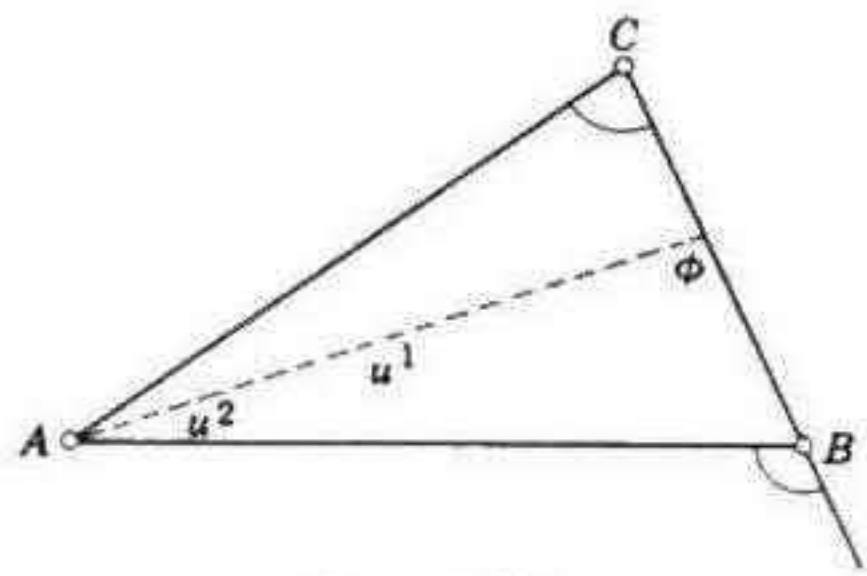


Figura 20.3a

Considérese un triángulo geodésico ABC cuyo lado AB está a lo largo de la geodésica inicial $u^2 = 0$, como se tiene en la figura 20.3*a*. Al integrar K sobre el área de este triángulo, nos servimos de 19.24 para obtener

$$\iint K\,dS = \iint K\sqrt{g}\,du^1\,du^2 = -\iint (\sqrt{g})_{11}\,du^1\,du^2$$
$$= -\int (\sqrt{g})_1 \Big|_0^{u^1} du^2.$$

Por 20.27, $(\sqrt{g}) = 1$ cuando $u^1 = 0$; y por 20.28, $-(\sqrt{g})_1 du^2 = d\phi$ con respecto a cualquier punto de la geodésica BC. En consecuencia,

$$\iint_{ABC} K\,dS = \int_0^A \{1 - (\sqrt{g})_1\}\,du^2 = \int_0^A du^2 + \int_{\pi-B}^{C} d\phi$$
$$= A + C - (\pi - B) = A + B + C - \pi$$

[Weatherburn 2, pág. 117].

EJERCICIOS

1. Obténgase 20.32 directamente a partir de 19.49 donde $\mathbf{t} = \mathbf{e}_1$.

2. En la esfera unitaria, la colatitud y la longitud sirven de coordenadas polares geodésicas si $g = \operatorname{sen}^2 u^1$. ¿Qué sucede con 20.32 en este caso? Escríbase, por conveniencia, r, θ en lugar de u^1, u^2. La ecuación diferencial 20.26 (donde $(g)_2 = 0$) tiene por primera integral

$$(\operatorname{sen}^2 r)\dot{\theta} = 1/h$$

(constante arbitraria). Al combinar esta fórmula, en relación con $\dot{\theta} = d\theta/ds$, con

$$ds^2 = dr^2 + \operatorname{sen}^2 r\, d\theta^2,$$

dedúzcase $dr = \operatorname{sen} r \sqrt{h^2 \operatorname{sen}^2 r - 1}\, d\theta$,

$$\theta = \int \frac{\csc^2 r\, dr}{\sqrt{h^2 - \csc^2 r}} = \theta_0 + \arccos(k \cot r)$$

donde $k = 1/\sqrt{h^2 - 1}$, y

$$k \cot r = \cos(\theta - \theta_0).$$

Al expresar esta solución en términos de las coordenadas cartesianas

$$x = \operatorname{sen} r \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen} r \operatorname{sen}\theta, \quad z = \cos r,$$

verifíquese que las geodésicas de la esfera son los círculos mayores (que están en planos que pasan por el origen).

20.4 LA CARACTERISTICA DE EULER–POINCARÉ

Vimos en la página 320 que un poliedro cualquiera inscrito en una esfera se puede proyectar del centro a la superficie de manera que forme un *mapa*. De hecho, los V vértices quedan unidos en pares por medio de A arcos geodésicos (a los que seguiremos llamando aristas), que descomponen la superficie esférica en C regiones poligonales (a las que seguiremos llamando caras). Para hablar con más generalidad, diremos que se puede obtener un mapa al trazar una cantidad suficiente de arcos geodésicos en cualquier superficie cerrada. Podemos insistir en que los puntos ("vértices") se deben colocar y unir de manera que toda cara quede simplemente relacionada, es decir, que la cota de la cara pueda disminuir continuamente hasta llegar a un solo punto sin por ello alejarse de la superficie.

En § 10.3 empleábamos un diagrama de Schlegel al demostrar la fórmula de Euler. Nos hubiera servido igualmente el mapa correspondiente en una esfera. Al aplicar el mismo argumento al caso de un mapa en la superficie general, se demuestra que la característica de Euler–Poincaré

$$\chi = V - A + C$$

es en esencia una propiedad de la superficie, es decir, que tiene el mismo valor para todos los mapas que se pueden trazar en la superficie en cuestión. Es notable que esta propiedad de la superficie se pueda expresar con gran sencillez en términos de la curvatura integral (que se obtiene al integrar K sobre toda la superficie).

Consideremos en primer lugar una esfera en la que un mapa (con $V = A = 3$ y $C = 2$) se obtiene al tomar, como vértices, tres puntos de uno de los círculos mayores. Cada hemisferio queda acotado por tres arcos del círculo mayor, de manera que forma un "triángulo" esférico en el que los tres ángulos valen π, π, π. Por 20.31, cada hemisferio tiene por curvatura integral

$$\pi + \pi + \pi - \pi = 2\pi.$$

En consecuencia, la curvatura integral de toda la esfera es de 4π (como es obvio que sea, puesto que la "imagen esférica" de cualquier esfera es la esfera unitaria, en la que el área de la superficie vale 4π). La fórmula general, de la que éste es un caso muy particular, es

20.41 $$\iint K\, dS = 2\chi\pi,$$

donde se toma la integración sobre la totalidad de cualquier superficie dada de característica χ.

Con el fin de establecer 20.41, tomamos en consideración un mapa formado por A arcos geodésicos de la superficie en cuestión, y escogemos los V vértices en posiciones tales que ninguna cara tenga un ángulo reentrante (*por ejemplo*, un ángulo mayor que π). Se puede "triangular" a continuación el mapa al escoger un nuevo vértice dentro de cada cara y unirlo mediante nuevos arcos geodésicos con todos los vértices de esa cara. Por este procedimiento se obtiene un mapa nuevo que tiene $V + C$ vértices y $2A$ caras triangulares. Puesto que la suma de todos los ángulos de los $2A$ triángulos vale 2π con respecto a cada uno de los $V + C$ vértices, la curvatura integral de toda la superficie se determina por

$$\begin{aligned}\iint K\, dS &= \Sigma\,(A + B + C - \pi)\\ &= 2\pi(V + C) - 2A\pi = 2\pi(V + C - A)\\ &= 2\pi\chi.\end{aligned}$$

De donde se desprende que la curvatura integral de una superficie cerrada no se altera por la transformación topológica. Por ejemplo, el valor 4π se conserva cuando se deforma una esfera para tener una elipsoide u otra superficie oval cualquiera. La deformación puede incluso continuarse de manera que se tengan regiones anticlásticas.

EJERCICIOS

1. El toro 8.88 (donde $a > b$) se construye al poner en revolución un círculo de radio b alrededor de una recta (en su plano) a una distancia a del centro. Podemos trazar en esta superficie dos circunferencias, de radios b y $a + b$, que constituyen geodésicas que tienen solamente un punto en común. Forman un mapa en el que $V = C = 1$, $A = 2$. En consecuencia, la curvatura integral es de cero. (La curvatura integral positiva de la parte "exterior" sinclástica del toro queda exactamente balanceada por la curvatura integral negativa de la parte "interior", anticlástica.)

2. Descríbanse dos geodésicas más en el toro de manera que las cuatro geodésicas formen un mapa en el que $V = C = 4$, $A = 8$.

20.5 SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE

Cuando Gauss tenía diecinueve años, su madre le preguntó a su amigo, el matemático Wolfgang Bolyai, qué sería de Gauss y si llegaría jamás a ser alguien. Cuando Bolyai exclamó "¡El más grande de los matemáticos de Europa!", ella rompió a llorar.

E. T. Bell [1, pág. 252]

Cuando estudiamos una superficie por medio de las magnitudes fundamentales de primer orden y los símbolos de Christoffel que surgen como su consecuencia, la tratamos de manera "intrínseca", es decir, la exploramos como lo haría la criatura ficticia de dos dimensiones que no puede imaginar ninguna dirección que salga de la misma superficie. Una criatura de ésas podría medir las distancias por medio de la fórmula 19.16, distinguir las geodésicas como las menores distancias de un lugar a otro y medir la curvatura gaussiana K en cualquier punto.

Una de las actitudes más elegantes que se toman al estudiar la geometría no euclidiana consiste en considerar los planos elíptico o hiperbólico como una superficie no desarrollable que es homogénea (todas las posiciones en ella se parecen) e isotrópica (todas las direcciones se parecen). Puesto que la superficie es homogénea, su curvatura gaussiana es constante. Al emplear una unidad de distancia adecuada, podremos tomar el valor constante de K como 1 ó -1, según sea positiva o negativa. Encontraremos conveniente el uso de coordenadas polares geodésicas. Puesto que la superficie es homogénea e isotrópica, la expresión 20.24 valdrá lo mismo cuando coloquemos el polo $u^1 = 0$ y la geodésica inicial $u^2 = 0$ en cualquier sitio, y g será función solamente de u^1, independiente de u^2. Las "rectas" de la geometría en cuestión serán las geodésicas de la superficie, y *no es necesario considerar la superficie dentro de un espacio tridimensional.*

Si $K = \pm 1$ en 20.32, obtenemos la ecuación diferencial

$$(\sqrt{g})_{11} = \mp\sqrt{g},$$

a partir de la que se tiene

$$\sqrt{g} = A \operatorname{sen} u^1 + B \cos u^1 \quad \text{o} \quad A \operatorname{senh} u^1 + B \cosh u^1.$$

En el polo, $ds\,(= du^1)$ es independiente de u^2; por lo tanto, $g = 0$ cuando $u^1 = 0$; es decir, $B = 0$. También, por 20.27, $A = 1$. En consecuencia,

$$\sqrt{g} = \operatorname{sen} u^1 \quad \text{o} \quad \operatorname{senh} u^1$$

y

$$ds^2 = (du^1)^2 + \operatorname{sen}^2 u^1\,(du^2)^2 \quad \text{o} \quad (du^1)^2 + \operatorname{senh}^2 u^1\,(du^2)^2.$$

EJERCICIO

Calcúlese el perímetro de la circunferencia del círculo geodésico $u^1 = r$ (i) en el plano elíptico, (ii) en el plano hiperbólico.

20.6 EL ANGULO DE PARALELISMO

En el caso elíptico, podemos identificar u^1 y u^2 con la colatitud y la longitud de la esfera unitaria (como se hacía en el ejercicio 2 al final de § 20.3). De acuerdo con esto, restringimos nuestra consideración al caso hiperbólico, en el que

$$g = \operatorname{senh}^2 u^1.$$

Escribiremos por conveniencia r, θ en lugar de u^1, u^2, de manera que*

$$ds^2 = dr^2 + \operatorname{senh}^2 r \, d\theta^2.$$

Para determinar las rectas del plano hiperbólico, empleamos la ecuación diferencial 20.26 donde $g = \operatorname{senh}^2 r$, a saber

$$\frac{d}{ds}(\operatorname{senh}^2 r \, \dot{\theta}) = 0.$$

Para una primera integral, obtenemos $\operatorname{senh}^2 r\dot{\theta} = h^{-1}$ (constante), de donde

$$dr^2 + \operatorname{senh}^2 r \, d\theta^2 = ds^2 = (h \operatorname{senh}^2 r \, d\theta)^2,$$

de manera que

$$\theta = \int \frac{dr}{\operatorname{senh} r \sqrt{h^2 \operatorname{senh}^2 r - 1}} = \int \frac{\operatorname{csch}^2 r \, dr}{\sqrt{h^2 - \operatorname{csch}^2 r}}$$

$$= -\int \frac{d \coth r}{\sqrt{h^2 + 1 - \coth^2 r}} = \theta_0 + \arccos(k \coth r),$$

donde $k = 1/\sqrt{h^2 + 1}$. En consecuencia, por último, las rectas se determinan a partir de

$$k \coth r = \cos(\theta - \theta_0).$$

Cuando h tiende a infinito, de manera que k tienda a cero, tenemos las rectas radiales, para las que θ es constante. La recta que pasa por $(a, 0)$ y es perpendicular a la recta inicial $\theta = 0$ (que es una geodésica que no se altera cuando se reemplaza θ por $-\theta$), es

$$\tanh a \coth r = \cos \theta.$$

A partir de estos resultados podemos encontrar relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo ABC, rectángulo en C, cuyo lado BC está a lo largo de la recta inicial, como se tiene en la figura 20.6*a*. Puesto que las ecuaciones de las rectas BC, AB y CA son

$$\theta = 0, \quad \theta = B, \quad \text{y} \quad \tanh a = \tanh r \cos \theta,$$

las longitudes de los lados $BC = a$ y $AB = c$ se relacionan por medio de la ecuación

$$\tanh a = \tanh c \cos B$$

[Carslaw **1**, pág. 109; Coxeter **3**, págs. 238, 282]. (Se puede obtener otra fórmula de la misma clase al cambiar a y B por b y A.)

* E. Beltrami *Giornale di Matematiche*, **6** (1868) pág. 298 (12).

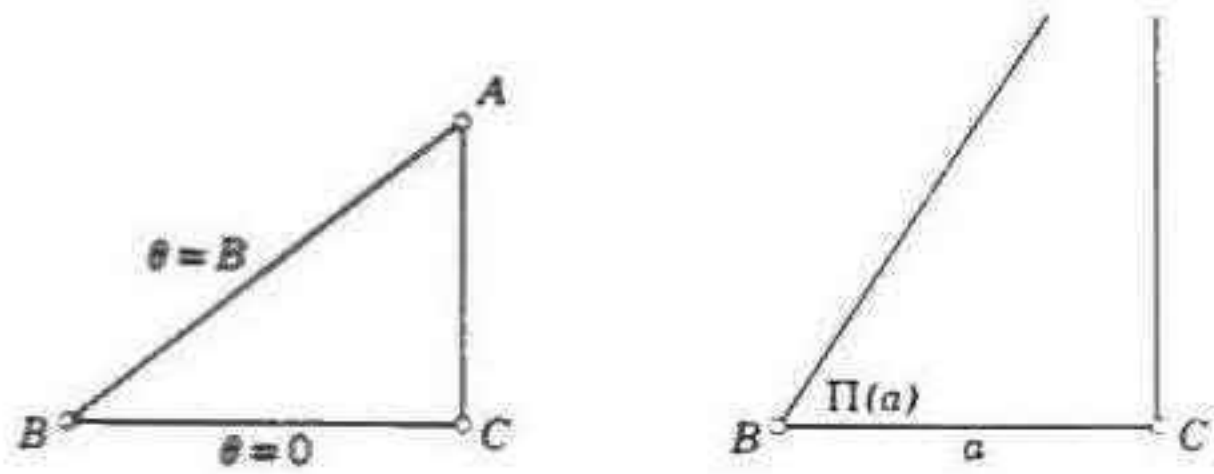


Figura 20.6a

El ángulo de paralelismo $\Pi(a)$ es el valor de B para el que c es infinito; es decir

$$\Pi(a) = B,$$

donde

$$\begin{aligned} \cos B &= \tanh a, & \operatorname{sen} B &= \operatorname{sech} a, \\ \csc B &= \cosh a, & \cot B &= \operatorname{senh} a, \\ \csc B - \cot B &= \cosh a - \operatorname{senh} a, \\ \tan \tfrac{1}{2} B &= e^{-a}. \end{aligned}$$

Hemos establecido, de esta manera, la fórmula de Lobachevsky

$$\Pi(a) = 2 \arctan e^{-a}$$

[Coxeter 3, pág. 208]. Esto constituye una expresión precisa de la función de la que hicimos un estudio tentativo en § 16.3.

EJERCICIO

Calcúlese $\Pi(a)$ con respecto a unos cuantos valores de a, escogidos de manera adecuada, y trácese la curva $y = \Pi(x)$. En la figura 17.4*b*, ¿en qué lugar ocurre $\Pi(u)$?

20.7 LA SEUDOESFERA

Hemos obtenido el plano hiperbólico como superficie de curvatura negativa constante; es natural que nos preguntemos si esta superficie se puede introducir en el espacio euclidiano. En otras palabras, ¿se puede representar isométricamente el plano hipérbolico, o una parte finita de él, por medio de una superficie contenida en el espacio ordinario, de la manera en que se representaba el plano elíptico (dos veces) por medio de una esfera? La respuesta es No y Sí: no existe una representación así de la totalidad del plano hiperbólico* pero hay ciertas superficies que servirán para representar una porción de área finita [Klein 4, pág. 286]. El caso más simple, al que Liouville llamó *seudoesfera*, consiste en la mitad del "tractroide" que engendra la tractriz 17.51 al ponerse en revolución alrededor de su asíntota.

Si escribimos z en lugar de x, x en lugar de y e igualamos $a = 1$, obtenemos la tractriz

* G. Lütkemeyer, *Ueber den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen* (Gotinga, 1902).

en el plano $y = 0$. La revolución alrededor del eje de las z engendra el tractroide

$$x = \operatorname{sech} u^1 \cos u^2, \qquad y = \operatorname{sech} u^1 \operatorname{sen} u^2, \qquad z = u^1 - \tanh u^1,$$

que posee una arista cuspidal en el lugar en el que $u^1 = 0$. La seudoesfera es la superficie con forma de cuerno que se obtiene por $u^1 \geqslant 0$. Al diferenciar el vector de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$, obtenemos

$$g_{11} = \tanh^2 u^1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = \operatorname{sech}^2 u^1.$$

Si en 20.17 igualamos $g_1 = \tanh u^1$, $g_2 = \operatorname{sech} u^1$, podemos deducir

$$-\tanh u^1 \operatorname{sech} u^1 K = (-\operatorname{sech} u^1)_1 = \operatorname{sech} u^1 \tanh u^1,$$

de donde

$$K = -1.$$

Puesto que la seudoesfera tiene la misma curvatura gaussiana que el plano hiperbólico, las geodésicas en la primera representan de manera isométrica las rectas de la segunda. Entre estas geodésicas están los meridianos (para los que u^2 es constante), que representan un haz de paralelas. Ortogonales a ellos, encontramos los círculos para los que $u^1 =$ constante, que representan arcos de horociclos concéntricos (§ 16.6). El arco de horociclo más largo de éstos mide 2π, puesto que queda representado por el círculo

$$x = \cos u^2, \qquad y = \operatorname{sen} u^2$$

en el plano $u^1 = 0$. De esta manera, la totalidad de la seudoesfera representa el *sector horociclico* que limita este arco de longitud 2π y los diámetros en sus dos extremos. El sector horociclico envuelve la seudoesfera de manera que los dos diámetros coinciden para formar un solo meridiano.

Esta limitación a un sector horociclico revela a la seudoesfera como un cuerpo absolutamente inútil si se le quiere emplear como medio de trazado de figuras hiperbólicas que tengan algún sentido. Toda geodésica que no sea simplemente un meridiano se enrolla alrededor del "cuerno" al avanzar en una dirección, mientras en la dirección opuesta queda abruptamente cortada por la arista cuspidal. Por ende, ¡ni siquiera podemos trazar una disposición sencilla de rectas como la que teníamos en la figura 16.3*a*! Hacemos estos comentarios con el fin de desmentir la idea, tan extendida como equivocada, de que se puede identificar la geometría hiperbólica con la geometría intrínseca de la seudoesfera.

EJERCICIO

Por medio de 20.23, obténgase una ecuación de las geodésicas de la seudoesfera.

21

Topología de las superficies

En el capítulo 4 tomábamos en consideración una diversidad de mosaicos del plano euclidiano (y agregamos, en § 4.6, los mosaicos *regulares*). Se pueden considerar como "mapas" infinitos. Consideramos en § 15.7 los mosaicos análogos de una esfera, que son mapas finitos. En § 10.3 demostramos la fórmula de Euler

$$V - A + C = 2,$$

que relaciona los números de vértices, aristas (o arcos) y caras (o regiones) de un mapa cualquiera que se traza en una esfera. Extendimos esto en § 20.4 a

$$V - A + C = \chi \leqslant 2$$

con respecto a un mapa en cualquier superficie cerrada, donde la característica de Euler–Poincaré es la misma en relación con todos los mapas de una superficie dada. En § 6.9 indentificamos los puntos antípodas de una esfera con el objeto de obtener el plano proyectivo real; en relación con el mapa centralmente simétrico en la esfera, la identificación divide por la mitad a V, A y C, de manera que χ se reduce de 2 a 1. En la figura 10.5*a* estudiamos los poliedros recíprocos que, al ser considerados como mosaicos esféricos, constituyen un caso especial de los mapas *duales*. Definimos en § 10.1 el símbolo de Schläfli $\{p, q\}$, que es adecuado con respecto a un mapa de *p*égonos, q de ellos en cada vértice; y en 10.31 obtuvimos las ecuaciones $qV = 2A = pC$. En § 15.4 observamos los grupos de permutaciones de las caras de un mapa. Encontramos en § 15.3 que la teoría de las traslaciones y reflexiones en deslizamiento pertenece a la geometría *absoluta*; es decir, no solamente pertenece a la geometría euclidiana, sino también a la hiperbólica.

En este capítulo aplicaremos todas estas ideas al estudio de las propiedades topológicas de las superficies; hemos incluido la conjetura de P.

J. Heawood acerca de que, con respecto a los colores de cualquier mapa de una superficie de característica χ,

$$[\tfrac{7}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{49 - 24\chi}\,]$$

determina el número suficiente de colores. Esta conjetura resulta notable por el hecho de que, aunque estableció su validez en 1890 para todo $\chi < 2$, sigue siendo un problema no resuelto con respecto a los mapas en la esfera o el plano ordinarios. Otra conjetura consiste en que la fórmula de Heawood sea "la mejor posible" en el sentido de que para cada χ se puede dibujar un mapa que requiera un número completo de colores.

21.1 SUPERFICIES ORIENTABLES

> *El grupo de transformaciones que tiene más importancia en las matemáticas de hoy, a saber, el grupo de las* transformaciones topológicas *es mucho más amplio que el grupo proyectivo. Se trata aquí de un* espacio topológico, *lo que equivale a decir que contiene un conjunto de elementos, los* puntos, *para los que se define el concepto de* vecindad. *Todo transformación que preserva vecindades se llama* topológica. *Se puede visualizar la topología con una geometría de la lámina de goma, puesto que una transformación topológica permite cualquier clase de estiramientos y compresiones, (aunque no desgarraduras).*
>
> S. H. Gould [1, pág. 304]

Mencionamos en el capítulo 5 la famosa clasificación que hizo Klein de las geometrías según los grupos de transformaciones bajo las que sus teoremas conservan su validez. En este sentido, la geometría proyectiva se caracteriza por medio del grupo de las colineaciones y las correlaciones, y la geometría hiperbólica por el subgrupo de colineaciones que conservan invariante una cónica (el lugar geométrico de los puntos en el infinito). La topología, que a veces se describe como "la más general de las geometrías", se caracteriza por el grupo de las transformaciones *continuas*. Por ejemplo, puesto que un poliedro puede transformarse de manera continua en el mosaico esférico que le corresponde, la topología no distingue entre el poliedro y el mosaico. Nuevamente, definíamos en § 20.4 la característica

21.11 $$\chi = V - A + C$$

en términos de un mapa formado por los arcos geodésicos de una superficie dada, pero el valor de χ no se alterará si reemplazamos los arcos geodésicos por cualesquiera arcos continuos tales que unan el mismo par de puntos sin cortarse. Dicho de otra manera, las aristas del mapa no necesitan ser geodésicas como la de la frontera entre Colorado y Utah; también pueden ser "naturales" como la frontera entre Indiana y Kentucky.

Con el mismo espíritu se dice que el toro 8.88 equivale topológicamente a una esfera con un *asa* (como el asa de una taza de té), y podremos derivar

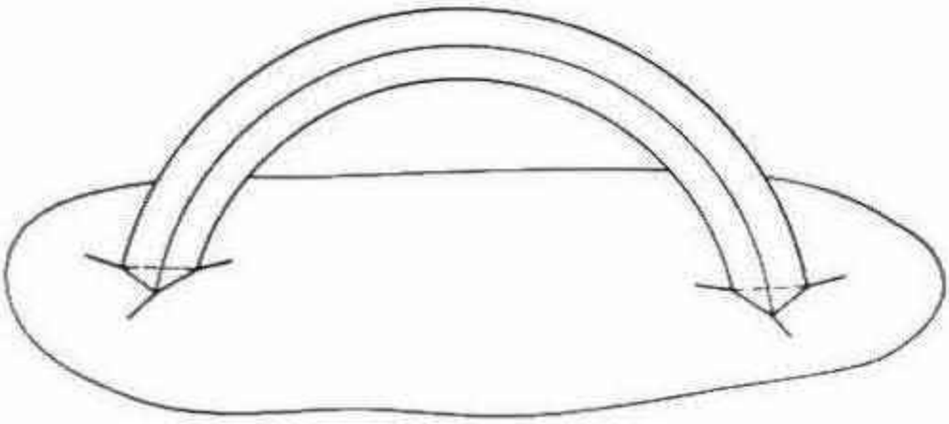


Figura 21.1a

superficies más complicadas al añadir cualquier número de asas adicionales. La operación de añadir un asa a una superficie dada reduce el valor de χ en 2. Esto se comprende al considerar que, como el asa se puede escoger con la forma de un prisma triangular curvado que una las dos caras triangulares de un mapa adecuado, como se tiene en la figura 21.1*a*, su inserción no altera a V, A se incrementa debido a ella en 3, y C se incrementa en $3-2$. Como sabemos que la esfera tiene $\chi = 2$, deducimos que la esfera con p asas tiene

21.12 $$\chi = 2 - 2p.$$

Se dice que esta superficie es de *género* p. En particular, una esfera es una superficie de género 0 y el toro es una superficie de género 1.

Con una laminilla rectangular de goma podemos construir un modelo del toro al identificar, o reunir, cada par de lados opuestos. La primera identificación produce un tubo, y la segunda un "tubo interior". Recíprocamente, al cortar un toro a lo largo de dos circunferencias que tengan un solo punto en común, podemos desdoblarlo (después de cierta distorsión) para tener un rectángulo cuyos pares de lados opuestos provienen de los dos cortes. Más en general, a partir de una superficie de género p, un conjunto *adecuado de 2p cortes, tales que todos empiezan y terminan en un solo* punto, nos permitirá desdoblar la superficie para tener un polígono de 4p lados cuyos pares de lados opuestos provienen de los 2p cortes [Coxeter y Moser 1, pág. 25], como se ha hecho en la figura 21.1*b*.

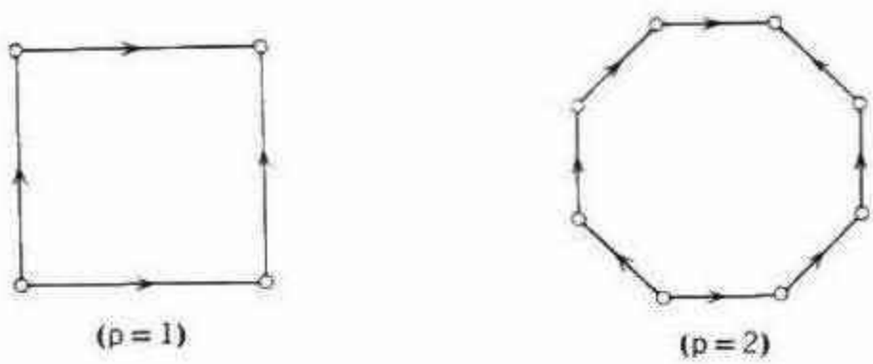


Figura 21.1b

Si consideramos los 2p cortes de la superficie como las 2p aristas de un mapa, encontraremos que este mapa tiene una cara y un vértice, lo que concuerda con la fórmula

$$\chi = V - A + C = 1 - 2p + 1 = 2 - 2p.$$

Cuando $p = 1$, se toma por conveniencia el rectángulo como cuadrado, y este cuadrado se puede considerar como una de las infinitas caras del mosaico regular $\{4, 4\}$ (figura 4.6*a*) o como la celda unitaria de la celosía que generan dos traslaciones en direcciones perpendiculares. La identificación de lados opuestos se logra al identificar puntos en posiciones correspondientes en todos los cuadrados, es decir, al suponer que las traslaciones no tienen efecto. En el lenguaje técnico, el plano euclidiano constituye la *superficie universal de cubierta* del toro. De la misma manera cuando $p > 1$, el polígono de 4p lados se toma por conveniencia como un polígono regular de 4p lados y de ángulo $\pi/2p$ en el plano hiperbólico, y podemos considerar este $\{4p\}$ como una cara de un mosaico hiperbólico regular $\{4p, 4p\}$. Los lados opuestos del $\{4p\}$ se relacionan por medio de 2p traslaciones, que generan un grupo para el que el $\{4p\}$ es la región fundamental. El plano hiperbólico infinito (que es la superficie universal de cubierta) se reduce a la superficie finita dada al identificar cada punto en uno de los $\{4p\}$ con los puntos correspondientes de todos los demás $\{4p\}$. El grupo de traslaciones se llama *grupo fundamental* de la superficie [Coxeter y Moser **1**, págs. 24–27, 58–60].

EJERCICIO

Una *gráfica* es un conjunto de puntos (que se llaman *vértices*), algunos de los que se encuentran unidos por arcos (que se llaman *aristas*). En particular, tenemos que los vértices y aristas de un mapa forman una gráfica. Recíprocamente, cualquier gráfica relacionada se puede trazar en una superficie de manera que forme un mapa que abarque la superficie.* Se dice que una gráfica es *planar* si se puede trazar en una esfera sin que se corten las aristas unas a otras; en este caso, con la misma facilidad se podrá trazar en el plano (inversivo), siempre que permitamos que una de las caras del mapa que resulte sea infinita. Se dice que un vértice tiene *valencia* (o "grado") q si pertenece a q aristas. Se dice que una gráfica es *trivalente* si cada vértice pertenece a tres aristas. En este caso, $3V = 2A$; por lo tanto, V es par. La *gráfica de Thomsen*† tiene seis vértices $P_1, \ldots, P_6$ y nueve aristas P_iP_j, donde $i + j$ es impar. Esta es la gráfica triplanar más sencilla. ¿Se puede trazar en el toro?

21.2 SUPERFICIES NO ORIENTABLES

Una superficie es no orientable si y sólo si existe en la superficie una curva cerrada tal que un círculo orientado pequeño cuyo centro recorra la curva continuamente llegue al punto de partida con la orientación inversa.

Hilbert y Cohn–Vossen
[**1**, pág. 306]

* J. H. Lindsay, Jr., Elementary treatment of the imbedding of a graph in a surface, *American Mathematical Monthly*, **66** (1959), págs. 117–118.

† W. Blaschke y G. Bol, *Geometrie der Gewebe* (Berlín, 1938), pág. 35.

Cada una de las superficies que estudiamos en § 21.1 es *orientable*, es decir, se puede definir consistentemente en todas partes un sentido positivo de rotación. Con más precisión, diremos que las caras de un mapa cualquiera de la superficie se pueden considerar como polígonos dirigidos de manera que las dos direcciones que así se han adjudicado a cada arista o bien discrepan, o bien se cancelan. Se dice que una superficie es *no orientable* si admite un mapa que no se puede orientar de la manera descrita. El caso más célebre es el de la *cinta de Möbius*, de la que se tiene un ejemplo al tomar una tira de papel *ABAB* de longitud varias veces mayor que su anchura, y pegar los dos extremos después de haber torcido uno de ellos por medio de un semigiro. Se puede verificar su no orientabilidad mediante un mapa que consista en una sola fila de cuadrados. Tiene *un solo lado* en el sentido de que una hormiga podría arrastrarse por toda la longitud de la cinta, sin cruzar la arista lateral acotadora, para encontrarse en el punto de partida, del "otro lado". Si se conectan dos ruedas de una máquina por una banda con esta forma (por ejemplo, con el fin de llevar materiales calientes o abrasivos) el material de la banda se desgastará igualmente por ambos lados. La Goodrich Company ha adquirido ya una patente de esta aplicación práctica de la cinta de Möbius.*

De manera diferente a lo que veíamos en § 21.1, tenemos que la cinta de Möbius tiene frontera. La frontera es una curva cerrada simple, pero resulta imposible contraerla físicamente puesto que, si la hacemos coincidir con la circunferencia de un círculo, entonces el interior del círculo ha de intersectar la superficie de la cinta. Esta dificultad práctica surge porque se considera el modelo dentro del espacio euclidiano. Teóricamente, esta consideración es gratuita. Cuando la frontera efectivamente disminuye y por último desaparece, la superficie cerrada que resulta es, topológicamente, ¡un plano proyectivo real! En otras palabras, *la cinta de Möbius es el plano proyectivo real con un hoyo.* Esto se comprende al pensar en el plano proyectivo (§ 6.9) como si fuera una esfera en la que se definen los puntos antípodas. Al hacer un hoyo circular en el polo norte debemos, por supuesto, hacer un hoyo igual en el polo sur. Lo que queda de la esfera es una zona limitada por dos paralelos de latitud, como los trópicos de Cáncer y de Capricornio. Pero la identificación de los puntos antípodas tiene por efecto que solamente necesi-

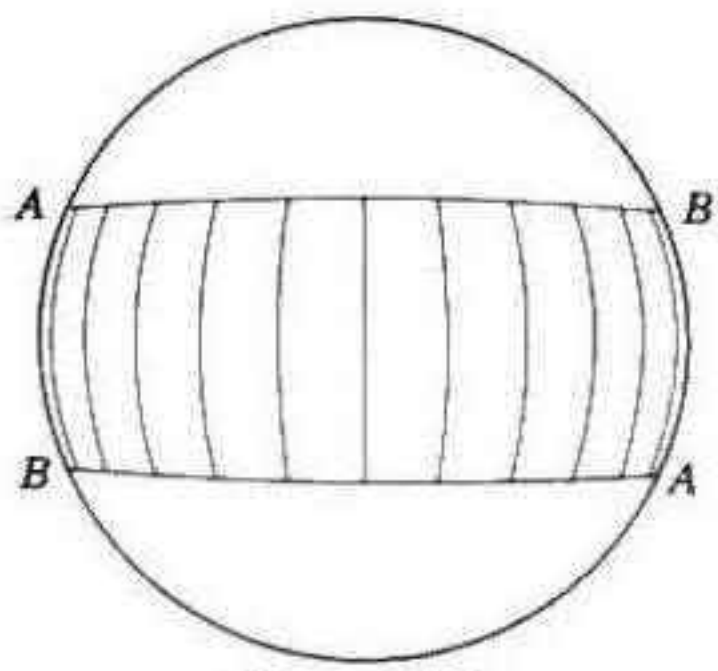


Figura 21.2a

* U. S. Patents 1,442,632 (1923), 2,479,929 (1949), 2,784,834 (1957).

tamos la mitad de la zona, que puede ser la mitad "visible" (figura 21.2*a*). Esta semizona constituye evidentemente, al identificar los extremos AB, una cinta de Möbius.

En lugar de tomar la esfera completa con todo par de puntos antípodas reunidos en identificación, podemos considerar el plano proyectivo como un hemisferio (que podría ser el hemisferio "sur") donde identificamos los puntos diametralmente opuestos en el ecuador periferial. En el espíritu de la topología, podemos alargar la superficie hemisférica hasta que cubra casi toda la esfera, y la periferia (donde se han identificado los puntos opuestos) se reducirá a un círculo muy pequeño alrededor del polo norte. Otra manera de explicar esto consiste en que el plano proyectivo es topológicamente equivalente a una esfera con una *cofia cruzada*, que se puede describir como un pequeño orificio circular que posee la propiedad mágica de que, en cuanto nuestra hormiga andariega llega a él, se encuentra alejándose del mismo orificio en el punto diametralmente opuesto (adentro, y no afuera, de la esfera).

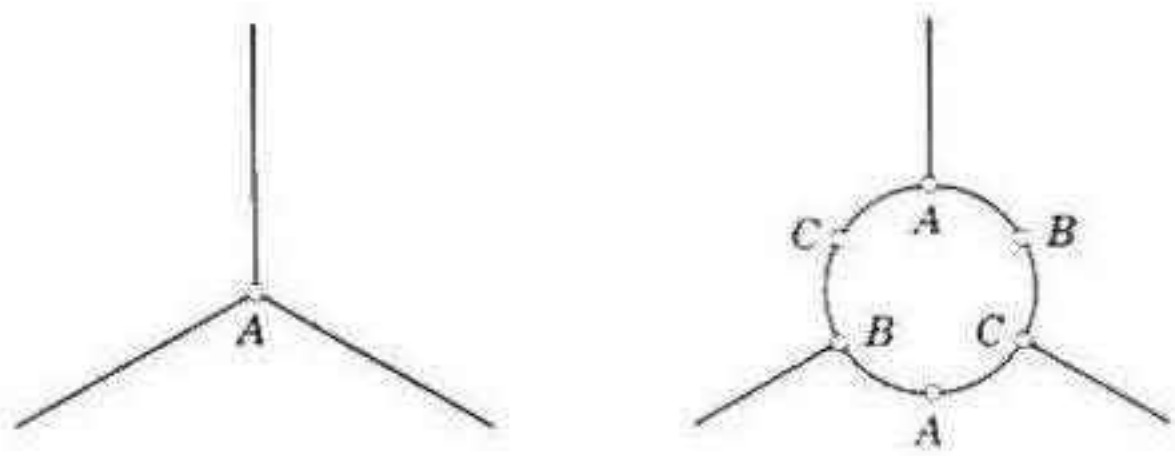


Figura 21.2b

Podemos derivar superficies más complicadas al añadir cofias cruzadas adicionales, y tenemos que cada una de ellas reduce el valor de χ en 1. Esto se comprenderá mejor si observamos que, cuando un mapa de una superficie determinada tiene un vértice A que pertenece a tres caras, podemos reemplazar A por una cofia cruzada $ABCABC$ como se ha hecho en la figura 21.2*b*. Puesto que al hacer esto se requiere la formación de dos vértices nuevos, B, C, y tres nuevas aristas BC, CA, AB, la inserción de la cofia cruzada incrementa V en 2, A (aristas) en 3 y no altera a C (caras). (Las caras a la izquierda y a la derecha se cortan ahora dos veces: a lo largo de la arista original que pasa por el punto A y nuevamente a lo largo de la nueva arista BC.) Como sabemos que una esfera tiene $\chi = 2$, deducimos que en una esfera de q cofias cruzadas

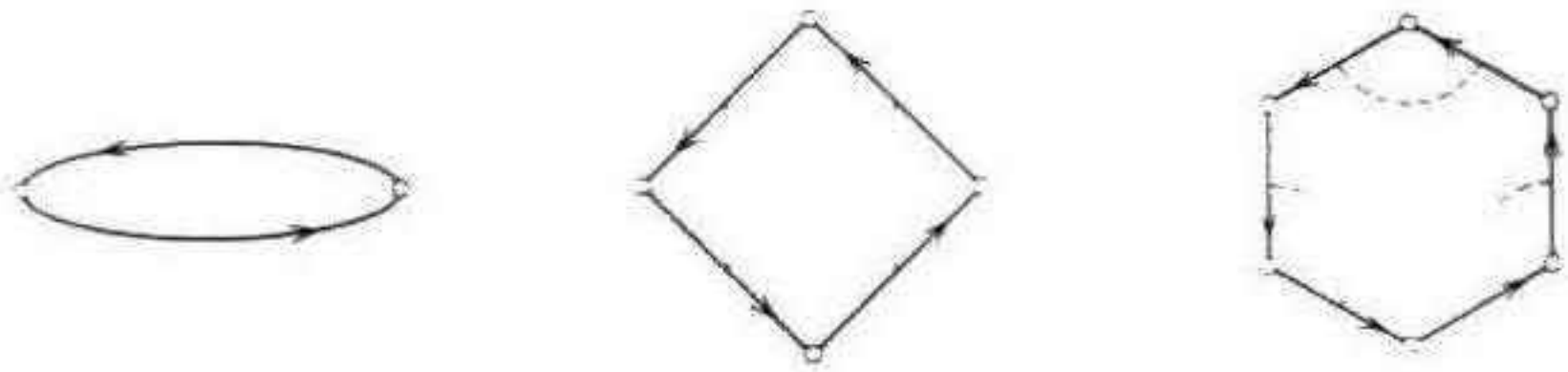
21.21 $$\chi = 2 - q.$$

Cuando $q = 1$, como ya hemos visto, esto es el plano proyectivo real. Cuando $q = 2$, consiste en la *botella de Klein* (o "toro no orientable") [Hilbert y Cohn–Vossen **1**, pág. 308].

Un conjunto adecuado de q cortes, tales que todos empiezan y terminan en el mismo punto, nos permite desdoblar la superficie de manera que nos quede un polígono de 2q lados en el que los q pares de lados adyacentes provienen de los q cortes [Coxeter y Moser **1**, págs. 25–28, 56–58] como

se tiene en la figura 21.2*c*. Estos cortes son las q aristas de un mapa de una cara y un vértice, según la fórmula

$$\chi = V - A + C = 1 - q + 1 = 2 - q.$$



(q = 1) (q = 2) (q = 3)

Figura 21.2c

Cuando q = 1, el polígono de 2q lados es un dígono, que se puede considerar como una de las dos caras del mosaico esférico {2, 2} (véase el ejercicio 1 al final de § 15.7). De hecho, la superficie universal de cubierta del plano proyectivo es la esfera, y su grupo fundamental es de orden 2, generado por la inversión central.

Cuando q = 2, el polígono de 2q lados se puede considerar como una cara del mosaico euclidiano {4, 4}, de manera que la superficie universal de cubierta será el plano euclidiano. De manera distinta a la del toro, cuyo grupo fundamental **p1** es generado por dos traslaciones, la botella de Klein tiene por grupo fundamental **pg**, generado por dos reflexiones en deslizamiento (véase § 4.3 y la lámina I). De la misma manera, cuando q > 2, de modo que la superficie universal de cubierta es el plano hiperbólico, el polígono de 2q lados es una cara del mosaico hiperbólico {2q, 2q}, y el grupo fundamental es el que generan q reflexiones en deslizamiento [Coxeter y Moser **1**, págs. 56–58].

EJERCICIOS

1. El plano proyectivo equivale topológicamente a un disco* en el que se identifican los puntos diametralmente opuestos.
2. ¿Cómo se puede trazar en una esfera la gráfica de Thomsen (véase el final de § 21.1) al disponer de una cofia cruzada (o en un disco con los puntos opuestos identificados)?
3. ¿Qué sucede con los vértices y las aristas de un prisma exagonal regular cuando lo proyectamos centralmente en la esfera circunscrita para identificar a continuación, los puntos antípodas?
4. ¿Equivale topológicamente la esfera con p asas y q cofias cruzadas a una esfera con 2p + q cofias cruzadas?

* Un disco consiste en un círculo al que se le agrega su interior. Otras propiedades topológicas del disco y la esfera se estudia en A. W. Tucker, *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress* (University of Toronto Press, 1946).

21.3 MAPAS REGULARES

Empezamos por dar un método para reducir una variedad bidimensional cualquiera a una de las formas poligonales que conocemos. El método que se emplea es tal que el polígono en el que la variedad se representa queda sujeto a una serie de transformaciones al deshacerlo por medio de cortes sencillos y, en seguida, volverlo a unir de manera que se obtenga un nuevo polígono que representa la misma variedad.

H. R. Brahana (1895–)

(*Annals of Mathematics*, 23 (1921), pág. 144)

Se puede demostrar* que toda superficie cerrada equivale topológicamente o bien a una esfera en la que hay p ($\geqslant 0$) asas (si la superficie es orientable) o a una esfera en la que hay q (>0) cofias cruzadas. En virtud de 21.12 y 21.21, esto significa que, desde el punto de vista topológico, no hay más de una superficie orientable cerrada para cada valor

$$\chi = 2,\quad 0,\ -2,\ -4, \ldots,$$

a saber, una esfera con $1-\frac{1}{2}\chi$ asas, y no hay más de una superficie no orientable cerrada para cada valor

$$\chi = 1,\quad 0,\ -1,\ -2, \ldots,$$

a saber, una esfera con $2-\chi$ cofias cruzadas. Ya hemos descrito en una de esas superficies un mapa muy sencillo con un vértice, $2-\chi$ aristas y una cara. En el caso orientable, este mapa es regular en el sentido que explicaremos a continuación.

Los vértices, aristas y caras de un mapa (en cualquier superficie cerrada, orientable o no orientable) se pueden denominar convenientemente *elementos* del mapa. Las permutaciones de los elementos que preservan las relaciones de incidencia se llaman *automorfismos* del mapa. El automorfismo forma un grupo (de orden 1 o mayor) que se llama *grupo del mapa*. Se generaliza así de manera natural el grupo de simetría del poliedro o el mosaico (§ 15.7), pero ya no interviene la idea de métrica. Se dice que un mapa es *regular* cuando sus automorfismos abarcan las permutaciones cíclicas de las aristas (y los vértices) que pertenecen a cualquiera de sus caras y también la permutación cíclica de las aristas (y las caras) que se cortan en uno cualquiera de los vértices de la cara en cuestión. Ese mapa es del "tipo $\{p, q\}$" si p aristas pertenecen a una cara y q a un vértice. El mapa *dual*, cuyas aristas cortan las del mapa original, es de tipo $\{q, p\}$. (Las letras p y q que se emplean aquí no tienen relación con el empleo que hicimos antes de p y q como los números de asas y de cofias cruzadas.)

Las ecuaciones 10.31 conservan su validez. Al combinarlas con 21.11, obtenemos la generalización de 10.32:

21.31 $$V = 2pr,\quad A = pqr,\quad C = 2qr.$$

* La demostración original de Brahana fue simplificada por Lefschetz [1, págs. 72–85] y otros. Una de las mejores exposiciones se debe a R. C. James, Combinatorial topology of surfaces, *Mathematics Magazine*, 29 (1955), págs. 1–39.

onde, si $\chi \neq 0$,

.32 $$r = \frac{\chi}{2p + 2q - pq}.$$

$\chi = 0$, de manera que $2p + 2q = pq$, como se tenía en § 4.6, hay una finidad de valores posibles para r, como veremos pronto.

Si $\chi = 1$ ó 2, los valores posibles de p y q se determinan por medio de 0.33 sin las restricciones $p > 2$, $q > 2$. De esta manera, los mapas regulares una esfera ($\chi = 2$) son simplemente los mosaicos esféricos

.33 $$\{p, 2\}, \quad \{2, p\}, \quad \{3, 3\},$$
$$\{4, 3\}, \quad \{3, 4\}, \quad \{5, 3\}, \quad \{3, 5\},$$

saber: el *diedro* cuyos p vértices están a distancias iguales a lo largo del uador, el *osoedro** en el que las aristas y las caras son p meridianos y p nulas, y variantes "infladas" de los cinco cuerpos platónicos. Todos estos enen simetría central, con la excepción del diedro y su dual en el que p es par, y el tetraedro $\{3, 3\}$. En los casos de simetría central podemos entificar los puntos antípodas para obtener los mosaicos regulares del plano íptico ($\chi = 1$):

.34 $$\{p, 2\}/2 \quad \text{y} \quad \{2, p\}/2 \quad (p \text{ par}),$$
$$\{4, 3\}/2, \quad \{3, 4\}/2, \quad \{5, 3\}/2, \quad \{3, 5\}/2$$

oxeter y Moser **1**, pág. 111]. Por ejemplo, al identificar los elementos puestos del cubo (figura 10.5*b*), vemos que $\{4, 3\}/2$ constituye una partición del plano elíptico (o del plano proyectivo real) en tres "cuadrados", que odemos denotar por *ABCD*, *ACDB*, *ADBC*. (Estos cuadrados no son sino los es pañuelos que Lady Muriel empezó a coser cuando intentaba hacer la olsa de Fortunato [Dodgson **4**, pág. 100–104]. Los dos primeros, unidos or el lado común *CD* forman una cinta de Möbius cuya cota es *ADBC*.) De misma manera, $\{5, 3\}/2$ constituye una partición del plano elíptico en seis ntágonos, cada uno de los que queda rodeado por los otro cinco.

Los mapas regulares del toro se derivan a partir de los mapas regulares finitos en su superficie universal de cubierta, que es el plano euclidiano. omo vimos en § 4.6, estos mapas infinitos son los mosaicos regulares

.35 $$\{6, 3\}, \quad \{4, 4\}, \quad \{3, 6\}.$$

Las identificaciones necesarias se determinan por medio de subgrupos de s grupos de traslación de estos mosaicos.

Se pueden tomar los vértices de $\{4, 4\}$ como la celosía de los puntos tales e sus coordenadas cartesianas (x, y) son enteros. El toro se deriva al entificar los lados opuestos de un cuadrado, uno de cuyos lados va de , 0) a (b, c), donde b y c son enteros positivos o cero (pero no pueden r *ambos* cero). Puesto que el área de este cuadrado es $b^2 + c^2$, la parte

* Este término (literalmente "cualquier número de caras") lo acuñó Vito Caravelli 724–1800), cuya obra *Traité des hosoèdres* fue publicado en París (1959) por la brairie Scientifique et Technique.

del $\{4, 4\}$ original que queda en su interior consta de $b^2 + c^2$ cuadrados unitarios. De esta manera, encontramos en el toro un mapa

$$\{4, 4\}_{b,c}$$

en el que

$$V = b^2 + c^2, \qquad A = 2V, \qquad C = V$$

[Coxeter y Moser **1**, pág. 103]. En particular, $\{4, 4\}_{1,0}$ es el mapa (que tiene un vértice y una cara) que empleamos en § 21.1 al desdoblar el toro después de haberlo cortado por las aristas del mapa. (Si nos parece paradójico que un mapa del tipo $\{4, 4\}$ tenga un sólo vértice, tenemos que reconocer que la cara sigue siendo cuadrangular aunque los cuatro vértices coincidan con el único vértice del mapa.) El mapa $\{4, 4\}_{2,1}$, en el que cada una de las cinco caras queda rodeada por las otras cuatro, se puede ver en la figura 21.3*a*.

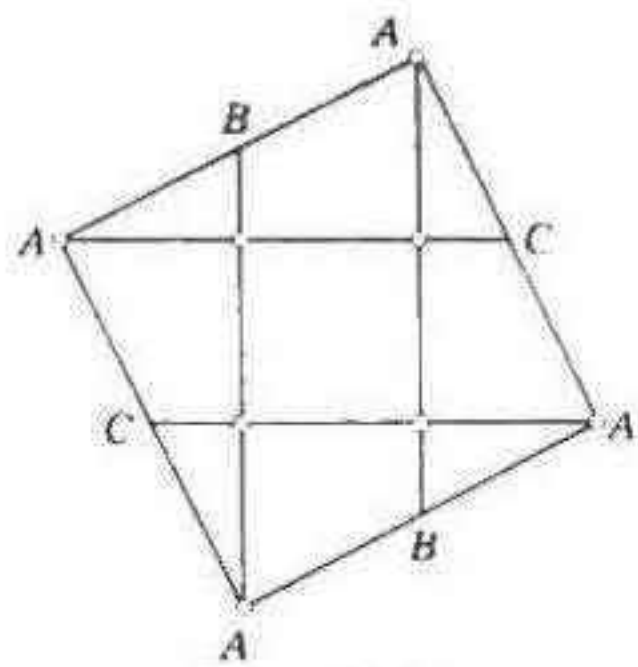


Figura 21.3a

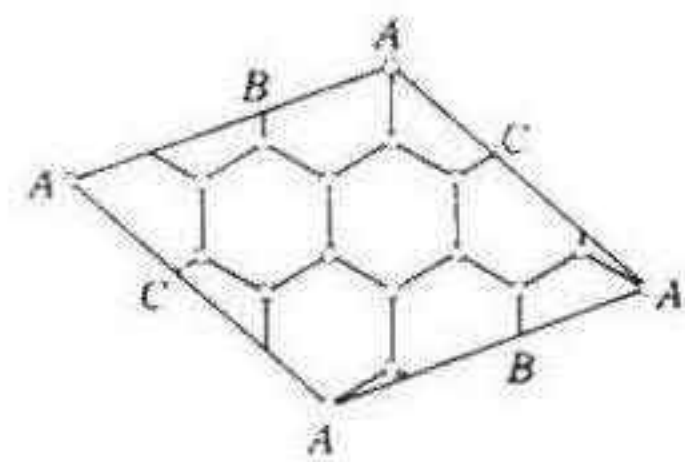


Figura 21.3b

De la misma manera, los vértices de $\{3, 6\}$ se pueden tomar como la celosía de los puntos tales que sus coordenadas oblicuas, cuando los ejes tienen una inclinación de 60°, son enteros. Derivamos el toro al identificar los lados opuestos de un rombo cuyo ángulo es de 60°, en el que los lados van de $(0, 0)$ a (b, c). Puesto que el área del rombo es $b^2 + bc + c^2$ multiplicado por el área de la celda unitaria de la celosía (que consta de dos caras adyacentes de $\{3, 6\}$), la parte de $\{3, 6\}$ que queda adentro está compuesta por $2(b^2 + bc + c^2)$ triángulos equiláteros. Encontramos, de esta manera, un mapa en el toro que es

$$\{3, 6\}_{b,c}$$

en el que

$$V = b^2 + bc + c^2, \qquad A = 3V, \qquad C = 2V$$

[Coxeter y Moser **1**, pág. 107]. (Con respecto a una variante afín de la mitad de $\{3, 6\}_{2,1}$ véase la figura 13.5*c*.) El mapa dual

$$\{6, 3\}_{b,c}$$

tiene $b^2 + bc + c^2$ caras exagonales. En particular, $\{6, 3\}_{2,1}$ (figura

21.3*b*)* constituye la partición de Heawood del toro en siete exágonos, cada uno de los que queda rodeado por los otros seis.

De esta manera, hemos visto que el toro admite una infinidad de mapas regulares de cada uno de los tres tipos 21.35. Por otra parte, no hay mapas regulares en la botella de Klein [Coxeter y Moser **1**, pág. 116].

Si un mapa regular tiene más de un vértice y más de una cara, todas sus aristas unen dos vértices y separan dos caras. Cuando hay un automorfismo que intercambia los dos vértices sin intercambiar las dos caras (en cuyo caso habrá otro autormorfismo que hace lo opuesto), se dice que el mapa es *reflexible* [Ball **1**, pág. 129; Coxeter y Moser **1**, pág. 101]. Es claro que todos los mapas regulares de la esfera y todos los que están en cualquier superficie no orientable son reflexibles, pero los del toro solamente son reflexibles cuando $bc(b-c)=0$. Coxeter y Moser [**1**, pág. 102] sugirieron que posiblemente todos los mapas regulares en superficies más complicadas (*por ejemplo*, superficies de característica negativa) sean reflexibles. Sin embargo, esta conjetura ha sido refutada por el descubrimiento de J. R. Edmonds de un mapa regular no reflexible† del tipo $\{7, 7\}$ y género 7, con 8 vértices, 28 aristas y las 8 caras heptagonales

FDCGBEH, GEDACFH, AFEBDGH, BGFCEAH, CAGDFBH, DBAEGCH, ECBFADH, ABCDEFG.

EJERCICIOS

1. Descríbanse los mapas $\{2, 1\}$ y $\{1, 2\}$ en la esfera. (El primero tiene una cara que es un dígono $\{2\}$; el segundo tiene dos caras que son monógonos $\{1\}$.)

2. El mosaico elíptico $\{2q, 2\}/2$ tiene q vértices y q aristas, todos en una recta, y una cara. Su dual $\{2, 2q\}/2$ tiene un vértice, q rectas completas por aristas y q regiones angulares por caras. Descríbanse los demás mosaicos regulares del plano elíptico.

3. Hemos visto que la descomposición estándar del toro constituye un mapa de una cara $\{4, 4\}_{1,0}$. La descomposición estándar de la botella de Klein (como se hizo en la segunda parte de la figura 21.2*c*) constituye otro mapa de una cara de tipo $\{4, 4\}$, pero en este caso el mapa no es regular. En ambos casos, el vértice solitario y las dos aristas forman una gráfica muy sencilla, que se puede describir a muy grandes rasgos como una figura de ocho. Se puede trazar la misma gráfica en el plano proyectivo para formar $\{2, 4\}/2$ o en la esfera para formar un mapa irregular en el que las caras consisten en un dígono y dos monógonos.

4. La descomposición estándar de una esfera con tres cofias cruzadas (como se ve en la tercera parte de la figura 21.2*c*) constituye un mapa irregular de una sola cara del tipo $\{6, 6\}$. Su vértice y sus tres aristas forman un "trébol" de tres rizos. Se puede trazar la misma gráfica en la botella de Klein como mapa irregular del tipo $\{3, 6\}$, en el toro como $\{3, 6\}_{1,0}$, en el plano proyectivo como $\{2, 6\}/2$ y en la esfera como un mapa irregular tal que sus caras consisten en un triángulo y tres monógonos.

5. Descríbanse los mapas reflexibles

$$\{4, 4\}_{1,1}, \quad \{4, 4\}_{2,0}, \quad \{3, 6\}_{1,1}, \quad \{6, 3\}_{1,1}, \quad \{6, 3\}_{2,0}.$$

* Se pueden ver otras maneras de dibujar el mapa de Heawood en Coxeter, Map-coloring problems, *Scripta Mathematica*, **23** (1957), págs. 19–21, y The four-color map problem, 1840–1890, *Mathematics Teacher*, **52** (1959), págs. 288–289.

† Véase también Robert Frucht, *Canadian Journal of Mathematics*, **4** (1952), pág. 247.

6. Los vértices y aristas de $\{6, 3\}_{1,1}$ forman la gráfica de Thomsen (véase el final de § 21.1). Los de $\{4, 4\}_{2,2}$ forman una gráfica análoga que tiene ocho vértices en lugar de seis.

7. Se dice que una gráfica es *completa de V puntos* si todo par de sus V vértices queda unido por una arista. Los vértices y aristas de los mapas siguientes forman gráficas completas de V puntos (¿para qué valores de V?):

$$\{3, 2\}, \quad \{3, 3\}, \quad \{4, 3\}/2, \quad \{4, 4\}_{2,1}, \quad \{3, 5\}/2, \quad \{3, 6\}_{2,1}.$$

8. Los vértices y las aristas del mapa de Edmonds forman una gráfica completa de 8 puntos.

9. No hay ningún mapa del tipo $\{1, 1\}$. (*Indicación*: iguálense $p = q = 1$ en 21.31 y en 21.32.)

21.4 EL PROBLEMA DE LOS CUATRO COLORES

"Lo dudo", dijo el Carpintero,
Y derramó una amarga lágrima. *

Lewis Carroll

[Dodgson 2, Capítulo 4]

Se puede decir que la historia de la teoría de los mapas de superficie empieza en 1840, cuando Möbius planteó a sus estudiantes el desconcertante problema de dividir un país en cinco distritos de manera que cada dos de ellos tuvieran una frontera (que no sea un simple punto) en común. La imposibilidad de realizar esta partición condujo con naturalidad a considerar la cuestión de que siempre basten cuatro colores para iluminar un mapa cuando estipulamos que son necesarios colores diferentes siempre que dos distritos comparten una línea de frontera o, si nos expresamos en términos matemáticos, siempre que dos caras tienen una arista común. Hay que hacer notar que cada cara se relaciona simplemente (es decir, topológicamente constituye un disco). De esta manera, se aplica el problema geográfico a una sola isla o un continente: el océano y las demás islas o continentes se toman en conjunto como integrantes de una cara más, y si esta cara es azul, supondremos que se permite el uso del mismo color para otras caras. En el mapa de Europa, por ejemplo, necesitaremos tres colores diferentes (por ejemplo, el verde, el rojo y el amarillo) para Bélgica, Francia y Alemania; Holanda podrá tener el mismo color que Francia, pero Luxemburgo deberá ser azul, como el mar.

En las figuras 15.4*a*, *b*, *c* se ejemplifica el uso de cuatro colores en relación con el tetraedro y el octaedro, y el de cinco para el icosaedro. Para el tetraedro, el único número posible es cuatro, puesto que cada cara corta a las demás. Al margen de este caso, que es el más sencillo, *cualquier mapa cuyas caras sean triángulos puede colorearse con tres colores.*† Además, se puede colorear cualquier mapa que tenga un número par de caras en cada vértice (como sucede con el octaedro) con dos colores, como un tablero de ajedrez.

* *"I doubt it", said the Carpenter,*
And shed a bitter tear. (*T*)

† R. L. Brooks, On coloring the nodes of a network, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37 (1941), págs. 194–197.

El problema de determinar si son suficientes cuatro colores para cualquier mapa en el plano o en la esfera es llamado a veces el *problema de Guthrie* en memoria de Francis Guthrie, que recibió su grado B.A. (*bachelor*: equivale a una licenciatura [*T*]) en Londres el año de 1850, y el LL.D. (doctorado) en 1852. Entre estas dos fechas, se le ocurrió el problema al colorear un mapa de Inglaterra. En vano trató de demostrar que bastaban cuatro colores. El 23 de octubre de 1852, su hermano menor, Frederick, le comunicó su conjetura a Augustus De Morgan (el autor de *A Budget of Paradoxes*). Cayley, en 1878, revivió el interés en el problema al reunirse la London Mathematical Society, cuando preguntó si alguno lo había resuelto. El desafío de Cayley fue respondido por A. B. Kempe y P. G. Tait, que publicaron argumentaciones plausibles que durante diez años fueron aceptadas (incluso por el mismo Klein) como demostración de que bastan los cuatro colores. Pero en 1890, Heawood señaló la falacia en la argumentación de Kempe y empleó un contraejemplo con un mapa de 18 caras. De hecho, el número de caras se puede reducir a 9, de manera que la falacia quede al descubierto con más prontitud.*

Describiremos en §§ 21.5–21.7 la parte válida del trabajo de Kempe junto con la extensión de Heawood a mapas en el toro y otras superficies relacionadas de manera múltiple.

EJERCICIOS

1. ¿De cuántas maneras esencialmente diferentes se puede colorear un cubo dados tres colores, y un dodecaedro dados cuatro?
2. En la figura 15.4*c* se ha iluminado el icosaedro con cinco colores, de manera que cada cara y sus tres vecinas tienen cuatro colores diferentes. Substitúyase cada "*e*" por el color restante, de manera que se reduzca el número de colores a cuatro. Empiécese de nuevo, para colorear el icosaedro con tres colores [Ball 1, págs. 238–241].
3. Inténtese dibujar un mapa que sea difícil de iluminar con cuatro colores.

21.5 EL TEOREMA DE LOS SEIS COLORES

> *Incluso el claro de luna que estaba frente a él se desvaneció de su conciencia, pues se le había metido en la cabeza un teorema que podía ser verdadero o falso, y su mente se lanzaba en todas direcciones en busca de pruebas que demostraran su validez y contraejemplos para señalar que su validez era imposible.*
>
> J. L. Synge [2, pág. 165]

Las ecuaciones 10.31, que se aplicaban a un mapa regular del tipo $\{p, q\}$, conservan su validez en relación con un mapa general al que pertenecen diversos tipos de caras y diversos números de caras en cada vértice, siempre que interpretemos p como el número *promedio* de vértices (o aristas) de una

* Coxeter, *Mathematics Teacher*, **52** (1959), págs. 283–286. La falacia del argumento de Tait se describe en Ball [1, págs. 224–226].

cara, y q como el número *promedio* de caras (o aristas) en un vértice. Puesto que se puede omitir un vértice que pertenezca solamente a dos caras al combinar las dos aristas, no se pierde generalidad al suponer que todo vértice pertenece, por lo menos, a tres aristas. De esta manera, $q \geqslant 3$ y

$$2A = qV \geqslant 3V,$$

de donde, por 21.11, $A \leqslant 3\,(A - V) = 3\,(C - \chi)$ y

21.51 $$p = \frac{2A}{C} \leqslant 6\left(1 - \frac{\chi}{C}\right).$$

Esto demuestra que $p < 6$ siempre que $\chi > 0$, es decir, con respecto a la esfera ($\chi = 2$) o el plano proyectivo ($\chi = 1$). En consecuencia,

21.52 *Todo mapa en la esfera o en el plano proyectivo tiene por lo menos una cara en la que el número de aristas es menor que 6.*

Ahora podemos demostrar, por inducción sobre el número de caras, el

TEOREMA DE LOS SEIS COLORES. *Para colorear un mapa cualquiera en la esfera o el plano proyectivo se requieren, como máximo, seis colores.*

Donde dice "un mapa cualquiera" entendemos "un mapa de C caras" en correspondencia con cada valor particular de C. Cuando $C \leqslant 6$ no hay problema: podemos asignar colores diferentes a todas las caras. Demostraremos

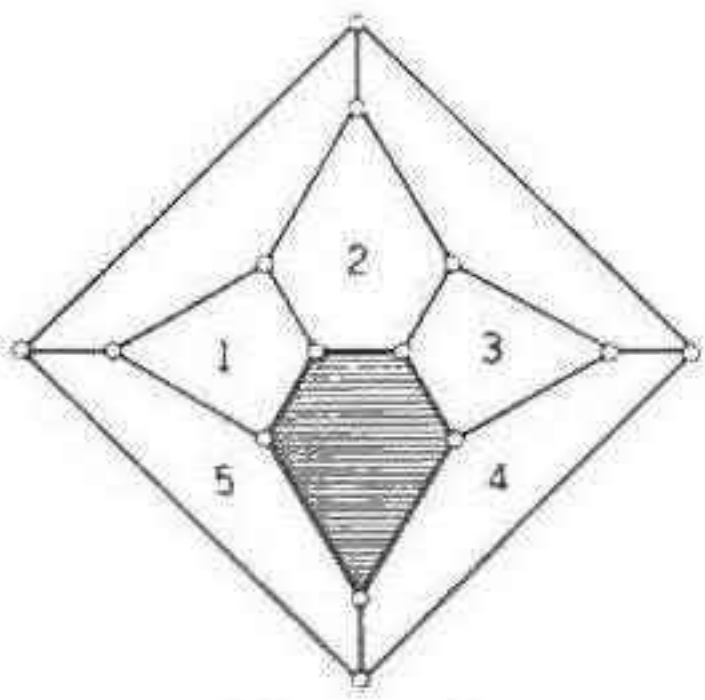


Figura 21.5a

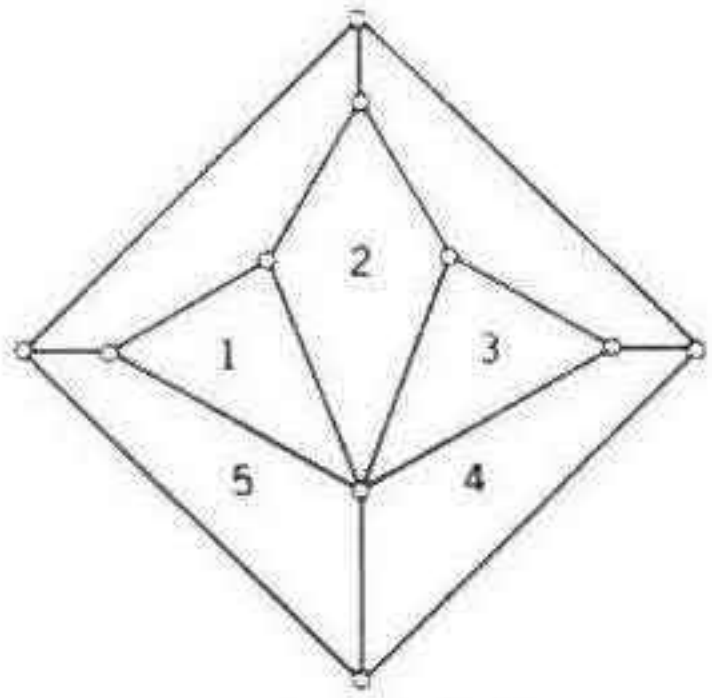


Figura 21.5b

el teorema si podemos deducir el caso de las 7 caras del de las 6, el de 8 caras del de las 7 y así sucesivamente. De acuerdo con esto, suponemos inductivamente que el teorema es válido para todo mapa que tenga $C - 1$ caras y pasaremos a investigar el mapa de C caras, y dirigiremos nuestra atención sobre todo a la cara (o a una de las caras) que tenga 5 o menos aristas (véase 21.52). Con el fin de tener elementos definidos, supondremos que esta cara es un pentágono, como lo es la cara que se ha sombreado en la figura 21.5*a*. (Se puede seguir la misma argumentación, con algunos cambios triviales, si se toma como cuadrángulo, triángulo o dígono.) En la figura 21.5*b* se puede ver un mapa modificado en el que la cara pentagonal ha disminuido hasta ser solamente un punto, es decir, tal que su territorio ha sido tomado por sus cinco vecinas. Por medio de nuestra suposición induc-

tiva, el mapa modificado, que solamente tiene $C-1$ caras, se puede colorear con seis colores. Hagamos esto, y a continuación apliquemos los mismos colores a las caras respectivas del mapa original. Entonces, incluso en el caso de que las cinco caras vecinas necesiten cinco colores diferentes, queda aún un sexto color para la cara pentagonal.

Puesto que podemos aplicar la misma argumentación cuando $C=7$, en seguida cuando $C=8$, y así sucesivamente, el teorema de los seis colores es válido para todos los valores de C.

¿Se puede reemplazar el número 6 por 5? No en el caso del plano proyectivo, como veremos en seguida. Se puede hacer con respecto a la esfera mediante una argumentación más sutil que depende del teorema topológico que afirma que un círculo descompone la esfera sobre la que está en dos regiones separadas [Ball 1, pág. 229]. Pero el trecho que va de los cinco colores que son siempre suficientes y los cuatro que suelen ser necesarios nunca se ha cubierto. El mismo Heawood prosiguió con la investigación del problema durante el resto de su vida, y lo redujo a álgebra pura. Otros autores han incrementado gradualmente la cota inferior del número de caras en relación con un mapa que podría requerir de cinco colores.

Con seguridad casi total, se puede afirmar que la analogía de esto con el papel que desempeñan en la aritmética los números 4 y 5 es una simple coincidencia. Según Mordell [1, pág. 19], es "muy fácil demostrar que todo entero es, como máximo, la suma de cinco cubos de enteros, positivos o negativos, y existe una conjetura sin demostrar de que cuatro cubos son suficientes".

Por otra parte, para el plano proyectivo no hay trecho que cubrir: los seis colores son tan necesarios como suficientes. El mapa más sencillo que nece-

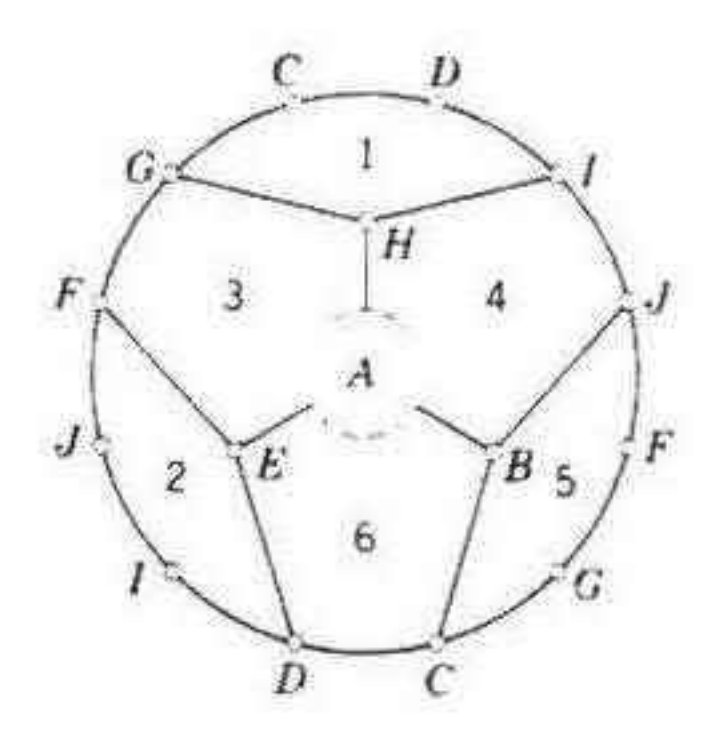


Figura 21.5c

sita los seis es $\{5, 3\}/2$ (véase la página 433), que en la figura 21.5*c* se ha trazado como un disco donde se identifican los puntos diametralmente opuestos. Al hacer un hoyo circular en el vértice A, obtenemos el mapa de seis colores de H. Tietze sobre la cinta de Möbius (figura 21.5*d*). Aquí, como en todo el plano proyectivo, los seis colores son necesarios y suficientes.

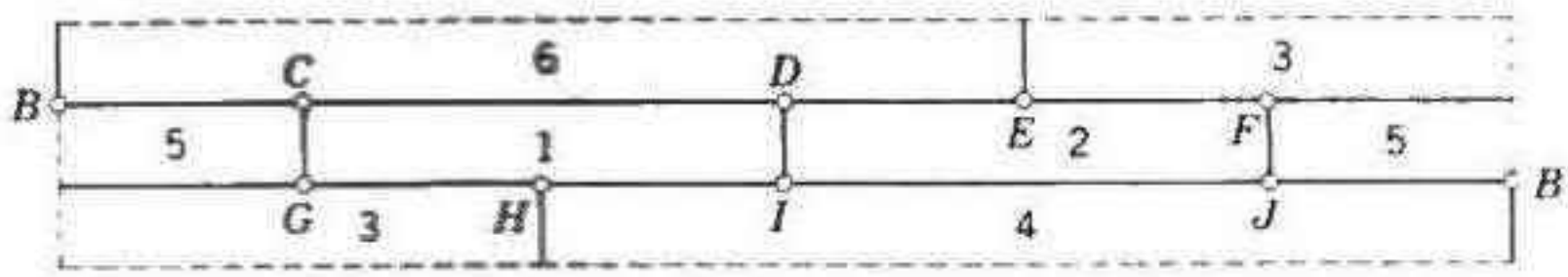


Figura 21.5d

EJERCICIO

Constrúyase un modelo de la cinta de Möbius e ilumínese como se ha indicado en la figura 21.5*d*. (Puesto que esta es una superficie de "una cara", el papel deberá tener el mismo color por ambos lados en todas partes.)

21.6 EL NUMERO SUFICIENTE DE COLORES PARA CUALQUIER SUPERFICIE

> [Huck Finn, hablando a Tom Sawyer en el globo:] "*Todavía estamos encima de Illinois. Tú mismo puedes ver que Indiana ni siquiera se ve. . . . Illinois es verde. Indiana rosa. Señálame, si puedes, algo de rosa, allá abajo. No, señor; es todo verde.*"
> "*¿Indiana rosa? ¡Qué mentira!*"
> "*No es mentira. Yo lo he visto en el mapa, y es rosa.*"
>
> Mark Twain (= S. L. Clemens, 1835–1910)
>
> (*Tom Sawyer Abroad*, Harper, Nueva York, 1896, capítulo 3)

El problema de colorear mapas en superficies más complicadas no es difícil, como lo era en la esfera, sino fácil, como lo fue en el plano proyectivo. Podemos, de hecho, demostrar el

TEOREMA DE HEAWOOD *Para colorear un mapa cualquiera en una superficie de característica* $\chi < 2$ *se requieren, como máximo,* $[N]$ *colores, donde*

$$N = \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}.$$

Puesto que ya se demostró el caso en el que $\chi = 1$ en § 21.5, supondremos que

$$\chi \leqslant 0.$$

Puesto que la validez del teorema es obvia cuando $C \leqslant N$ (lo que implica $C \leqslant [N]$), supondremos que

$$C > N$$

y emplearemos la inducción con el número de caras, al suponer que $[N]$

colores son suficientes para cualquier mapa que tenga $C-1$ caras. Puesto que N cumple la ecuación cuadrática

$$N^2 - 7N + 6\chi = 0$$

ó

$$6\left(1 - \frac{\chi}{N}\right) = N - 1,$$

la desigualdad 21.51 viene a ser

$$p \leqslant 6\left(1 - \frac{\chi}{C}\right) \leqslant 6\left(1 - \frac{\chi}{N}\right) = N - 1.$$

Hay, en consecuencia, por lo menos una cara que tenga $[N]-1$ o menos aristas (cf. 21.52). Como hicimos en § 21.5, continuaremos con $[N]$ en lugar de 6 para concluir que $[N]$ colores son suficientes para el mapa dado.

Aunque esta demostración se derrumba cuando χ es positiva, podemos advertir que la expresión de Heawood no da solamente el valor correcto de 6 cuando $\chi = 1$ sino también el valor esperado de 4 cuando $\chi = 2$.

EJERCICIO

Tabúlese $[N]$ en relación con valores desde 2 hasta -9.

21.7 SUPERFICIES QUE NECESITAN EL NUMERO COMPLETO DE COLORES

> *"Mira: supongamos que un artista está pintando a un becerro café y a un perro grande también café.... Los tiene que pintar de manera que los puedas distinguir en el momento en que veas el cuadro, ¿o no? Claro que sí. Bueno, ¿cómo quieres que los pinte de café a los dos? No, ¿verdad? A uno lo pinta azul, y entonces ya no te puedes equivocar. Pues lo mismo pasa con los mapas. Por eso hacen cada estado de un color diferente..."*
>
> Mark Twain (*ibid.*)

El teorema de Heawood (cuando $\chi = 0$) nos dice que se puede iluminar cualquier mapa en el toro con siete colores. Su mapa regular $\{6, 3\}_{2,1}$ en el que las siete caras se cortan todas entre sí, demuestra que, por lo menos, hay un mapa en el toro que necesita los siete colores. Puesto que la expresión de Heawood para obtener N no depende más que de χ, señala el mismo número de 7 con respecto a la botella de Klein. Philip Franklin, sin embargo, demostró un *teorema de los seis colores para la botella de Klein*.*

Ringel [1, pág. 124] demostró que la botella de Klein es la *única* superficie no orientable que no necesita tantos colores como $[N]$. Al insertar, por ejemplo, una cofia cruzada en uno de los vértices del mapa de

* Coxeter, *Scripta Mathematica*, 23 (1957), págs. 21–23.

siete caras de Heawood sobre el toro, como se hizo en la figura 21.2*b*, obtenemos un mapa de siete caras en la superficie de característica -1. Este mapa también necesita los siete colores, puesto que todas sus caras se cortan. (Algunos pares de ellas, de hecho, se cortan dos veces.)

En el caso de una superficie orientable de género $p = 1 - \frac{1}{2}\chi$ el número de Heawood $[N]$ se determina por

$$N = \frac{7 + \sqrt{48p + 1}}{2}.$$

y es acertado dar el nombre de "conjetura de Heawood" a la afirmación de que, para todo p, la superficie orientable de género p lleva en sí un mapa de $[N]$ caras, tales que todas se cortan unas a otras. Esta conjetura se convirtió en teorema en 1968, cuando Ringel y Youngs* descubrieron un mapa que cumple el requisito para todo p. Esta hazaña fue el clímax de una larga historia. La investigación fue comenzada por L. Heffter en 1891, y quedó en el olvido hasta 1952, cuando Ringel la reemprendió. A partir de 1966 colaboró con Youngs, y recibieron ideas que los ayudaron de W. Gustin, C. M. Terry y L. R. Welch. Jean Mayer (un profesor de literatura francesa) resolvió independientemente los valores de p hasta 32 en 1967. Los cuatro casos más difíciles ($p = 59, 83, 158, 257$) fueron resueltos por Youngs y Richard Guy en 1968.

EJERCICIOS

1. Por medio de una substitución del "hoyo" de la figura 21.5*c* por una cofia cruzada, obténgase un mapa de seis colores (compuesto por 3 pentágonos y 3 heptágonos) en la botella de Klein.
2. Trácese un mapa de ocho colores en la superficie de género dos [Ball 1, pág. 237].

* Gerhard Ringel y J. W. T. Youngs, Solution of the Heawood map-colouring problem, *Proceedings of the National Academy of Sciences* (EE. UU.), 1968.

22

Geometría de cuatro dimensiones

Hace mucho tiempo que la idea del espacio de cuatro dimensiones se ha visto envuelta en una atmósfera atractiva de misterio. La actitud axiomática (12.44) disipa el misterio sin que por ello disminuya la fascinación. Estamos acostumbrados a las geometrías no euclidianas y, por lo tanto, ya no nos sentimos desconcertados ante la posibilidad de que dos planos tengan un punto común sin tener una recta común. Para hablar con más sencillez, consideraremos los puntos del espacio euclidiano con cuatro coordenadas cartesianas en lugar de las dos o tres habituales. Dos puntos distintos cualesquiera determinan una recta, los tres vértices de un triángulo determinan un plano y los cuatro vértices de un tetraedro determinan un *hiperplano*, el cual es dado por una sola ecuación lineal que relaciona a las cuatro coordenadas.

Describiremos en §§ 22.1–22.3 los entes análogos en cuatro dimensiones a los cuerpos platónicos. Veremos que existen seis de estos *politopos* regulares. Cada uno está compuesto por un número finito de celdas sólidas en hiperplanos distintos, colocados de manera que toda cara de cada celda pertenece también a otra celda. Todos estos politopos regulares los descubrió Schläfli antes de 1855.

De la manera en la que podemos hacer dibujos planos de cuerpos sólidos al proyectarlos ortogonalmente en el plano, podemos elaborar "dibujos" planos o tridimensionales de los hipercuerpos al proyectarlos o bien en el plano, o bien en un hiperplano. En las figuras 22.1*a*, *b* y 22.3*b* se pueden ver ejemplos del primer procedimiento; un ejemplo del segundo aparece en la lámina III, página 404.

Consideraremos en § 22.4 algunas colmenas (o "mosaicos sólidos", o "politopos degenerados") que consisten en una infinidad de celdas sólidas en el mismo espacio tridimensional. Veremos en § 22.5 que estas ideas ayudan a explicar algunos resultados experimentales que provienen de empaquetar esferas iguales.

La geometría de este capítulo es euclidiana. Pero las demás clases de geometría se pueden extender de manera parecida a espacios de cualquier número de dimensiones. Como comenta L. Fejes Tóth en uno de sus libros, "podemos crear un conjunto infinito de universos nuevos, cuyas leyes están al alcance de nuestra comprensión, aunque nunca podamos poner el pie en ellos".

22.1 LAS FIGURAS MAS SENCILLAS DE CUATRO DIMENSIONES

. . . para qué . . . podáis comprender, en unión de todos los santos, cuál es la anchura, la longitud, la altura y la profundidad . . .

Efesios III, 17–18

Los espíritus tienen cuatro dimensiones.

Henry More (1614–1687)

Si un habitante de planolandia pudiera moverse en tres dimensiones, los otros habitantes, incapaces de hacer lo mismo, le atribuirían poderes sobrenaturales, pues aparecería y desaparecería a su antojo, así como (según lo que verían) crear materia o destruirla. . . . Demos un paso más para concebir el mundo de una dimensión –que se parecería a un tubo alargado– en el que los habitantes solamente se moverían hacia adelante o hacia atrás. . . . La vida en linealandia sería un poco aburrida. . . . Un habitante no conocería más que a otros dos individuos; a saber, sus vecinos, uno a cada lado.

W. W. Rouse Ball

(*Mathematical Recreations and Essays*, 9ª edición, 1920, p. 426)

Cuando intentamos apreciar la idea del espacio euclidiano de 4 dimensiones, acudimos a la imagen de un ser hipotético bidimensional que intentara visualizar un mundo de tres dimensiones.* En la geometría del espacio, podemos encontrar una recta ("la tercera dimensión") que sea perpendicular a dos rectas que se cortan y, por lo tanto, a todas las demás rectas del mismo plano. De manera análoga, en el espacio de 4 dimensiones podemos encontrar una recta ("la cuarta dimensión") que sea perpendicular a las tres aristas de un ángulo sólido triedral, como los que hay en los vértices de un cubo, que será, por lo tanto, perpendicular a toda recta del espacio tridimensional que contiene al ángulo sólido. En consecuencia, dos espacios de tres dimensiones que tengan un punto común, también tendrán un plano común, y el producto de las reflexiones en ellos será una rotación alrededor de este plano, análoga a la conocida rotación alrededor de una recta en tres dimensiones o alrededor de un punto en dos.

* *Flatland: A Romance of Many Dimensions* por A Square (E. A. Abbot), Boston, 1885 y 1928. ([*T*:] *Planolandia: Romance en Muchas Dimensiones*, por Un Cuadrado.)

Una vez que hemos aceptado la idea de la cuarta dimensión, no tardamos en imaginar una pirámide o prisma tal que su "base" es un cuerpo sólido. Por ejemplo, un tetraedro regular puede servir de base de una pirámide *ABCDE* (figura 22.1*a*) en la que el vértice *E* se encuentra a lo largo de la cuarta dimensión que pasa por el centro de *ABCD*. Si se elige *E* de manera que sus distancias a *A*, *B*, *C*, *D* sean iguales a la arista *AB*, tendremos un *simplejo regular*, que se puede ver de cinco maneras como una pirámide, donde cada vértice sirve en la ocasión correspondiente como vértice mientras los otros cuatro forman la base.

En la figura 22.1*b* tenemos simplemente un octágono con un cuadrado dibujado hacia adentro en cada uno de sus lados, o un octágono y un octa-

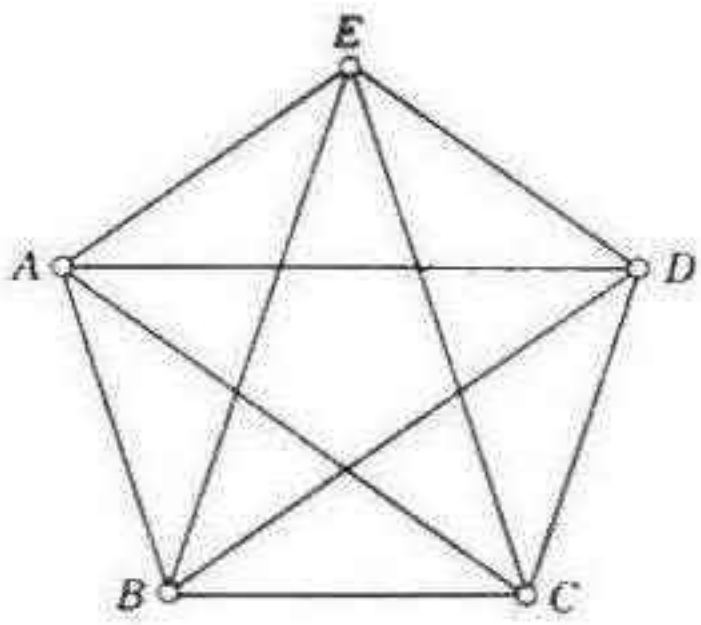


Figura 22.1a

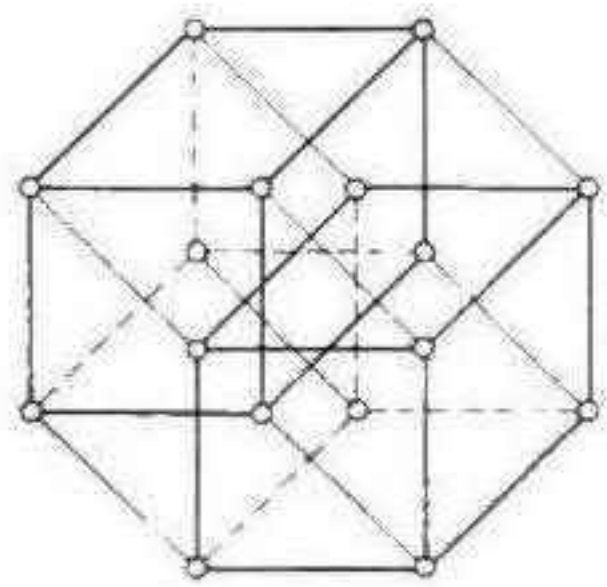


Figura 22.1b

grama en los que los lados correspondientes se han unido por medio de cuadrados. Podemos considerar esto como una representación de un *hipercubo* (o "politopo de 8 celdas", o "tesaracto" o "politopo de medida") que es un prisma en el que la base es un cubo y la altura del prisma es igual a la arista del cubo. De la manera como se engendra un cubo cuando un cuadrado se mueve por la tercera dimensión, se puede engendrar el hipercubo al mover el cubo por la cuarta dimensión. En la figura 22.1*b* se han trazado las posiciones inicial y final del cubo en líneas gruesas. Hay en total ocho cubos: los dos que acabamos de mencionar y otros seis que trazan las demás caras. Cada uno de los 24 cuadrados (que en la figura aparecen como cuadrados o rombos) pertenece a dos de los cubos, que no se encuentran en el mismo espacio tridimensional, sino que han rotado alrededor del plano del cuadrado hasta que ambos espacios de tres dimensiones forman ángulos rectos.

El simplejo regular y el hipercubo constituyen los dos casos más sencillos

$$\{3, 3, 3\}, \qquad \{4, 3, 3\}$$

del *politopo regular* $\{p, q, r\}$, que es una configuración de cuerpos platónicos iguales $\{p, q\}$ que se llaman *celdas*, dispuestos de manera que cada cara $\{p\}$ pertenece a dos celdas, y cada arista a r celdas. En consecuencia, la disposición de las celdas en uno de los vértices corresponde a la disposición de las caras de $\{q, r\}$ en el sentido de que cada cara de $\{q, r\}$ es una figura verticial de la celda correspondiente. Este $\{q, r\}$, cuyos vértices son los puntos medios de las aristas en uno de los vértices de $\{p, q, r\}$, se llama naturalmente *figura verticial* del politopo. De hecho, el símbolo de tres dígi-

tos de Schläfli $\{p, q, r\}$ se deriva al aplicar una acción "telescópica" a los símbolos de dos dígitos $\{p, q\}$ y $\{q, r\}$ que denotan la celda y la figura verticial.

Podemos completar ahora las dos primeras hileras de la tabla IV (de la página 462), donde los números de vértices, aristas, caras y celdas se denotan por N_0, N_1, N_2, N_3. Aunque no existe una fórmula fácil en relación con cualquiera de estas propiedades numéricas en función de p, q, r, podemos encontrar con rapidez sus razones mutuas por medio de argumentaciones análogas a las que nos condujeron a 10.31. De hecho, si V, A, C se refieren a la celda, $\{p, q\}$ y V', A', C' a la figura verticial $\{q, r\}$, tenemos

$$CN_3 = 2N_2, \quad VN_3 = C'N_0, \quad V'N_0 = 2N_1, \quad AN_3 = rN_1 = pN_2 = A'N_0.$$

Por ejemplo, la primera ecuación proviene de la observación de que las C caras de las N_3 celdas no son sino las N_2 caras, que se cuentan dos veces debido a que cada una pertenece a dos celdas.

EJERCICIOS

1. Los números $N_0 : N_1 : N_2 : N_3$ son proporcionales a

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} : \frac{1}{r} : \frac{1}{p} : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

De esta manera, $\{p, q, r\}$ satisface el teorema de cuatro dimensiones enunciado por Schläfli, que es análogo al de Euler:

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0.$$

2. Un hipercubo de arista 1 que tenga un vértice en el origen y 4 de sus aristas a lo largo de los ejes cartesianos, tendrá los 16 vértices (x_1, x_2, x_3, x_4), donde cada una de las cuatro coordenadas x es, de manera indepediente, 0 ó 1.

3. Un hipercubo de arista 2, que tenga el centro en el origen y los ejes paralelos a los cartesianos, tiene los 16 vértices

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

4. ¿Dónde está el centro de la dilatación que relaciona los hipercubos que hemos descrito en los dos ejercicios anteriores?

22.2 UNA CONDICION NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE $\{p, q, r\}$

"Se habla del espacio . . . como de tres dimensiones, que se pueden llamar Longitud, Anchura y Espesor. . . . Pero algunos filósofos preguntan, ¿por qué tres dimensiones en particular? ¿Por qué no afirmar que existe otra, que forma un ángulo recto con las tres primeras? . . . No me parece inconveniente informarlos acerca de mi trabajo en esta geometría de Cuatro Dimensiones, que vengo realizando de algún tiempo a esta parte . . .

H. G. Wells

(*The Time Machine*, 1895, pág. 5)

Parece ser que el primero en considerar los mosaicos regulares (§ 4.6) como poliedros infinitos fue Kepler. De manera análoga, la colmena tridimensional de cubos (tales que sus vértices se pueden tomar como todos los puntos (x, y, z) para los que x, y, z son enteros) es el politopo infinito $\{4, 3, 4\}$: su celda es el cubo $\{4, 3\}$ y su figura verticial el octaedro $\{3, 4\}$, en el que las ocho caras son figuras verticiales de los ocho cubos que rodean un vértice, uno en cada "octante". El 4 del final del símbolo $\{4, 3, 4\}$ significa que hay cuatro celdas alrededor de una arista. Los cuatro cubos se ajustan entre sí sin dejar intersticios debido a que el ángulo diedral del cubo es exactamente un ángulo recto. Por otra parte, el hipercubo $\{4, 3, 3\}$ constituye un politopo finito debido a que el ángulo total en una arista solamente vale tres rectos, lo que permite que las celdas puedan rotarse para salir de su espacio tridimensional, de la misma manera en la que uno deriva un poliedro al doblar la red correspondiente (pero aquí tenemos que la deficiencia angular no se relaciona de manera sencilla con el número de vértices).

De la misma manera, puesto que el ángulo diedral del tetraedro $\{3, 3\}$ es ligeramente menor que 71° (véase la tabla II), podemos colocar tres, cuatro o cinco (pero no más) tetraedros en una arista común, como si comenzáramos la construcción de $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$ o $\{3, 3, 5\}$. Tenemos nuevamente que, como los ángulos del octaedro y dodecaedro están entre 90° y 120°, no podemos colocar más de tres de cualquiera de ellos en una arista común para obtener $\{3, 4, 3\}$ y $\{5, 3, 3\}$. Pero el icosaedro no puede emplearse de esta manera, puesto que su ángulo diedral es mayor que 120°. Así, hemos demostrado que los únicos politopos regulares que se pueden tener en cuatro dimensiones consisten en

$$\{3, 3, 3\},\quad \{3, 3, 4\},\quad \{3, 3, 5\},\quad \{4, 3, 3\},\quad \{3, 4, 3\},\quad \{5, 3, 3\}.$$

La condición para que $\{p, q, r\}$ sea un politopo regular finito se puede expresar en términos generales al recordar (de 10.43) que el ángulo diedral del cuerpo platónico $\{p, q\}$ se determina por medio de

$$2 \operatorname{arcsen}\left(\cos\frac{\pi}{q} \Big/ \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}\right).$$

Si al tomar r de estos ángulos se tiene que entre todos suman menos que 2π, entonces cada uno de ellos debe ser menor que $2\pi/r$. *En consecuencia,*

$$\operatorname{arcsen}\left(\cos\frac{\pi}{q} \Big/ \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}\right) < \frac{\pi}{r},$$

es decir,

22.21 $$\cos\frac{\pi}{q} < \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}\operatorname{sen}\frac{\pi}{r}.$$

De la misma manera, la condición para que $\{p, q, r\}$ sea una colmena infinita que llene el espacio tridimensional es

22.22 $$\cos\frac{\pi}{q} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}\operatorname{sen}\frac{\pi}{r}:$$

una ecuación para la que la única solución de enteros mayores que dos consiste en $\{4, 3, 4\}$.

EJERCICIOS

1. La condición 22.21 implica tanto 10.33 como la desigualdad análoga, donde r reemplaza a p. *Indicación:*

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{p}\operatorname{sen}\frac{\pi}{r} < \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}.$$

2. Obténgase el símbolo de Schläfli del politopo regular tal que sus ocho vértices son

$$(\pm 1, 0, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0, 0), \quad (0, 0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, 0, \pm 1),$$

es decir, para el politopo

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| \leqslant 1.$$

22.3 CONSTRUCCIONES DE POLITOPOS REGULARES

Aunque la analogía suele conducir a equívocos, es el menos equívoco de nuestros recursos.

Samuel Butler (1835–1902)

(Music, Pictures, and Books)

Hemos visto que la desigualdad 22.21 es una condición *necesaria* de la existencia de un politopo finito $\{p, q, r\}$. La suficiencia de la condición requiere que se efectúe una construcción *de facto* de las seis figuras. Sabemos que en una arista pueden ajustarse r celdas, pero no es tan obvio que al añadir más celdas nos dará a fin de cuentas una configuración cerrada en la que toda cara de toda celda pertenezca también a otra celda.

Como la relación completa de estas construcciones se alarga mucho [Coxeter 1, págs. 145–153], nos conformaremos con un breve bosquejo, al que añadiremos la analogía de lo que sucede en tres dimensiones.

Recordemos que los vértices alternos del cubo $\{4, 3\}$ pertenecen a un tetraedro inscrito $\{3, 3\}$ en el que las cuatro caras corresponden de manera obvia a los cuatro vértices del cubo que se han omitido, mientras las seis aristas constituyen las diagonales de las seis caras del cubo (*una* diagonal de cada cara, mejor dicho). Además, puesto que los puntos medios de estas seis aristas son los centros de las caras de los cubos, son también los vértices de un octaedro $\{3, 4\}$.

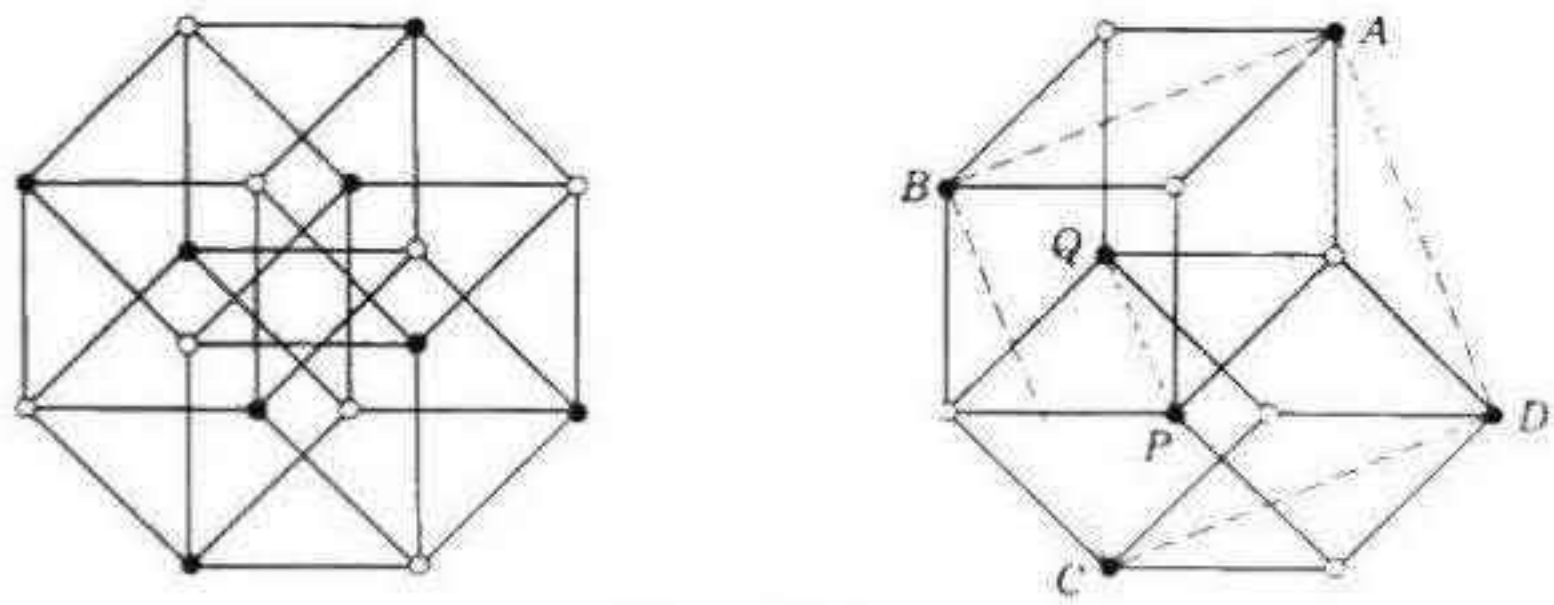


Figura 22.3a

De manera análoga, al escoger vértices alternos del hipercubo $\{4, 3, 3\}$ obtenemos un politopo que tiene 8 vértices (los puntos negros de la figura 22.3*a*) y 16 celdas: un tetraedro (como $BCPQ$) en correspondencia con cada uno de los 8 vértices que se han omitido, y otro (como $ABPQ$) inscrito en cada una de las 8 celdas cúbicas. Este "politopo de 16 celdas" tiene 24 aristas, que son las diagonales de las 24 caras cuadradas del hipercubo (una diagonal de cada cara). Cada una de las 24 aristas pertenece a 4 tetraedros (2 de cada tipo, que ocurren alternadamente); por ejemplo, la arista PQ pertenece a los cuatro tetraedros

$$ABPQ,\ BCPQ,\ CDPQ,\ DAPQ,$$

el primero y el tercero de los cuales están inscritos en dos cubos adyacentes cuya cara común tiene por una de sus diagonales a PQ. Hemos demostrado de esta manera que *el politopo de 16 celdas es* $\{3, 3, 4\}$.

Al completar la tercera hilera de la tabla IV podemos observar que las propiedades numéricas de $\{3, 3, 4\}$ son las mismas que las de $\{4, 3, 3\}$ al invertir el orden en que las tomamos. De hecho, en lugar de obtener los vértices del politopo de 16 celdas como vértices alternos del hipercubo, podríamos haber obtenido los vértices de otro politopo de 16 celdas (semejante) como los centros de las celdas del hipercubo. En otras palabras, el hipercubo y el politopo de 16 celdas son politopos *recíprocos* [Coxeter 1, pág. 127] de la manera en la que el cubo y el octaedro eran poliedros recíprocos. Para hablar con más generalidad, *el recíproco de* $\{p, q, r\}$ *es* $\{r, q, p\}$.

Los puntos medios de las aristas de $\{3, 3, 4\}$ son los 24 vértices de un politopo en el que las celdas son 24 octaedros: las figuras verticiales en los 8 vértices de $\{3, 3, 4\}$ y 16 más inscritos en los 16 tetraedros. Puesto que todas sus celdas son octaedros $\{3, 4\}$, este politopo de 24 celdas constituye $\{3, 4, 3\}$ [Hilbert y Cohn–Vossen 1, pág. 152, figura 172].

Al dividir de manera adecuada las 12 aristas de un octaedro en la razón $\tau : 1$, obtenemos los 12 vértices de un icosaedro (véase § 11.2). Al dividir las 96 aristas del politopo de 24 celdas $\{3, 4, 3\}$ en esta misma razón, obtenemos los 96 vértices de un politopo semirregular $r\{3, 4, 3\}$ (el politopo romo de 24 celdas) en el que las celdas consisten en 24 icosaedros y 120 tetraedros: a saber, en cada vértice del politopo de 24 celdas tenemos un conjunto de 5 tetraedros que compuesto por 1 alrededor del que hay otros 4 (parecido a una "red" parcialmente doblada del simplejo regular $\{3, 3, 3\}$). Cuando se corona cada celda icosaedral de $r\{3, 4, 3\}$ por una pirámide icosaedral (de la manera en la que se deriva un icosaedro a partir de un antiprisma pentagonal al añadir dos pirámides pentagonales), obtenemos un nuevo politopo, en el que un agregado de 20 tetraedros reemplaza a cada uno de los 24 icosaedros, de manera que en total hay

$$24 \cdot 20 + 120 = 600$$

tetraedros. Los 120 vértices de este politopo consisten en los 96 de $r\{3, 4, 3\}$ y los 24 vértices de las 24 pirámides icosaedrales. (Estos 24 puntos, que corresponden a las celdas del politopo original $\{3, 4, 3\}$ constituyen los vértices de otro recíproco $\{3, 4, 3\}$.) Un examen cuidadoso [Coxeter 1, págs.

152–153] nos revela que cada arista pertenece a 5 de los 600 tetraedros. En consecuencia, el politopo de 600 celdas es {3, 3, 5} [Coxeter 1, frontispicio].

Por último, el politopo de 120 celdas {5, 3, 3} (figura 22.3*b* y lámina III) se puede construir como recíproco de {3, 3, 5}: sus 600 vértices son los centros de los 600 tetraedros. Con esta información podemos completar la tabla IV.

Es interesante señalar que el politopo romo de 24 celdas r{3, 4, 3} que resulta de tanta utilidad en la construcción anterior de {3, 3, 5} fue descubierto por Thorold Gosset en 1897.* La figura 22.3*b* fue dibujada por B. L. Chilton. La lámina III es una fotografía de un modelo de alambre que construyó P.S. Donchian.

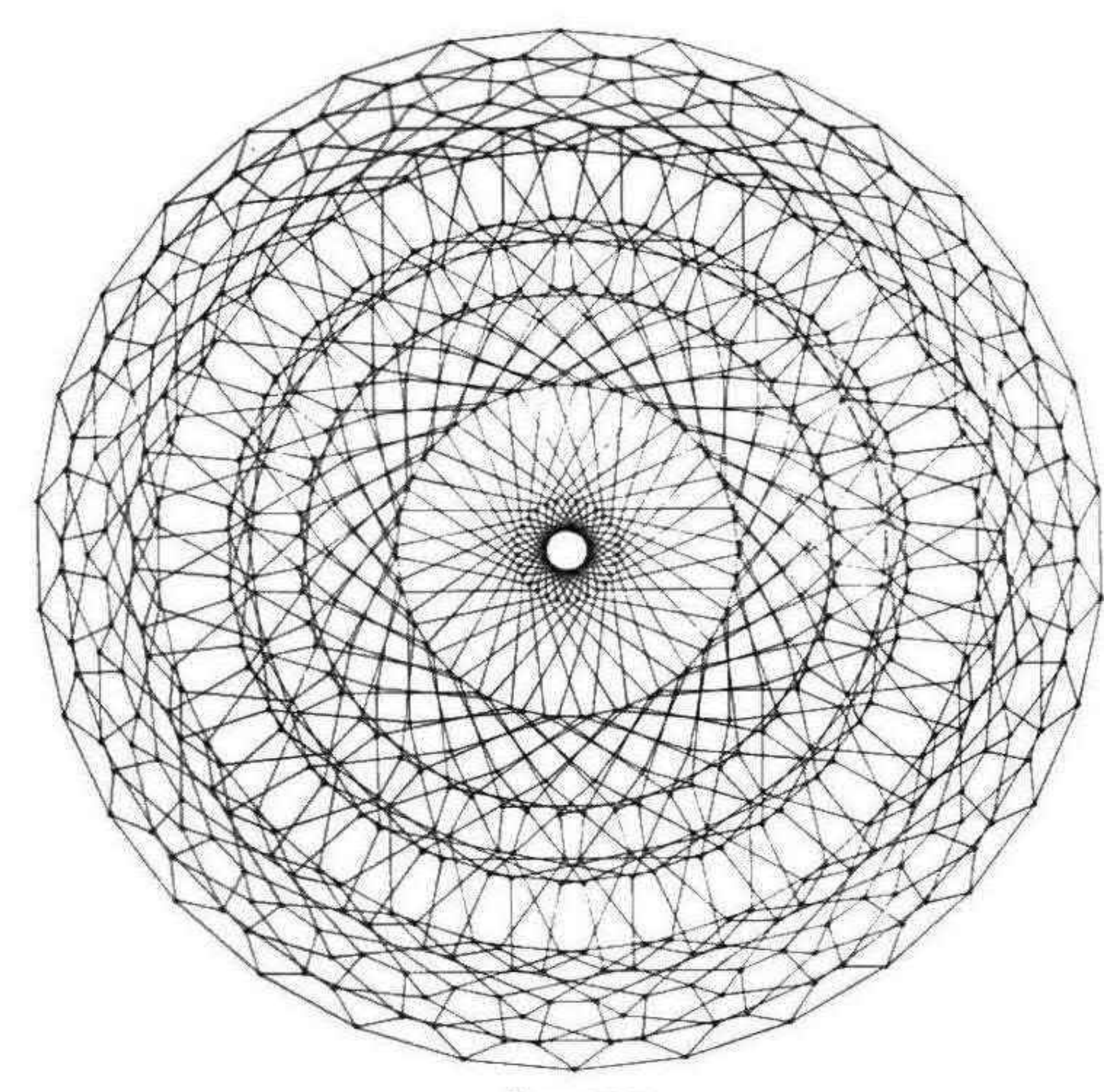


Figura 22.3b

* Gosset nació en 1869 y murió en 1962 [véase Coxeter 1, págs. 162–164].

Hartley [1, Nos. 56. 60] ha dado instrucciones para construir modelos de un tetraedro con un icosaedro en cada cara y de un dodecaedro con un dodecaedro en cada cara. Una vez terminados, estos modelos nos muestran la manera en la que podemos empezar a construir redes tridimensionales de $r\{3, 4, 3\}$ y $\{5, 3, 3\}$ respectivamente.

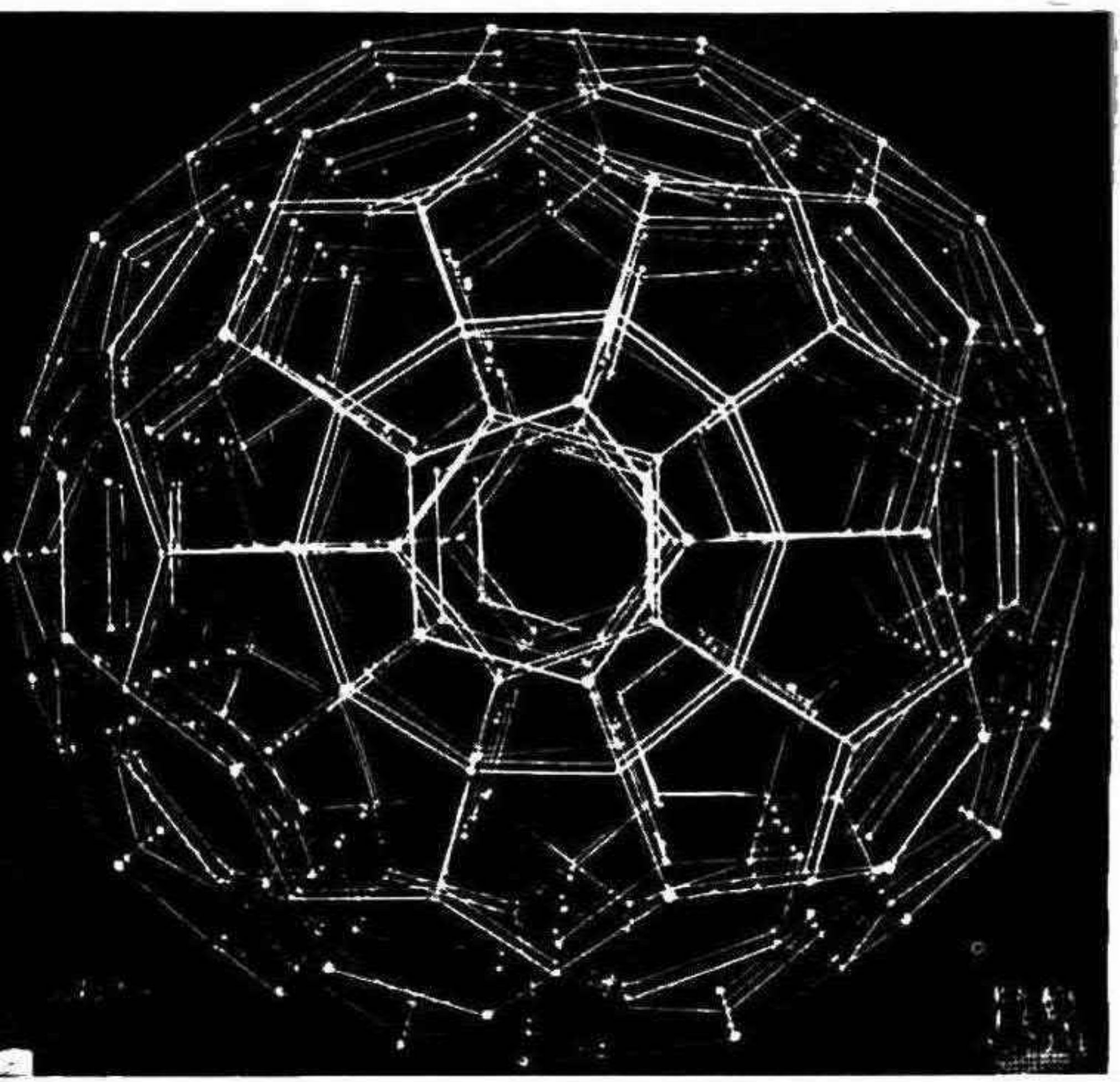


Lámina III

EJERCICIOS

1. Encuéntrense los centros de las 8 celdas cúbicas del hipercubo $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$.
2. Encuéntrense los puntos medios de las 24 aristas del politopo de 16 celdas

$$(\pm 2, 0, 0, 0), \quad (0, \pm 2, 0, 0), \quad (0, 0, \pm 2, 0), \quad (0, 0, 0, \pm 2).$$

3. Verifíquese que al aplicar a los 96 vértices de $r\{3, 4, 3\}$,

$$(\pm\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0),$$

permutaciones pares, estos puntos dividen las 96 aristas del politopo de 24 celdas $(\pm\tau, \pm\tau, 0, 0)$ (permutadas) en la razón $\tau : 1$.

4. Los 120 vértices del politopo de 600 celdas $\{3, 3, 5\}$ constituyen los 96 vértices del politopo anterior $r\{3, 4, 3\}$ junto con los 24 puntos adicionales

$$(\pm 2, 0, 0, 0) \text{ (permutados)} \quad \text{y} \quad (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

5. Los 600 vértices del politopo de 120 celdas $\{5, 3, 3\}$ son las permutaciones de

$$(\pm 2, \pm 2, 0, 0), \qquad (\pm\sqrt{5}, \pm 1, \pm 1, \pm 1),$$
$$(\pm\tau, \pm\tau, \pm\tau, \pm\tau^{-2}), \qquad (\pm\tau^2, \pm\tau^{-1}, \pm\tau^{-1}, \pm\tau^{-1})$$

junto con las permutaciones pares de

$$(\pm\tau^2, \pm\tau^{-2}, \pm 1, 0), \qquad (\pm\sqrt{5}, \pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0), \qquad (\pm 2, \pm 1, \pm\tau, \pm\tau^{-1}).$$

(Esto corrige un error en la primera edición de Coxeter 1, pág. 157.)

22.4 PAQUETES REPLETOS DE ESFERAS IGUALES

Cuando el pie se apoya en la arena después de que la marea descendente la ha dejado firme, el sector en los alrededores inmediatos del pie queda momentáneamente seco. . . . La presión del pie ha causado una dilatación de la arena de manera que (se extrae) *más agua por los intersticios de la arena de los alrededores . . . , por lo que queda seca hasta que se obtiene de las regiones inferiores un suministro suficiente, y entonces vuelve a humedecerse. Al levantar el pie, por lo general observamos que la arena que estaba debajo y la de los alrededores se humedece por un lapso breve de tiempo. Esto se debe a que la arena se contrae cuando se retiran las fuerzas que la distorsionaban, y el exceso de agua escapa a la superficie.*

Osborne Reynolds (1842–1913)

(British Association Report, Aberdeen, 1885, pág. 857).

De los doscientos mil millones de hombres, mujeres y niños que, desde los comienzos del mundo, han caminado en arena mojada, ¿cuántos habrían respondido, antes de la junta de la British Association en Aberdeen en 1855, al preguntárseles, "¿Queda la arena comprimida debajo de su pie?" de manera diferente a la afirmativa? (Compárese esto con el caso de caminar sobre un lecho de algas húmedas.)

Lord Kelvin (1824–1907)

(*Baltimore Lectures*, 1904, pág. 625)

Las figuras 22.4*a* y *b* nos muestran dos maneras posibles de empaquetar círculos iguales en un plano: los círculos inscritos de los mosaicos regulares, $\{4, 4\}$ y $\{6, 3\}$ (§ 4.6). Intuitivamente, es obvio que el segundo constituye paquetes "más económicos". Con el objeto de precisar esta idea,

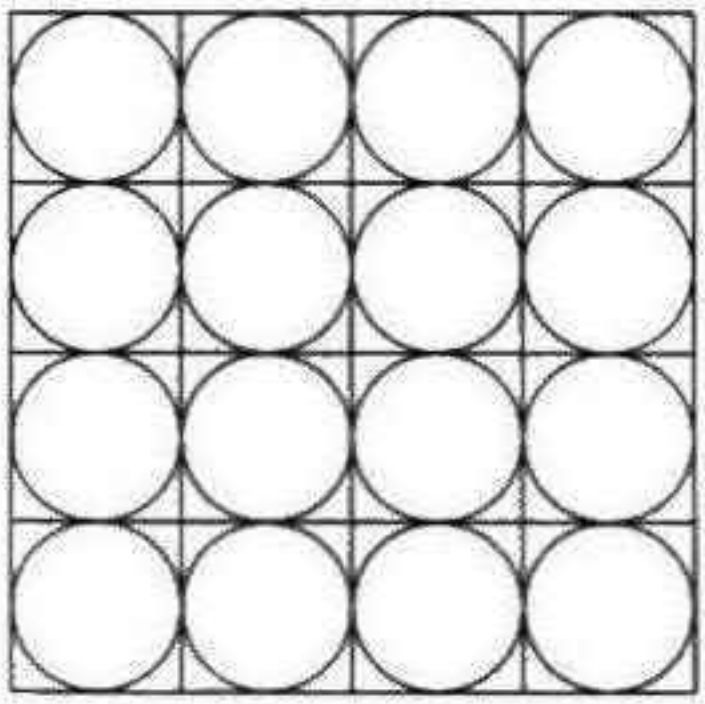


Figura 22.4a

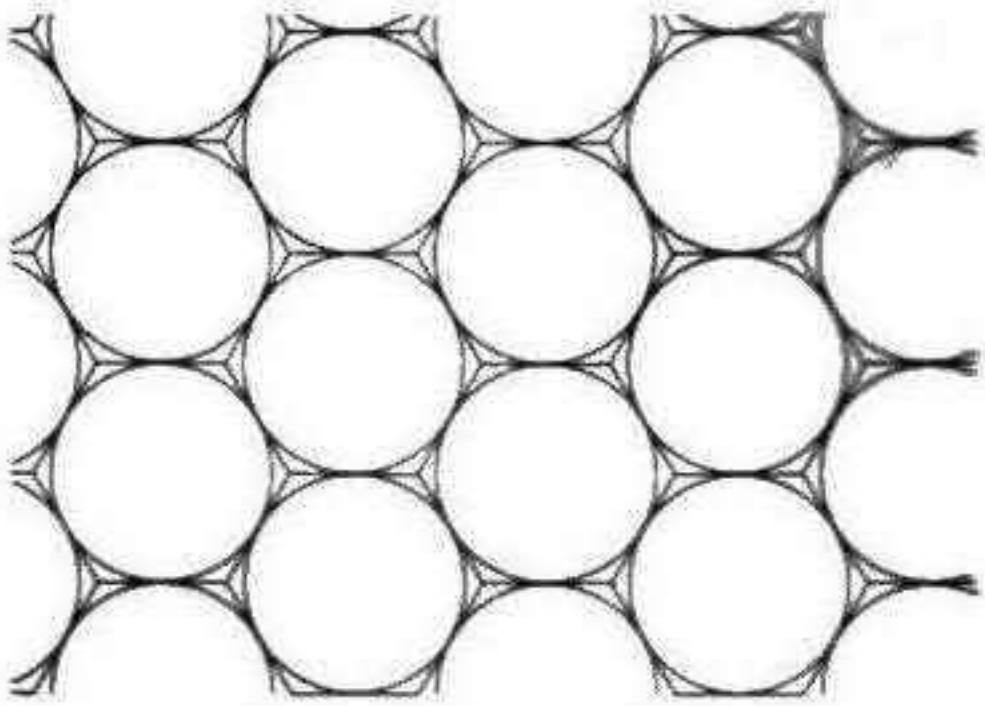


Figura 22.4b

consideremos los círculos inscritos del mosaico regular general $\{p, q\}$ para definir la *densidad* del paquete como la razón del área del círculo al área del polígono $\{p\}$ en el que se ha inscrito. La densidad, definida de esta manera, será evidentemente menor que 1, y el paquete más repleto tendrá la mayor densidad, es decir, la densidad más próxima a 1. Si la cara es de un *pé*gono de lado $2l$, su inradio será $r = l \cot \pi/p$ y su área plr (véanse 2.91, 2.92); la densidad, por lo tanto, se determina como

$$\frac{\pi r^2}{plr} = \frac{\pi}{p}\frac{r}{l} = \frac{\pi}{p}\cot\frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{p}\Big/\tan\frac{\pi}{p}.$$

Aquí tenemos una función creciente de p que tiende a 1 cuando p tiende a infinito. Pero, puesto que el *pé*gono es una de las caras de un mosaico regular, los únicos valores de p que tienen relevancia son 3, 4, 6. El "mejor" valor de p es, por lo tanto, 6, y los paquetes regulares que más se ajustan a los círculos que contienen consisten en los círculos inscritos de las caras de $\{6, 3\}$, donde la densidad es

$$\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.9069\ldots$$

[Hilbert y Cohn–Vossen **1**, pág. 47].

Es fácil demostrar que este sigue siendo el paquete más ajustado cuando abandonamos el requisito de la regularidad e insistimos solamente en que los centros de los círculos formen una celosía [Hilbert y Cohn–Vossen **1**, págs. 33–35]. De hecho, esta restricción también se puede abandonar [Darwin **1**, pág. 345; Fejes Tóth **1**, pág. 58], como lo descubrieron las abejas hace millones de años (lámina IV).

Se pueden obtener paquetes análogos de esferas en el espacio tridimensional al tomar las esferas inscritas de las celdas de una colmena de poliedros iguales. Se define con naturalidad la densidad como la razón del volumen de una esfera al volumen de la celda en la que se ha inscrito. En el caso de $\{4, 3, 4\}$, la colmena de cubos de arista $2l$, esta densidad es

$$\frac{\frac{4}{3}\pi l^3}{(2l)^3} = \frac{\pi}{6} = 0.5236\ldots$$

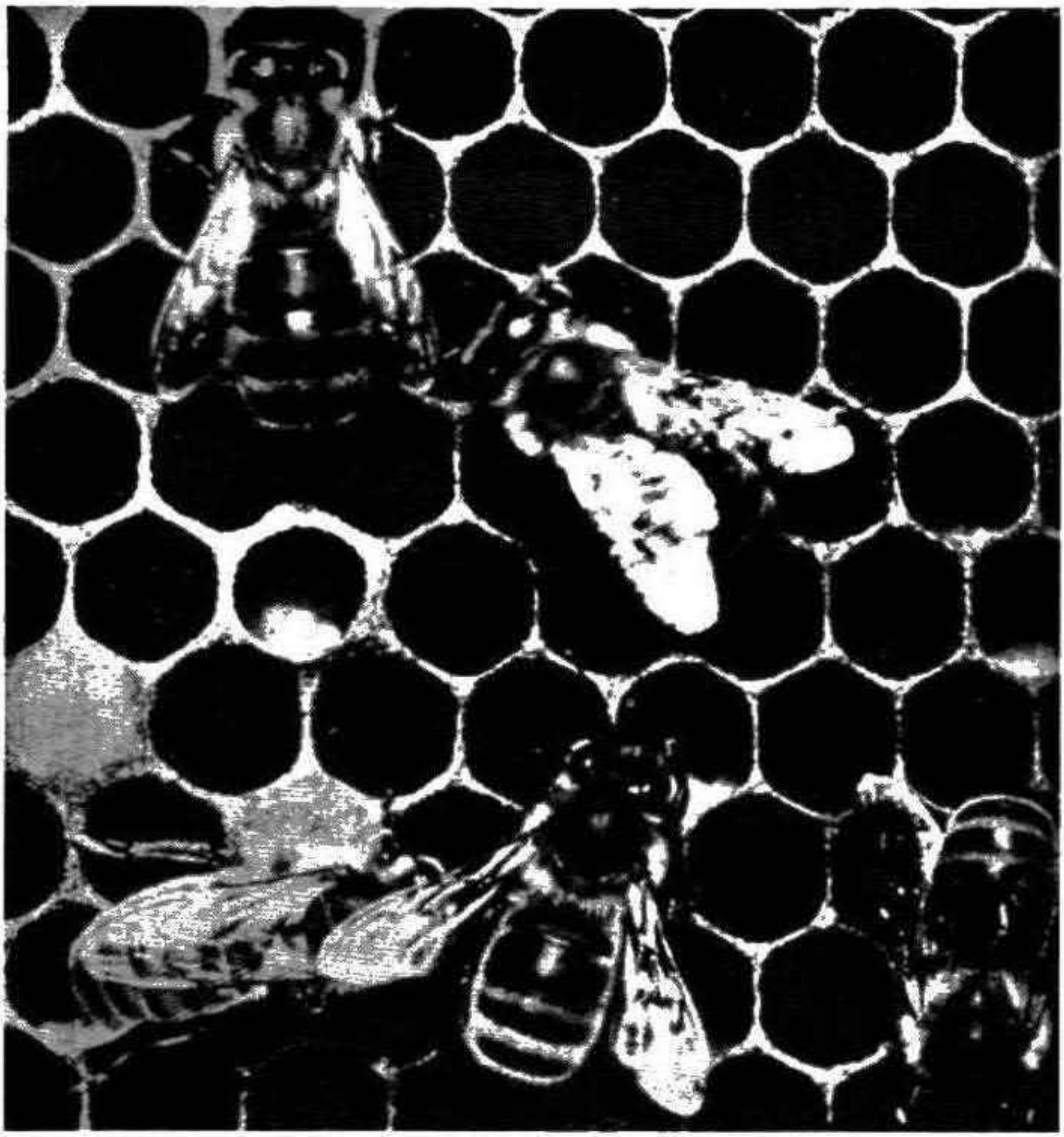


Lámina IV

Se puede obtener una densidad mayor al usar las *esferas medias* (§ 10.4) de celdas *alternas*, como veremos dentro de algunos momentos.

Imaginemos que las celdas de la colmena cúbica se han pintado alternadamente de blanco y negro, como si fuera un tablero tridimensional de ajedrez, de manera que podamos dividir cada cubo blanco en seis

pirámides cuadradas (por medio de planos que unan los pares de aristas opuestas) para añadir en seguida cada pirámide al cubo negro que está a su

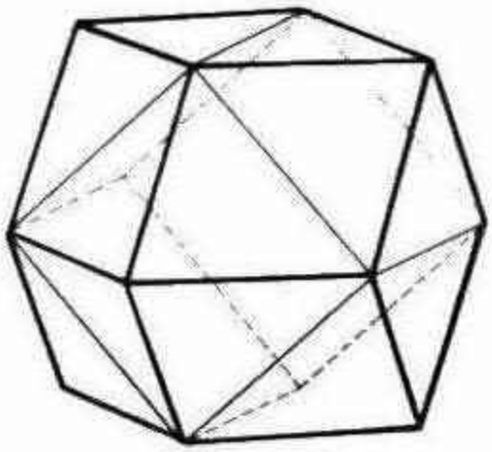


Figura 22.4c

lado. Cada cubo negro queda cubierto por seis pirámides blancas, una en cada cara, de manera que forman un *dodecaedro rómbico* (figura 22.4c), en el que las doce caras rómbicas tienen las doce aristas del cubo negro por diagonales menores [Steinhaus 2, pág. 152]. Así, tenemos que la esfera inscrita del dodecaedro rómbico viene a ser la esfera media del cubo, cuyo radio es $\sqrt{2}l$, y el volumen del dodecaedro rómbico será el doble del del cubo, a saber $2(2l)^3 = 16l^3$. En la colmena de estas celdas mayores, cada esfera inscrita es la esfera media de un cubo negro, y estas esferas se tocan en los centros de las caras rómbicas, es decir, en los puntos medios de las aristas de la colmena de cubos original. Por lo tanto, cada esfera es tangente a otras *doce*, y los puntos de contacto son los puntos medios de las doce aristas de un cubo. La densidad de este *paquete cúbico repleto* es evidentemente

$$\frac{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}l)^3}{16l^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.74048\ldots$$

[Hilbert y Cohn–Vossen 1, pág. 47].

En la naturaleza, el dodecaedro rómbico ocurre como el cristal del granate, y el tablero tridimensional de ajedrez se presenta como la disposición de átomos de un cristal de sal común, donde hay un átomo de sodio en cada cubo negro y uno de cloro en cada cubo blanco (o viceversa). Los centros de los cubos negros, que son también los centros de las esferas en los paquetes cúbicos repletos, forman, como se ve con facilidad, la celosía cúbica con centro en una cara. Se desprende de § 18.4 que aquí tenemos el paquete de esferas cuyos centros forman una celosía–más denso que se puede obtener.

En los viejos monumentos de guerra se suele ver una pila piramidal de balas de cañón: una en el vértice, que descansa sobre otras cuatro que, a su vez, descansan en nueve, y así sucesivamente. Cada bala interior toca a 12 de las otras: 4 en la misma capa, 4 en la superior y otras 4 en la inferior. De hecho, estas balas están dispuestas en paquetes cúbicos repletos [Kepler 1, págs. 268–269]. La base de la pirámide cuadrada consiste en, por ejemplo, n

balas dispuestas como lo están los círculos de la figura 22.4*a*. Cuando el valor de n es grande, la forma de la pirámide total es en esencia la mitad "superior" de un octaedro regular (que se considera una dipirámide cuadrada); cada cara inclinada es un triángulo equilátero constituído por $1 + 2 \ldots + n$ balas.

Si hacemos girar la pirámide de manera que la cara inclinada tome la posición horizontal, obtendremos un aspecto diferente del mismo conjunto de paquetes. En este aspecto, comenzamos por considerar una capa horizontal de esferas cuyos "ecuadores" constituyen los círculos inscritos de los exágonos de {6, 3}, como en la figura 22.4*b*. La siguiente capa, de abajo hacia arriba, será igual a ésta, pero se encontrará desplazada ligeramente hacia un lado (el derecho, digamos), de manera que cada esfera reposa en otras tres y su centro queda verticalmente encima de uno de los vértices {6, 3} tal que de él parte una arista hacia la izquierda. La cuarta capa está verticalmente encima de la primera, y de aquí en adelante se repite la misma sucesión de colocaciones.

El cristalógrafo Barlow describió en 1883 un conjunto de paquetes igualmente denso en el que los centros no forman una celosía. Se puede derivar al tomar las mismas capas horizontales en diferente orden. Al hablar con más precisión, decimos que se descarta la "tercera capa" que acabamos de describir y la substituimos por una tercera capa que queda directamente encima de la primera, según la vertical. La cuarta capa que añadimos queda verticalmente encima de la segunda, y así sucesivamente; el desplazamiento de una capa a otra se hace alternadamente a la derecha y a la izquierda, como en zig–zag. De este conjunto de paquetes de los que no se puede derivar ninguna celosía se dice que es de *paquetes exagonales repletos* [Ball **1**, pág. 150; Hilbert y Cohn–Vossen **1**, pág. 46; Steinhaus **2**, pág. 170; Fejes Tóth **1**, págs. 172–173].

Modelos que ayudan a ejemplificar estas ideas se pueden obtener a partir de catorce pelotas de golf y dos bandejas poco profundas que midan respectivamente 5 X 5 pulgadas (12.70 X 12.70 cm.) y 4.6 X 5.8 pulgadas (11.684 X 14.732 cm.). Cualquiera de las bandejas admitirá nueve pelotas en tres hileras de tres. En la bandeja cuadrada, se puede completar la disposición piramidal de "balas de cañón" al añadir cuatro más y la restante encima de éstas. En la bandeja oblonga, las cuatro pelotas de la segunda capa deberán tener sus centros en los vértices de un rombo, no de un rectángulo. La tercera capa vuelve a quedar representada por una sola pelota, pero hay dos posiciones en las que se la puede colocar: una de ellas corresponde a los paquetes cúbicos repletos y la otra a los paquetes exagonales repletos.

Puesto que los paquetes exagonales repletos tienen la misma densidad que los paquetes cúbicos repletos, a saber, 0.74048 . . . , es natural que nos preguntemos si puede existir un modo aún menos sistemático de empaquetar (sin hileras rectas de esferas) que tenga una densidad mayor. El problema no ha tenido respuesta. La actidud teórica que más se ha acercado a darla consiste en la demostración de Rogers* de que, de existir estos paquetes, su densidad habría de ser menor que 0.7797 . . . .

Los experimentos que adelantaron la investigación en este sentido co-

* C. A. Rogers, The packing of equal spheres, *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), **8** (1958), págs. 609–620.

menzaron en 1727, cuando Stephen Hales afirmó, en su obra *Vegetable Staticks*:

> Comprimí varias porciones de chícharo fresco en el mismo recipiente bajo una fuerza igual a 1600, 800 y 400 libras; experimentos en los que, aunque el chícharo se dilató, no elevaron la palanca, puesto que en lo que se incrementaron en tamaño fue, por la acción del gran peso en cuestión, metido a presión en los intersticios que dejaba esta acción, formados como dodecaedros bastante regulares.

Es presumible que esta conclusión de Hales se deba a haber observado algunas caras pentagonales en sus chícharos dilatados. No todos podrían haber sido dodecaedros regulares, pues el ángulo diedral del dodecaedro regular es menor que 120° (véase la tabla II en la pág. 461), y tres cuerpos de éstos que tengan una arista común dejan un hueco angular de unos 10° 19'. Los dodecaedros {5, 3} son, de hecho, las celdas de la configuración {5, 3, 3} que no constituye una colmena infinita tridimensional, sino un politopo finito de cuatro dimensiones.

En 1939, los botánicos J. W. Marvin y E. B. Matzke repitieron el experimento de Hales. Substituyeron sus chícharos por perdigones de plomo "escogidos con mucho cuidado bajo el microscopio para tener uniformidad de formas y tamaños", y los colocaron en un cilindro de acero, donde se les comprimió por medio de un émbolo de acero, con una presión suficiente (40,000 libras), con el objeto de eliminar todos los intersticios.* Cuando los perdigones se colocaron en pilas semejantes a las de las balas de cañón, se convirtieron en dodecaedros rómbicos casi perfectos. Pero "si los perdigones eran puestos en el cilindro de cualquier manera, cosa que seguramente hizo Hales al poner sus chícharos en el recipiente de hierro, se formaban cuerpos irregulares de 14 caras". Casi todas las caras eran o bien cuadrángulos, o bien pentágonos, o bien exágonos, donde predominaban los pentágonos. Otro botánico examinó células de tejidos vegetales indiferenciados, y concluyó que las células internas tienen en promedio aproximadamente 14 caras, aunque la forma predominante (que se presentó 32 veces en las 650 células que se examinaron) era de 13 caras: 3 cuadrángulos, 6 pentágonos y 4 exágonos. Las pocas células que solamente tenían doce caras no eran ni dodecaedros rómbicos ni dodecaedros regulares.

Matzke realizó también un examen microscópico de la espuma de 1900 burbujas medidas. "En 600 de las burbujas centrales que se examinaron, el número promedio de contactos fue de 13.7". La forma más frecuente nuevamente tenía 13 caras: 1 cuadrángulo, 10 pentágonos y 2 exágonos.

En 1959, el profesor Bernal† confirmó la predominancia de las caras pentagonales en un experimento notablemente sencillo en el que pelotas iguales de "Plasticene" (plastilina de modelado), enrolladas con polvo de tiza, se empaquetaron irregularmente y se presionaron para formar un bloque sólido. Los poliedros que resultaron tenían en promedio 13.3 caras.

Con el objeto de probar la posibilidad de que los paquetes fortuitos repletos de esferas iguales obtengan una densidad entre 0.7405 y 0.7797, G. D.

* E. B. Matzke, In the twinkling of an eye, *Bullentin of the Torrey Botanical Club*, 77 (1950), págs. 222–227.

† J. D. Bernal, A geometrical approach to the structure of liquids, *Nature*, 183 (1959), págs. 141–147.

Scott vertió miles de balines de cojinetes en recipientes esféricos de diversos tamaños, y, mientras los llenaba, los fue sacudiendo con suavidad. Al suponer que la situación excepcional en la superficie del recipiente dará lugar a la densidad

$$\rho - \varepsilon N^{-1/3}$$

cuando hay N balines, donde ρ y ε son constantes, descubrió en sus experimentos los paquetes fortuitos más repletos con

$$\rho = 0.6366, \qquad \varepsilon = 0.33.$$

Al llenar cuidadosamente los recipientes sin sacudidas, se encontró para los paquetes fortuitos más sueltos, sin compresión, que los valores correspondientes eran

$$\rho = 0.60, \qquad \varepsilon = 0.37.$$

Puesto que en los paquetes fortuitos más repletos el valor de ρ no llega a 0.7405, es poco probable que se pueda mantener cualquier densidad mayor en una región que se extiende indefinidamente en todas direcciones.

Si pudiéramos llenar un recipiente esférico con N balines de cojinetes dispuestos en paquetes cúbicos repletos, esperaríamos que la densidad se expresara como una serie, en la que los dos primeros términos consistirían en

$$0.7405 - \varepsilon N^{-1/3}.$$

Pero este experimento no parece ser realizable. Se ha escrito un libro muy erudito acerca de la teoría de los puntos de celosía en las esferas* sin arrojar ninguna luz acerca del valor de ε en este caso tridimensional, aunque se ha progresado considerablemente en el problema análogo dentro de espacios de otro número de dimensiones, como lo son 2 y 4.

Sea cual fuere el paquete fortuito más repleto, el experimento de Osborne Reynolds en la playa nos señala que cualquier pequeña alteración incrementa el tamaño de los intersticios. Mediante este principio se puede explicar el truco del fakir hindú que narra Martin Gardner. Un frasco cilíndrico, de boca bastante estrecha, se llena de arroz crudo, dándole pequeñas sacudidas, de manera que quede bastante repleto. Se mete en el frasco un cuchillo de mesa varias veces, cada vez a mayor profundidad. Después de una docena de movimientos, el cuchillo se ceñirá de manera que, al levantarlo por el mango, sostendrá el frasco de arroz.

EJERCICIOS

1. ¿Es menos densa la disposición de los círculos inscritos de todas las caras del mosaico $\{4, 4\}$ (figura 22.4*a*) que la de los círculos circunscritos de las caras alternas, es decir, los círculos circunscritos de los cuadrados negros de un tablero de ajedrez?

2. ¿Es posible disponer siete esferas iguales que no se traslapen de manera que dos de ellas se toquen y ambas toquen a las otras cinco, mientras estas cinco (a) forman un anillo en el que cada una toca a otras dos? (b) no se tocan en absoluto?

3. ¿Es posible disponer trece esferas iguales que no se traslapen de manera que una de ellas toque a las otras doce mientras estas doce no se tocan en absoluto?

* Arnold Walfisz, *Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, Varsovia, 1957.

4. Una pila piramidal de n capas contiene $n(n+1)(2n+1)/6$ balas de cañón [Ball 1, pág. 59]: una pila tetraedral contiene $n(n+1)(n+2)/6$. En ambos casos, la disposición es de paquetes cúbicos repletos.

22.5 UNA COLMENA ESTADISTICA

La fluidez de un líquido es consecuencia de su irregularidad molecular.

J. D. Bernal (1901–

Tres círculos iguales en el mismo plano se encuentran empaquetados tan ajustadamente como es posible cuando todos son tangentes entre sí. El problema bidimensional de paquetes repletos es fácil, puesto que un número cualquiera de círculos adicionales se puede añadir de manera que el diseño prosiga de manera sistemática por toda la extensión del plano. Se trata, como ya hemos visto, del diseño que forman los círculos inscritos en las caras del mosaico regular de exágonos $\{6, 3\}$ (figura 22.4*b*).

De manera análoga, en el espacio tenemos que cuatro esferas se encuentran empaquetadas tan ajustadamente como es posible cuando todas se tocan entre sí, y se pueden añadir algunas esferas más con el objeto de formar el comienzo de un diseño que en apariencia consiste en las esferas inscritas de las celdas de una colmena regular $\{p, 3, 3\}$. Aunque la ecuación 22.22 no tiene un entero por solución cuando $q = r = 3$, concluimos con naturalidad que los paquetes fortuitos y comprimidos de perdigones iguales de plomo, el agregado casi homogéneo de células vegetales y la espuma de burbujas iguales constituyen aproximaciones a una colmena $\{p, 3, 3\}$ en la que p está entre 5 y 6. El valor fraccionario de p significa aquí que nuetra "colmena" solamente existe en un sentido estadístico, pero la concordancia con los experimentos es sorprendente.

Cuando $q = r = 3$, la ecuación 22.22 se convierte en

22.51 $$\operatorname{sen}\frac{\pi}{p} = \cot\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Esto nos señala que el ángulo $180°/p$ es de 35° 15′ 52″, es decir, la mitad del ángulo diedral del tetraedro regular $\{3, 3\}$ (véase la tabla II). (De hecho, podemos considerar a p como el número de tetraedros regulares $\{3, 3\}$ que se pueden colocar unos junto a otros alrededor de una arista común, como si comenzáramos a construir la colmena dual $\{3, 3, p\}$ en la que los vértices son los centros de las esferas.) De esta manera,

$$p = \frac{180}{35.264\ldots} = 5.1044\ldots,$$

lo que concuerda con la observación de Matzke acerca de que los pentágonos eran los que prevalecían (sobre todo en una espuma) mientras los exágonos son más frecuentes que los cuadrángulos. La celda $\{p,$

3} tiene un promedio de C caras y V vértices, donde, por 10.32 cuando $q = 3$,

$$F = \frac{12}{6-p} = 13.398\ldots, \quad V = \frac{4}{(6/p)-1} = 22.796\ldots,$$

valores que concuerdan mucho con el 13.7 de Matzke y el 13.3 de Bernal, y con uno de los dos modelos teóricos que propuso Meijering,* que obtuvo, por medio de intrincados métodos estadísticos, $V = 22.56\ldots$. De un cuarto modelo teórico [Coxeter 4, pág. 756] se obtiene

$$F = \tfrac{1}{3}(23 + \sqrt{313}) = 13.564\ldots, \quad V = \tfrac{1}{3}(17 + \sqrt{313}) = 23.128\ldots$$

EJERCICIO

En el "prisma torcido" que forman 28 tetraedros regulares

$$A_0A_1A_2A_3, \quad A_1A_2A_3A_4, \quad \ldots\ldots, \quad A_{27}A_{28}A_{29}A_{30},$$

la línea quebrada $A_0A_3A_6A_9\ldots A_{30}$ está compuesta por 10 cuerdas iguales de una hélice circular. Si tomamos el eje de la hélice como vertical ¿encontraremos el vértice A_{30} exactamente encima de A_0? (Se puede construir de manera conveniente un modelo si se ajustan 87 barritas iguales del juego de construcción "D-stix Pre-engineering Kit 701" que se fabrica en Yardley, Washington.) Para ver el problema de manera completa, consideramos los tetraedros como 28 celdas de la "colmena" $\{3, 3, p\}$, donde p se determina por medio de 22.51. ($A_0A_1A_2\ldots$ es un "polígono de Petrie" de esta colmena.) Al igualar

$$\cos^2\frac{\pi}{p} = \frac{2}{3}$$

y $q = r = 3$ en la ecuación 12.35 de Coxeter [1, pág. 221], obtenemos $\xi_1 = 0$ y $\cos\xi_2 = -\frac{2}{3}$. El ángulo que forman los planos que unen el eje con A_0 y A_{30} es

$$30(\xi_2 - 120^\circ) = 354^\circ\,20'.$$

(Este ξ_2, casi $131^\circ\,49'$, se acerca notablemente a la propiedad correspondiente del politopo de cuatro dimensiones $\{3, 3, 5\}$, que es exactamente 132° [Coxeter 1, pág. 247].)

* J. L. Meijering, *Philips Research Reports*, 8 (1953), pág. 282. El valor $V = 22.79\ldots$ lo obtuvo en primer lugar C. S. Smith, *Acta Metallurgica*, 1 (1953), pág. 299. Véanse también E. N. Gilbert, *Annals of Mathematical Statistics*, 33 (1962), págs. 958–972, y R. E. Williams, *Science*, 161 (1968), págs. 276–277.

Tabla I
Los 17 grupos espaciales de la cristalografía bidimensional (§ 4.3)

Símbolo	Generadores
p1	Dos traslaciones
p2	Tres semigiros
pm	Dos reflexiones y una traslación
pg	Dos reflexiones paralelas en deslizamiento
cm	Una reflexión y una reflexión paralela en deslizamiento
pmm	Las reflexiones en los cuatro lados de un rectángulo
pmg	Una reflexión y dos semigiros
pgg	Dos reflexiones perpendiculares en deslizamiento
cmm	Dos reflexiones perpendiculares y un semigiro
p4	Un semigiro y un cuarto de giro
p4m	Las reflexiones en los tres lados de un triángulo de ángulos iguales a 45°, 45°, 90°
p4g	Una reflexión y un cuarto de giro
p3	Dos rotaciones que recorren 120°
p3m1	Una reflexión y una rotación que recorre 120°
p31m	Las reflexiones en los tres lados de un triángulo equilátero
p6	Un semigiro y una rotación que recorre 120°
p6m	Las reflexiones en los tres lados de un triángulo de ángulos de 30°, 60°, 90°

Tabla II
Los cinco cuerpos platónicos (§ 10.3)

Nombre	Símbolo de Schäfli	V	A	C	Angulo diedral
Tetraedro	{3, 3}	4	6	4	70° 32′ −
Cubo	{4, 3}	8	12	6	90°
Octaedro	{3, 4}	6	12	8	109° 28′ +
Dodecaedro	{5, 3}	20	30	12	116° 34′ −
Icosaedro	{3, 5}	12	30	20	138° 11′ +

Tabla III
Los grupos finitos de isometrías (§ 15.5)

Grupos rotacionales			Productos directos		Grupos mixtos	
Nombre	Símbolo	Orden	Símbolo	Orden	Símbolo	Orden
Cíclico	C_n	n	$C_n \times \{I\}$	$2n$	$C_{2n}C_n$	$2n$
Diedral	D_n	$2n$	$D_n \times \{I\}$	$4n$	D_nC_n	$2n$
Tetraedral	A_4	12	$A_4 \times \{I\}$	24	$D_{2n}D_n$	$4n$
Octaedral	S_4	24	$S_4 \times \{I\}$	48	S_4A_4	24
Icosaedral	A_5	60	$A_5 \times \{I\}$	120		

Tabla IV
Los politopos regulares $\{p, q, r\}$ (§ 22.2)

Nombre	Símbolo de Schäfli	N_0	N_1	N_2	N_3
Simplejo Regular	{3, 3, 3}	5	10	10	5
Hipercubo	{4, 3, 3}	16	32	24	8
Politopo de 16 celdas	{3, 3, 4}	8	24	32	16
Politopo de 24 celdas	{3, 4, 3}	24	96	96	24
Politopo de 120 celdas	{5, 3, 3}	600	1200	720	120
Politopo de 600 celdas	{3, 3, 5}	120	720	1200	600
Colmena Cúbica	{4, 3, 4}	∞	∞	∞	∞

Referencias

E. Artin 1. *Geometric Algebra.* Interscience, Nueva York, 1957.

F. Bachmann 1. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 96), Springer, Berlín, 1959.

H. F. Baker 1. *An Introduction to Plane Geometry.* Cambridge University Press, Londres, 1943.

W. W. R. Ball 1. *Mathematical Recreations and Essays* (11.ª edición). Macmillan, Londres, 1959.

—— 2. *A Short Account of the History of Mathematics.* Macmillan, Londres, 1927.

E. T. Bell 1. *Men of Mathematics.* Simon and Schuster, Nueva York, 1937.

—— 2. *The Development of Mathematics.* McGraw-Hill, Nueva York, 1940.

R. J. T. Bell 1. *An Elementary Treatise on Coordinate Geometry of Three Dimensions.* Macmillan, Londres, 1926.

G. Birkhoff y S. MacLane 1. *A Survey of Modern Algebra* (3.ª edición). Macmillan, Nueva York, 1965.

W. Blaschke 1. *Analytische Geometrie.* Birkhäuser, Basel, 1954.

—— 2. *Projektive Geometrie.* Birkhäuser, Basel, 1954.

J. Bolyai 1. La science absolue de l'espace. *Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux*, 5 (1867), págs. 207–248.

R. Bonola 1. La geometría non-euclidea, Bologna, 1906.

K. Borsuk y W. Szmielew 1. *Foundations of Geometry.* North-Holland, Amsterdam, 1960.

O. Bottema 1. *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde.* N. V. Servire, La Haya, 1944.

D. Brewster 1. *A Treatise on the Kaleidoscope.* Constable, Edimburgo, 1819.

M. Brückner 1. *Vielecke und Vielflache.* Teubner, Leipzig, 1900.

M. J. Buerger 1. *X-Ray Crystallography.* Wiley, Nueva York, 1942.

J. J. Burckhardt 1. *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie.* Birkhäuser, Basel, 1957.

W. Burnside 1. *Theory of Groups of Finite Order* (2.ª edición). Cambridge University Press, Londres, 1911.

H. Busemann 1. *Geometry of Geodesics.* Academic Press, Nueva York, 1955.

H. S. Carslaw 1. *The Elements of Non-Euclidean Plane Geometry and Trigonometry.* Longmans, Londres, 1916.

J. Casey 1. *A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid* (6.ª edición). Hodges Figgis, Dublín, 1892.

A. H. Church 1. *The Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws.* Williams and Norgate, Londres, 1904.

J. L. Coolidge 1. *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces.* Clarendon, Oxford, 1945.

R. Courant 1. *Differential and Integral Calculus*, Vol. 1. Blackie, Londres, 1934.
—— y H. E. Robbins 1. *What is Mathematics?* Oxford University Press, Nueva York, 1953.
N. A. Court 1. *College Geometry* (1.ª edición). Johnson, Richmond, Virginia, 1925.
—— 2. *College Geometry* (2.ª edición). Barnes and Noble, Nueva York, 1952.
H. S. M. Coxeter 1. *Regular Polytopes* (2.ª edición). Macmillan, Nueva York, 1963.
—— 2. *The Real Projective Plane* (2.ª edición). Cambridge University Press, Londres, 1961.
—— 3. *Non-Euclidean Geometry* (5.ª edición). University of Toronto Press, Toronto, 1968.
—— 4. Close-packing and froth. *Illinois Journal of Mathematics*, 2 (1958), págs. 746-758.
—— y S. L. Greitzer 1. *Geometry Revisited*. Random House, Nueva York, 1967.
—— y W. O. J. Moser 1. *Generators and Relations for Discrete Groups* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 14). Springer, Berlín, 1965.
H. M. Cundy y A. P. Rollett 1. *Mathematical Models*. Oxford University Press, Londres, 1961.
C. Darwin 1. *Origin of Species*. Appleton, Nueva York, 1927.
F. Denk y J. E. Hofmann 1. *Ebene Geometrie*. Blutenburg, Munich, 1957.
C. L. Dodgson (*alias* Lewis Carroll) 1. *Alice's Adventures in Wonderland*. Macmillan, Londres, 1865.
—— 2. *Through the Looking-glass, and What Alice Found There*. Macmillan, Londres, 1872.
—— 2a. *The Hunting of the Snark*. Macmillan, Londres, 1876.
—— 3. *Euclid and his Modern Rivals*. Macmillan, Londres, 1879.
—— 4. *Sylvie and Bruno Concluded*. Macmillan, Londres, 1893.
H. Dörrie 1. *Mathematische Miniaturen*. Breslau, 1943.
L. Fejes Tóth 1. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 65). Springer, Berlín, 1953.
L. R. Ford 1. *Automorphic Functions* (2.ª edición). McGraw-Hill, Nueva York, 1929.
H. G. Forder 1. *The Foundations of Euclidean Geometry*. Cambridge University Press, Londres, 1927; Dover, Nueva York, 1958.
—— 2. *The Calculus of Extension*. Cambridge University Press, Londres, 1941; Chelsea, Nueva York, 1960.
—— 3. *Geometry* (2.ª edición). Hutchinson's University Library, Londres, 1960.
R. Fricke y F. Klein 1. *Vorlesungen uber die Theorie der automorphen Funktionen*, Vol. 1. Teubner, Leipzig, 1897.
C. F. Gauss 1. *Werke*, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Gotinga, 1900.
S. H. Gould 1. Origins and Development of Concepts of Geometry. *Twenty-third Year Book of the National Council of Teachers of Mathematics*, 1957, capítulo IX.
W. C. Graustein 1. *Introduction to Higher Geometry*. Macmillan, Nueva York, 1930.
G. H. Hardy 1. *Pure Mathematics* (10.ª edición). Cambridge University Press, Londres, 1955.
—— 2. *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, Londres, 1940.
—— y E. M. Wright 1. *An Introduction to the Theory of Numbers*, (2.ª edición). Clarendon Press, Oxford, 1945.
M. C. Hartley 1. *Patterns of Polyhedrons*. Edwards Bros., Ann Arbor, Michigan, 1951.
T. L. Heath 1, 2, 3. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (3 Vols.) Cambridge University Press, Londres, 1908; Dover, Nueva York, 1956.
D. Hilbert 1. *The Foundations of Geometry*. Open Court, Chicago, 1902.
D. Hilbert y S. Cohn-Vossen 1. *Geometry and the Imagination*. Chelsea, Nueva York, 1952.
H. Hilton 1. *Mathematical Chrystallography and the Theory of Groups of Movements*. Clarendon Press, Oxford, 1903.
E. W. Hobson 1. *A Treatise on Plane Trigonometry*. Cambridge University Press, Londres, 1925.
L. Infeld 1. *Whom the Gods Love*. Whittlesey House, Nueva York, 1948.
H. Jeffreys 1. *Cartesian Tensors*. Cambridge University Press, Londres, 1931.

R. Johnson 1. *Modern Geometry*. Houghton Mifflin, Boston, 1929.
O. Jones 1. *Grammar of Ornament*. Quaritch, Londres, 1868.
E. Kasner y J. Newman 1. *Mathematics and the Imagination*. Simon and Schuster, Nueva York, 1940.
J. Kepler 1. *Gesammelte Werke*. Vol. 4. Beck, Munich, 1941.
B. Kerékjártó 1. *Les Fondements de la Géométrie*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
F. Klein 1, 2. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* (2 Vols.). Macmillan, Nueva York, 1939.
—— 3. *Lectures on the Icosahedron* (2.ª edición). Kegan Paul, Londres, 1913.
—— 4. *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*. Springer, Berlín, 1928.
E. Kreyszig 1. *Differential Geometry*. University of Toronto Press, Toronto, 1959.
R. Lachlan 1. *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*. Macmillan, Londres, 1927.
H. Lamb 1. *Higher Mechanics*. Cambridge University Press, Londres, 1920.
—— 2. *Infinitesimal Calculus* (2.ª edición). Cambridge University Press, Londres, 1924.
C. J. de La Vallée Poussin 1, 2. *Cours d'Analyse Infinitésimale* (2 Vols., 5.ª edición). Libraire Universitaire, Lovaina, 1925.
S. Lefschetz 1. *Introduction to Topology*. Princeton University Press, Princeton, 1949.
H. Liebmann 1. *Nichteuklidische Geometrie* (3.ª edición). Berlín, 1923.
J. E. Littlewood 1. *A Mathematical Miscellany*. Methuen, Londres, 1953.
L. J. Mordell 1. *Reflections of a Mathematician*. Canadian Mathematical Congress, Montreal, 1958.
M. Moseley 1. On conchyliometry, *Philosophical Magazine* (3), 21 (1842), págs. 300–305.
E. H. Neville 1. *Jacobian Elliptic Functions*. Clarendon Press, Oxford, 1944.
L. Pacioli (*alias* Paccioli) 1. *De divina Proportione*. Venecia, 1509; Milán, 1956.
M. Pasch y M. Dehn 1. *Vorlesungen über neuere Geometrie* (2.ª edición, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 23). Springer, Berlín, 1926.
D. Pedoe 1. *Circles*. Pergamon, Nueva York, 1957.
—— 2. *An Introduction to Projective Geometry*. Pergamon, Nueva York, 1963.
H. Rademacher y O. Toeplitz 1. *The Enjoyment of Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
G. Ringel 1. *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*. VeB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1959.
G. de B. Robinson 1. *The Foundations of Geometry* (4.ª edición). University of Toronto Press, Toronto, 1959.
A. Robson 1, 2. *An Introduction to Analytical Geometry* (2 Vols.). Cambridge University Press, Londres, 1940, 1947.
E. J. Routh 1. *A Treatise on Analytical Statics, with Numerous Examples*. Vol. 1 (2.ª edición). Cambridge University Press, 1896.
B. Russell 1. *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press, Londres, 1903.
—— 2. *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* (2.ª edición). Allen and Unwin, Londres, 1937.
G. Salmon 1. *A Treatise on Higher Plane Curves*. (3.ª edición). Hodges, Dublín, 1879.
—— 2. *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*. Vol. 1 (6.ª edición). Longmans Green, Londres, 1914.
Dorothy L. Sayers y R. Eustace 1. *The Documents in the Case*. Penguin, Londres, 1937.
L. Schläfli 1. *Gesammelte mathematische Abhandlungen* (Vol. 1). Birkhäuser, Basel, 1950.
D. E. Smith 1, 2. *History of Mathematics* (2 Vols.). Ginn, Boston, 1910; Dover, Nueva York, 1958.
D. M. Y. Sommerville 1. *The Elements of Non-Euclidean Geometry*. Bell, Londres, 1914.
—— 2. *An Introduction to the Geometry of n Dimensions*. Methuen, Londres, 1929.
A. Speiser 1. *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (4.ª edición). Birkhäuser, Basel, 1956.
J. Steiner, 1, 2. *Gesammelte Werke* (2 Vols.). Reimer, Berlín, 1882.

H. Steinhaus 1. *Mathematical Snapshots* (1.ª edición). Stechert, Nueva York, 1938.
—— 2. *Mathematical Snapshots* (2.ª edición). Oxford University Press, Londres, 1950.
D. J. Struik 1. *Classical Differential Geometry*. Addison-Wesley, Cambridge, Massachussets, 1961.
J. L. Synge 1. *Science: Sense and Nonsense*. Norton, Nueva York, 1951.
—— 2. *Kandelman's Krim*. Jonathan Cape, Londres, 1957.
D'Arcy W. Thompson 1, 2. *On Growth and Form* (2 Vols.). Cambridge University Press, Londres, 1952.
W. Thompson (*alias* Lord Kelvin) y P. G. Tait 1. *Treatise on Natural Philosophy* (Vol. 1.1). Cambridge University Press, Londres, 1888.
E. C. Titchmarsh 1. *Mathematics for the General Reader*. Hutchinson's University Library, Londres, 1943.
J. V. Uspensky y M. A. Heaslet 1. *Elementary Number Theory*. Macmillan, Nueva York, 1939.
O. Veblen 1. *The Foundations of Geometry*. Capítulo I de *Monographs on Topics of Modern Mathematics*, Longmans Green, Nueva York, 1911.
—— y J. W. Young 1, 2. *Projective Geometry* (2 Vols.). Ginn, Boston, 1910, 1918.
C. E. Weatherburn 1. *Elementary Vector Analysis*. Bell, Londres, 1921.
—— 2. *Differential Geometry of Three Dimensions*. Cambridge University Press, Londres, 1931.
H. Weyl 1. *Symmetry*. Princeton University Press, Princeton, 1952.
I. M. Yaglom 1. *Geometric Transformations* (Vol. 1 de la traducción de A. Shields). Random House, Nueva York, 1962.
—— 2. *Geometricheskie Preobrazovaniya*, Vol. 2. Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Tekhniko-Teoreticheskoĭ Literaturŷ, Moscú, 1956.

Respuestas a los ejercicios

§ 1.3

1. La reflexión en la recta $x = y$ intercambia x y y.

2. Si la recta BA corta la circunferencia en P(más allá de A) y en P' (entre A y B), tenemos que $BC^2 = BP \times BP' = (BA + AC)(BA - AC)$

3. El triángulo CDF es equilátero; también lo es ABC.

4. El resultado fue en principio una conjetura de Paul Erdös y lo demostró por primera vez L. J. Mordell (véase el *American Mathematical Monthly*, **44** (1937), pág. 252, problema 3740, o también Fejes Tóth 1, págs. 12–14). Mordell descubrió en 1960 la demostración siguiente, más sencilla. Denótense, por conveniencia, OA, OB, OC, OP, OQ, OR por x, y, z, p, q, r, de manera que el teorema que se ha de demostrar se convierte en

$$x + y + z \geqslant 2(p + q + r).$$

Denótense además por p', q', r' las longitudes (en el interior del triángulo) de las bisectrices de los ángulos

$$2\alpha = \angle BOC, \qquad 2\beta = \angle COA, \qquad 2\gamma = \angle AOB.$$

Al comparar el área del triángulo OBC con las dos partes en las que queda descompuesto por la bisectriz p' y usar la conocida desigualdad $y + z \geqslant 2\sqrt{yz}$ que proviene de $(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \geqslant 0$, encontramos que

$$yz \operatorname{sen} 2\alpha = p'(y + z) \operatorname{sen} \alpha \geqslant 2p'\sqrt{yz} \operatorname{sen} \alpha,$$

donde la igualdad ocurre solamente cuando $y = z$. En consecuencia, $\sqrt{yz} \cos \alpha \geqslant p'$, y de la misma manera, $\sqrt{zx} \cos \beta \geqslant q'$, $\sqrt{xy} \cos \gamma \geqslant r'$. De

$$\begin{aligned} x + y + z - 2\sqrt{yz} \cos \alpha - 2\sqrt{zx} \cos \beta - 2\sqrt{xy} \cos \gamma \\ = (\sqrt{x} - \sqrt{y} \cos \gamma - \sqrt{z} \cos \beta)^2 + (\sqrt{y} \operatorname{sen} \gamma - \sqrt{z} \operatorname{sen} \beta)^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

se desprende que

$$x + y + z \geqslant 2(p' + q' + r') \geqslant 2(p + q + r).$$

La desigualdad $x+y+z \geqslant 2(p'+q'+r')$, que se puede considerar una extensión del teorema de Erdös–Mordell, fue advertida por primera vez por D. F. Barrow. Véase también O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić. D. S, Mitrinović y P. M. Vasić. *Geometrie Inequalities* (Wolters–Noordhoff, Groningen, Holanda, 1969), pág. 139.

5. La igualdad ocurre solamente cuando $x=y=z$ y $\sqrt{y}$ sen $\gamma-\sqrt{z}$ sen $\beta=0$, etc., de manera que $\alpha=\beta=\gamma$. El triángulo es equilátero, y su centro es O.

6. Denotemos la "altura" de A a BC por h_a, y el área del triangulo ABC por Δ. Puesto que $x+p \geqslant h_a$, tenemos

$$a(x+p) \geqslant ah_a = 2\Delta = ap + bq + cr,$$

de donde

$$ax \geqslant bq + cr.$$

La consideración de triángulos semejantes nos señala que esto conserva su validez si se prolonga la recta AO (incluso cuando O está en el lado más lejano de la base BC). Al aplicar la misma desigualdad a la imagen de O por reflexión en la bisectriz interna de $\angle BAC$, obtenemos

$$ax \geqslant br + cq.$$

Al sumar estas dos desigualdades, obtenemos para ax

$$2ax \geqslant (b+c)(q+r).$$

Al multiplicar entre sí esta y otras dos desigualdades de la misma clase,

$$8\,abcxyz \geqslant (b+c)(c+a)(a+b)(q+r)(r+p)(p+q).$$

Puesto que $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$, etc., tenemos $(b+c)(c+a)(a+b) \geqslant 8abc$. En consecuencia,

$$xyz \geqslant (q+r)(r+p)(p+q).$$

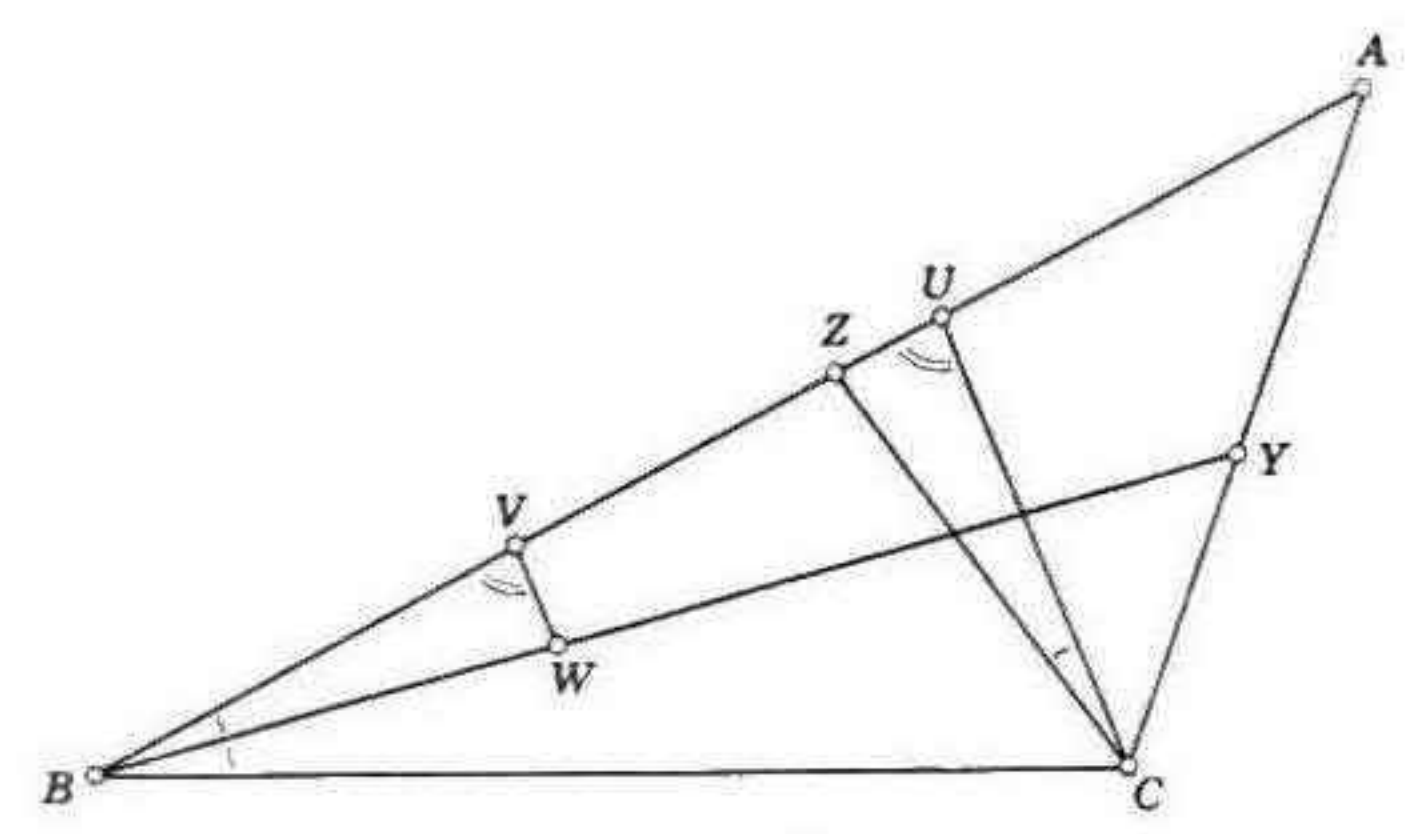


Figura 1-3e

7. Sea B el menor de los dos ángulos diferentes B y C del triángulo ABC. Sean BY y CZ las bisectrices internas de estos ángulos, como se ve en la figura 1.3e. Tómese U en AZ de manera que $\angle ZCU = \frac{1}{2}B$. Puesto que el triángulo UBC tiene en B un ángulo menor que el que tiene en C, se cumple que $BU > CU$. Tómese V en BU de manera que $BV = CU$. Tómese W en BY de manera que $\angle BVW = \angle CUZ$. Por medio del criterio de dos ángulos y un lado, BVW y CUZ son triángulos congruentes, y $BW = CZ$. Pero W y Y están en lados opuestos de la recta CU. En consecuencia, $BY > BW$, es decir, $BY > CZ$.

El teorema lo propuso en 1840 C. L. Lehmus y lo demostró Jacob Steiner. Su historia se relata en J. A. McBride, *Edinburgh Mathematical Notes*, 33 (1943), págs. 1–13. McBride afirma que se han dado más de sesenta demostraciones. La sencilla que hemos citado viene en una carta de H. G. Forder; supera a la mayoría de las otras en el sentido definido en § 12.1: es "absoluta". Para las demostraciones originales de Steiner y Lehmus, véanse respectivamente *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 28 (1844), pág. 376, y *Archiv der Mathematik und Physik*, 15 (1850), pág. 225.

§ 1.4

1. Aplíquese Euclides I.5 al triángulo isósceles GBC y enseguida I.4 a los dos triángulos $B'BC$, $C'CB$.
2. Súmense tres desigualdades como

$$\tfrac{2}{3}BB' + \tfrac{2}{3}CC' > BC.$$

Complétese el paralelogramo $CABK$ y obsérvese que el doble de la mediana A es $AK < AC + CK = b + c$.

§ 1.5

1. La circunferencia que pasa por P con centro en O.
2. Empleese 1.52.
3. Sean las tangentes a la circunferencia inscrita que parten de A, B, C t_a, t_b, t_c. Entonces

$$t_b + t_c = a, \qquad t_c + t_a = b, \qquad t_a + t_b = c;$$

por lo tanto,

$$t_a = \tfrac{1}{2}(b + c - a) = s - a.$$

4. Por Euclides III.20, si el ángulo cuyo vértice está en la circunferencia es mayor que 90°, el ángulo cuyo vértice está en el centro es mayor que 180°
5. En el punto medio de la hipotenusa.
6. Aplíquese repetidamente el teorema de Pitágoras.
7. Puesto que $bc + ca + ab = \{(s-a)(s-b)(s-c) + abc + s^3\}/s = r^2 + 4Rr + s^2$ y $abc = 4R\Delta = 4Rrs$, tenemos

$$\begin{aligned}(2R - a)(2R - b)(2R - c) &= 8R^3 - 8R^2s + 2R(r^2 + 4Rr + s^2) - 4Rrs \\ &= 2R(2R + r - s)^2.\end{aligned}$$

De manera alterna, en la notación del ejercicio 3,

$$\begin{aligned}(t_a - r)(t_b - r)(t_c - r) &= (s - r - a)(s - r - b)(s - r - c) \\ &= (s - r)^3 - 2s(s - r)^2 + (r^2 + 4Rr + s^2)(s - r) - 4Rrs \\ &= 2r^2(s - r - 2R).\end{aligned}$$

De aquí se obtiene el criterio que se busca, porque el ángulo A será recto, agudo u obtuso según sea $t_a - r$ positivo, negativo o cero. De hecho, podemos ir más allá al concluir que *el triángulo tiene un ángulo agudo si y sólo si* $r + 2R > s$. Corrado Ciamberlini [*Bolletino della Unione Matematica Italiana* (2), 5 (1943), págs. 37–41] observó que

$$4R^2 \cos A \cos B \cos C = s^2 - (r + 2R)^2.$$

8. Puesto que $2\eta_1 = -\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$, $\epsilon_1 + \eta_1 = \frac{1}{2}\Sigma\epsilon_i$. También, $\Sigma\epsilon_i\eta_i = \Sigma\epsilon_i(\epsilon_i + \eta_i) - \Sigma\epsilon_i^2 = \frac{1}{2}(\Sigma\epsilon_i)^2 - \Sigma\epsilon_i^2 = 0$.
9. Si $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, las ecuaciones de Beecroft implican que $\eta_3 = \eta_4 = 0$ y $\epsilon_3 = \epsilon_4 = \eta_1 = \eta_2$, de manera que la configuración consiste en cuatro rectas, E_1, H_3, E_2, H_4 que forman un cuadrado, y cuatro circunferencias H_2, E_4, H_1, E_3, cuyos diámetros son

los lados del cuadrado. Esto es lo que sucede cuando $k+l=m+n=0$. En cualquier otro caso, podemos asignar valores arbitrarios a las tres curvaturas ϵ_1, ϵ_2, η_3, que se han de sujetar solamente a la condición $\epsilon_1+\epsilon_2>0$, (que nos asegura que si E_1 y E_2 tienen contacto interno, la circunferencia mayor es la de curvatura negativa). Entonces se determina η_4 por medio de la ecuación sencilla

$$\epsilon_1+\epsilon_2=\eta_3+\eta_4$$

(que es consecuencia de $\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\epsilon_4=2\eta_3$, $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\epsilon_4=2\eta_4$), y las demás curvaturas son

$$\epsilon_3=\frac{\eta_4^2-\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2},\qquad \epsilon_4=\frac{\eta_3^2-\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2},\qquad \eta_1=\frac{\epsilon_2^2-\eta_3\eta_4}{\epsilon_1+\epsilon_2},\qquad \eta_2=\frac{\epsilon_1^2-\eta_3\eta_4}{\epsilon_1+\epsilon_2}$$

La parametrización que se propone se obtiene al escoger

$$k=\epsilon_1/\sqrt{\epsilon_1+\epsilon_2},\qquad l=\epsilon_2/\sqrt{\epsilon_1+\epsilon_2},$$
$$m=-\eta_3/\sqrt{\epsilon_1+\epsilon_2},\qquad n=-\eta_4/\sqrt{\epsilon_1+\epsilon_2}.$$

10. Al emplear sucesivamente 1.59, 1.58, 1.52 y 1.56, obtenemos

$$\epsilon_4=\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-2\eta_4=\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\pm\frac{2}{r}$$
$$=\frac{r_a+r_b+r_c\pm 2s}{\Delta}=\frac{r+4R\pm 2s}{\Delta}.$$

Estas dos circunferencias (que tocan a tres circunferencias tangentes entre sí) se hicieron conocidas como *circunferencias de Soddy* antes de que nadie hubiera advertido el trabajo anterior de Descartes y Steiner [1, págs. 60–63, 524]. Como Descartes empleaba las letras d, e, f, x para denotar los radios de las circunferencias tangentes entre sí, es indudable que advirtió que había obtenido una ecuación cuadrática de x en términos de d, e, f.

11. Sean $A_1B_1C_1$ los pies de las perpendiculares desde P a BC, CA, AB. Aplíquese Euclides III.21 ó 22 a cada uno de los cuadrángulos cíclicos PA_1B_1C, $PABC$, PA_1BC_1, y demuéstrese que $\angle PA_1B_1$ y $\angle PA_1C_1$ son o bien iguales, o bien suplementarios.

12. $\angle C_3B_3A_3=\angle C_3P_3P+\angle PB_3A_3=\angle CBP+\angle PBA=\angle CBA$.

§ 1.6

1. El circuncentro del nuevo triángulo es el ortocentro de ABC.
3. En el vértice en el que está el ángulo recto.
4. Debido a que sen $B=$ sen C.
5. Tómese C en $B'E$ de manera que $GC=GB$, y A tal que $AB'=B'C$.
6. Es b sen C y $b=2R$ sen B.
7. Un tercio de la altura.
8. Si la recta de Euler pasa por A y A no es un ángulo recto, la recta de la altura AH es una mediana.
9. $R\cos A=\frac{2}{3}R$ sen B sen C.

§ 1.7

1. (a) Un par. (b) Tres pares.
2. Si $A>B>C$, el orden es $EA''FC'B''DA'C''B'$.
3. Las medidas angulares de los arcos relevantes de la circunferencia de los nueve puntos (en la que $A>B>C$, como se tiene en la figura 1.7*a*) son

$$A'E=A'F=2A,\qquad B'F=B'D=2B,\qquad C'D=C'E=2C,$$

de donde

$$DA'=2(\pi-2C-A)\qquad A'B'=2(\pi-A-B),$$
$$B'E=2(2A+B-\pi),\qquad EF=2(\pi-2A),\qquad FC'=2(2A+C-\pi).$$

4. Las bisectrices interna y externa de un ángulo son perpendiculares.
5. El centro de los nueve puntos de $I_aI_bI_c$ es el circuncentro de su triángulo órtico ABC.
6. Cada circunradio es dos veces el radio de la circunferencia de los nueve puntos.

§ 1.8

1. $U'V$, que pasa por W, es la imagen de UV por reflexión en AC.
2. Cuando hay un ángulo recto en A, V y W coinciden con A. Cuando hay un ángulo obtuso en A, el triángulo degenerado UAA resulta ser aún "mejor" que cualquier triángulo propio.
3. Las rectas que unen pares de centros, que son perpendiculares a las cuerdas comunes AP, BP, CP, forman ángulos de 60° entre sí, y de esta manera constituyen un triángulo equilátero.
4. En el punto de Fermat. (H. G. Forder demuestra por medio de consideraciones análogas que, si $ABCD$ es un tetraedro y la suma $PA+PB+PC+PD$ es mínima, los ángulos APB y CPD son iguales o sus bisectrices están en la misma recta.)
5. Unen los pares de pueblos con los extremos de un camino corto en la mitad.
6. El "mejor" punto en relación con el ángulo "muy obtuso" es el mismo A. En el caso del cuadrángulo convexo, es el punto de intersección de las diagonales.
7. P es el incentro de $P'BC$.
8. Sean Z, X, U los centros de los cuadrados en los tres lados consecutivos AB, BC, CD del paralelogramo $ABCD$. El triángulo XBZ se deriva de XCU por medio de un cuarto de giro (es decir, la rotación que recorre un ángulo recto) alrededor de X.
9. Sean M el punto medio de CA. Por el ejercicio 8, los segmentos MZ y MX son congruentes y perpendiculares entre sí. Es obvio que lo mismo se puede decir de MY y MA. Por lo tanto, el triángulo MAX se deriva de MYZ por medio del semigiro alrededor de M.
10. Como teníamos en el ejercicio 9, los segmentos MZ y MX son congruentes y perpendiculares. De la misma manera (al considerar el triángulo CDA en lugar de ABC), los segmentos MU y MV son congruentes y perpendiculares entre sí. Por lo tanto, el triángulo MXV se deriva de MZU por medio de un cuarto de giro alrededor de M.

§ 1.9

1. Estas rectas son las medianas del triángulo equilátero PQR.
2. (i) $\alpha=\beta=\gamma=40^\circ$; (ii) $\alpha=30^\circ$, $\beta=\gamma=45^\circ$.
3. Puesto que $\angle CP_1Q = \angle CPQ = \gamma+\alpha = \angle QRA$, la circunferencia circunscrita de AQR pasa por P_1, y también por P_2. Puesto que

$$P_1Q = PQ = QR = RP = RP_2,$$

los puntos P_1, Q, R, P_2 están a espacios iguales en la circunferencia. En el caso especial, cada uno de los arcos P_1Q, QR, RP_2 subtiende 20° en A, y el triángulo AQR es isósceles.

§ 2.1

1. Puesto que
$$\frac{ON_1}{N_1P_0} = \frac{OD}{DP_0} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\frac{ON_1}{OP_1} = \frac{ON_1}{ON_1+N_1P_0} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72\,.$$

2. $\frac{6}{17} - \frac{1}{3} = \frac{1}{51}$.

§ 2.2

Si s es impar, x^s+1 es divisible por $x+1$, y por lo tanto, $2^{rs}+1$ lo es por 2^r+1.

§ 2.4

1. Supongamos que una isometría dada de período 2 intercambia A y A', e intercambia B y B', donde B no está en la recta AA'. Los puntos medios de AA' y BB' son invariantes. Si son distintos, la isometría es una reflexión (por 2.31). Si coinciden, es un semigiro.

2. (a) (i) $(x, y) \to (-x, -y)$; (ii) $(r, \theta) \to (r, \theta + 180°)$.
   (b) (i) $(x, y) \to (-y, x)$; (ii) $(r, \theta) \to (r, \theta + 90°)$.

§ 2.5

(i) $(r, \theta) \to (r, \theta + \alpha)$;
(ii) $(x, y) \to (x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)$.

La curva transformada es $f(r, \theta - \alpha) = 0$.

§ 2.6

1. Si O es el centro del cuadrado que resulta adecuado tomar de los dos que se pueden trazar en BC, el primer cuarto de giro es el producto de las reflexiones en CO y CB mientras el segundo es el producto de las reflexiones en BC y BO.

2. P se transforma en A por medio del cuarto de giro alrededor de C, y de allí en S por el cuarto de giro alrededor de B.

§ 2.7

1. (a) C_1, (b) D_1, (c) D_1, (d) C_2,
   (e) D_2, (f) D_2, (g) D_2.
2. $RTT^{-1} = STT^{-1}$.
3. $R_1R_2 = R_1R_2R_1^2 = R_2R_1R_2R_1 = R_2^2R_1R_2$; tanto $R_2^2 = 1$

y
$$(R_1R_2)^3 = R_1R_2R_1 \cdot R_2R_1R_2 = (R_1R_2R_1)^2 = 1.$$

4. Los períodos de los elementos de C_n son divisores de n.

§ 2.8

2. Si todos los ángulos son iguales, los lados de dos longitudes diferentes sólo pueden ocurrir alternadamente, y esto es imposible, pues su número es impar.

3. 108°, 36°, 140°, 100°, 20°.

4. Circunradios $l\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}$, $l\sqrt{2}(\sqrt{3} \pm 1)$; inradios $l(\sqrt{2} \pm 1)$, $l(2 \pm \sqrt{3})$; figuras verticiales $l\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$, $l(\sqrt{3} \pm 1)/\sqrt{2}$.

5. $\left(1, \dfrac{2k\pi}{n}\right)$.

6. Sí. Hagánse todos los cortes desde el centro. Si el perímetro se divide en partes iguales, el área queda dividida automáticamente en partes iguales.

§ 3.1

1. Rotación, traslación.
2. Reflexión. Sí.
3. Si las bisectrices perpendiculares son distintas, encuéntrese el punto en el que se cortan. (Si fueran paralelas, ¡los segmentos no se relacionarían por medio de una rotación!) Si coinciden, encuéntrese el punto en el que se cortan las rectas AB y $A'B'$. Si estas rectas también coinciden, entonces el centro es el punto medio de AA'.
4. Rótense los dos primeros espejos hasta que el segundo (en su nueva posición) coincida con el tercero.

§ 3.2

1. T^{-1}.
2. Puede ser cualquier recta perpendicular a la dirección de la traslación.
3. Una traslación.
4. Trasládense los dos primeros espejos hasta que el segundo (en su nueva posición) coincida con el tercero.
5. Cualquier traslación se puede expresar como producto de dos semigiros, uno de los que se puede asignar arbitrariamente. Por lo tanto, si H_1, H_2, H_3 son semigiros,

$$H_2H_3 = H_1H_4$$

con respecto a un semigiro adecuado H_4; es decir, $H_1H_2H_3 = H_4$.

7. $(x, y) \to (x + a, y)$. La curva transformada es $f(x - a, y) = 0$, por ejemplo, la circunferencia unitaria con centro en $(a, 0)$ es

$$(x - a)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

§ 3.3

1. (i) El semigiro alrededor de B o la reflexión en la perpendicular que pasa por B.
(ii) La traslación de A a B, o una reflexión en deslizamiento.
2. El dos es el único número par menor que o igual a 3. El producto de una reflexión y un semigiro será una reflexión o una reflexión en deslizamiento, según esté o no esté el centro del semigiro en el espejo.
3. La reflexión en la perpendicular que pasa por O.
4. Semigiro.
5. Una transformación opuesta.
6. La relación $R_1R_2R_3 = R$ equivale a $R_1R_2 = RR_3$, lo que significa que R_1R_2 y RR_3 son o bien rotaciones iguales o bien traslaciones iguales.
7. $G^2 = TR_1R_1T = T^2$.
8. Una reflexión en deslizamiento. Una ecuación requiere de una expresión de las coordenadas *viejas* en términos de las *nuevas*.

§ 3.4

(a) $O_1O_2O_3O_4$ es un paralelogramo (que tal vez se haya derrumbado, como sucedía con $OO'Q'Q$ en la figura 3.2*a*).

(b) Si m_1 y m_2 se cortan, m biseca uno de los ángulos que forman. Si son paralelas, m es paralela a ambas y está exactamente a la mitad del camino entre ellas.

§ 3.5

1. S es una reflexión en deslizamiento.
2. Si una traslación se conmuta con una reflexión, su dirección ha de estar a lo largo del espejo.

§ 3.7

1. (i), (ii), (iii), (iv), (v).
2. (iii), (v).

§ 4.1

1. Cada lado de una región de Dirichlet une los circuncentros de dos triángulos congruentes que tienen un lado común.

§ 4.2

1. Debido a que dos vértices opuestos de cada cuadrángulo se relacionan por medio de una traslación.

§ 4.3

2. Colóquense los dos paralelogramos en una posición tal que uno de los lados de uno de ellos sea una parte de un lado del otro (con un vértice común en un extremo).

§ 4.4

No. El "estiramiento procústeo" [Coxeter y Greitzer 1, pág. 102], que duplica la distancia vertical al tiempo que divide por la mitad las distancias horizontales, se puede aplicar a tres de los diseños de la figura 4.4*a*, a saber, los que representan los grupos **p2**, **cmm**, **pmg**.

§ 4.5

1. La rotación que recorre el mismo ángulo alrededor de P'.
2. Si T es una traslación y S una rotación de período mayor que 2, entonces $S^{-1}TS$ es una traslación en una nueva dirección.

§ 4.6

1. Puesto que la figura verticial es regular, dos caras adyacentes se parecen; por lo tanto, dos caras cualesquiera se parecen. Puesto que la cara es regular, dos vértices adyacentes se encontrarán rodeados de la misma manera; por lo tanto, dos vértices cualesquiera se encontrarán rodeados de la misma manera.
3. No. Para que la celosía sea completa hacen falta los centros de los exágonos.

§ 4.7

1. Si Q no estuviera entre P_2 y P_3, podríamos obtener otro par a una distancia menor que P_1Q.
2. Por medio de inducción sobre n se puede derivar un conjunto de $n-1$ puntos al omitir uno de los dos cuya unión no contiene a otros puntos.
3. Un cuadrángulo completo con sus puntos diagonales.

§ 5.1

1. $O(\lambda^{-1})$.
2. Divide O_1O_2 en la razón $(\lambda_2-1):(\lambda_1-1)\lambda_2$.
3. (a) $(r, \theta) \to (\lambda r, \theta)$,
   (b) $(x, y) \to (\lambda x, \lambda y)$.
4. Por triángulos semejantes, $OP'/OP = OA'/OA$.
5. Al tomar O entre A y A'.

§ 5.2

2. Si la tangente común TT' corta la recta de los centros en O, la dilatación $O(OT'/OT)$ transforma la primera circunferencia en la segunda.
3. Divide OO_1 en la razón $(\lambda_1-1):(1-\lambda)$.

§ 5.3

1. $0, -2, -3, -6$.
2. El centro de los nueve puntos es el mismo para todos.

§ 5.4

Puesto que todo punto invariante de la transformación sigue siendo invariante en la transformación inversa, no se pierde generalidad al considerar la semejanza $ABC \to A'B'C'$ en la que ABC es el mayor de los dos triángulos semejantes que se tienen. (Si fuera menor, podemos alterar la notación para considerar la semejanza inversa.) Si A y A' coinciden, ya tenemos un punto invariante. De no ser así (si no coinciden), suponga-

mos que la semejanza transforma a A' en A'', a A'' en A''', y así sucesivamente. Denotemos la razón de amplificación por μ, de manera que $A'B' = \mu AB$, $0 < \mu < 1$. Entonces $A'A'' = \mu AA'$, $A''A''' = \mu A'A''$, y así sucesivamente. La circunferencia con centro en A y radio $(1-\mu)^{-1} AA'$ se transforma en la circunferencia con centro en A' y radio $\mu(1-\mu)^{-1} AA'$. Puesto que

$$1 + \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{1}{1-\mu},$$

la primera circunferencia encierra a la segunda. Al continuar así, obtenemos una sucesión infinita de circunferencias en las que los radios $\mu^n(1-\mu)^{-1} AA'$ tienden a cero cuando n tiende a infinito. Puesto que estas circunferencias se "anidan", sus centros A, A', A'', ... convergen a un *punto de acumulación* O. Puesto que la semejanza transforma a $A, A', A'', \ldots$ en A', A'', A''', que en esencia es la misma sucesión, el punto O es invariante.

§ 5.5

1. Una rotación dilatativa, que se puede reducir a una dilatación o una rotación.

2. Sea P la intersección de las rectas correspondientes AB, $A'B'$. Sean las circunferencias $AA'P$, $BB'P$, que tienen el punto común P, tales que se corten de nuevo en O. Los triángulos ABO, $A'B'O'$ (que se pueden derrumbar para formar ternas de puntos colineales) son directamente semejantes, como se ve con facilidad. En consecuencia, este punto O es el punto invariante de la semejanza directa $AB \to A'B'$.

Si AA' y BB' son paralelas, O coincide con P (y las dos circunferencias tienen una tangente común en este punto). En cualquier otro caso, hay una construcción alterna que se sirve del punto T en el que AA' corta a BB'. Las circunferencias ABT, $A'B'T$, que tienen el punto común T, se vuelven a cortar en O.

En consecuencia, las cuatro circunferencias $AA'P$, $BB'P$, ABT, $AB'T$ pasan por el mismo punto [Baker I, pág. 110].

§ 5.6

1. Es el punto invariante de una semejanza.

2. Los segmentos AB y $A'B'$ se relacionan por medio de una semejanza directa y una semejanza opuesta. La segunda es una reflexión dilatativa cuyo eje divide a cada segmento PP' en la razón $AB : A'B'$ (uno lo hace interiormente y el otro exteriormente: véase la figura 5.6*a*). Si A_1 coincide con B_1, o A_2 con B_2, la semejanza directa es una dilatación, y los puntos análogos P_1 o P_2 (respectivamente) coinciden.

3. Si S es una reflexión, S^2 es la identidad. Si S es una reflexión en deslizamiento, S^2 es una traslación, que es una clase de dilatación. Si S es una reflexión dilatativa, S^2 es una dilatación central.

4. (a) Una rotación dilatativa, que se puede reducir a una dilatación o una rotación. (b) Una reflexión dilatativa o una reflexión en deslizamiento, que se pueden reducir a una reflexión.

5. Como vimos en § 5.4, las rectas invariantes de la reflexión dilatativa se cortan en el punto invariante O y consisten en las bisectrices internas y externas de $\angle AOA'$. Por Euclides VI.3 y la proposición "externa" análoga, se trata de las rectas OA_1 y OA_2. Se puede repetir el mismo razonamiento si se emplean los puntos B en lugar de los A.

6. (a) Una rotación dilatativa. (b) Una reflexión dilatativa.

§ 6.1

2. Trácense dos circunferencias con centros en O, A y radios OA que se corten en C, C'. La circunferencia con centro en C y radio CC' determina a B en la circunferencia OCC'.

3. Encuéntrese el inverso de un punto que diste $\frac{2}{3}k$ de O y dupliquese su distancia a O. Para el punto cuya distancia a O está entre $k/2n$ y $k/(2n-1)$, aplíquese la dilatación $O(n)$, inviértase, y vuélvase a aplicar $O(n)$.

4. Para bisecar OA, constrúyase B como se hizo en el ejercicio 2, y por medio de otros tres círculos, constrúyase su inverso en el círculo con centro en O.

5. Para dividir OA en n partes iguales, transfórmese A por medio de la dilatación $O(n)$ e inviértase con respecto al círculo con centro en O y de radio OA.

§ 6.3

1. Compárense las figuras 6.3b y 5.2a. En el caso de círculos iguales que se cortan, una de las inversiones se sustituye por una reflexión.

2. Denótese el centro del rombo $APBP'$ por Q. Entonces,

$$\begin{aligned} OP \times OP' &= (OQ - PQ)(OQ + PQ) = OQ^2 - PQ^2 \\ &= OQ^2 + AQ^2 - (AQ^2 + PQ^2) \\ &= OA^2 - PA^2. \end{aligned}$$

3. Sea N el punto medio de BD, y sea H el pie de la perpendicular que se baja desde A a la recta BD. Supongamos que $AO = \mu AB$, de manera que $OP = \mu BD$ y $OP' = (1-\mu)AC$. Entonces,

$$\begin{aligned} BD \times AC &= (HD - HB)(HD + HB) = HD^2 - HB^2 \\ &= AD^2 - AB^2 \end{aligned}$$

y

$$OP \times OP' = \mu BD \times (1-\mu)AC = \mu(1-\mu)(AD^2 - AB^2).$$

4. Sea d la distancia de O al centro de γ. Al comparar el diámetro que pasa por O en γ con el diámetro correspondiente del círculo inverso, observamos que la longitud del segundo es

$$\frac{k^2}{d-r} - \frac{k^2}{d+r} = \frac{2k^2r}{d^2 - r^2} = \frac{2k^2r}{p}.$$

§ 6.5

1. Los círculos ortogonales se invierten en círculos ortogonales, y cualquier círculo ortogonal al círculo de inversión se invierte en sí mismo.

2. Los dos puntos límite son los puntos comunes de dos miembros cualesquiera del haz ortogonal.

3. Sean α_1, α_2, los dos círculos dados y β_1, β_2 dos círculos cualesquiera que los cortan a ambos. Sea l_{ij} el eje radical de α_i y β_j. Sea P_j el punto en el que l_{1j} corta a l_{2j}. Entonces P_1P_2 es el eje radical de α_1 y α_2.

4. Uno es el centro y el otro el punto en el infinito.

5. Inviértase toda la figura en un círculo cuyo centro es uno de los puntos de contacto. Dos círculos del anillo se convierten en rectas paralelas; sean éstas a y b. Los demás tienen sus centros y puntos de contacto en una recta l, perpendicular a a y b. Los círculos originales se convierten en círculos iguales, tales que ambos tocan a a y b. La recta l hace de espejo al reflejar los dos círculos, uno en el otro. La inversión transforma esta reflexión en una inversión.

Los centros de los círculos pertenecen a una elipse.

6. Al invertir en un círculo cuyo centro es el punto de contacto de los círculos tangentes con centros en A y B, obtenemos dos rectas paralelas E_1, E_2 y un círculo E_3 que queda emparedado entre ellas (como teníamos en la primera parte del ejercicio 9 del § 1.5). En este caso, que es muy sencillo, las circunferencias de Soddy (dentro de las mismas rectas) son congruentes con E_3 y tangentes a ella por lados opuestos. Su eje radical H_4, que une los puntos en los que se tocan E_3, E_1, E_2 es el inverso de la circunferencia inscrita.

§ 6.6

1. Cada círculo de Apolonio es ortogonal a todos los círculos que pasan por A y A', y

2. Con centro en la intersección de la mediatriz de AA' y l, trácese una circunferencia que pase por A (y A'), que corte a l en P_1 (cerca de A) y P_2 (cerca de A'). Considérese el valor de la razón

$$\mu = \frac{A'P}{AP}$$

con respecto a diversas posiciones de P. Puesto que P_1P_2 es un diámetro de la circunferencia que se ha trazado por A y A', dos de los círculos de Apolonio tocan a l en P_1 y P_2 respectivamente. Sean μ_1 y μ_2 los valores de μ en estos dos círculos.

Tenemos, en todos los círculos de Apolonio dentro del que pasa por P_1, $\mu > \mu_1$, y en todos los de afuera, $\mu < \mu_1$. Por lo tanto, entre las posiciones diversas de P en l, es P_1 la que tiene para μ un valor máximo, a saber, $\mu = \mu_1$. De la misma manera, el círculo de Apolonio que pasa por P_2 tiene $\mu < \mu_2$ dentro y $\mu > \mu_2$ fuera; entre todas las posiciones de P en l, es P_2 la que tiene un valor mínimo para μ, a saber $\mu = \mu_2$.

3. $\mu/(1-\mu^2)$.

4. Puesto que O y $\bar{O}$ son los puntos comunes de los dos círculos de Apolonio, tenemos

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$$

y lo mismo pasa al reemplazar O por $\bar{O}$. Cuando $A' = B$, se puede emplear el resultado del ejercicio 3 de la página 76.

5. Al invertir en un círculo cuyo centro es cualquiera de los puntos límite del haz coaxial, obtenemos tres círculos *concéntricos* en los que los radios cumplen o bien $a_1 < a_2 < a_3$, o bien $a_1 > a_2 > a_3$. Al escoger el punto límite del que se obtiene el primer orden, resulta

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_2, \alpha_3) = \log\frac{a_2}{a_1} + \log\frac{a_3}{a_2} = \log\frac{a_3}{a_1}$$
$$= (\alpha_1, \alpha_3).$$

Se puede estudiar el problema con más detalles en Coxeter y Greitzer **1**, págs. 123–131.

6. El círculo de similitud es un círculo de Apolonio, a saber, el lugar geométrico de un punto tal que sus distancias a los centros de los dos círculos dados son proporcionales a sus radios, en una razón como $OA : OA' = r : r'$. La semejanza directa u opuesta que transforma a OA en OA' también transforma el círculo dado con centro en A en el círculo dado con centro en A'. De esto se desprende que el lugar geométrico de los puntos desde los que los dos círculos dados *subtienden ángulos iguales* es su círculo de similitud o, cuando los dos círculos se cortan, es la parte de su círculo de similitud que queda fuera de ellos.

Cuando los dos círculos son *iguales*, el lugar geométrico se reduce a su eje radical.

7. Sean los círculos dados con centros en A, B y radios a, b. Sean P, Q los inversos de un punto W del círculo de semejanza. Entonces,

$$\frac{AP \times AW}{BQ \times BW} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{AW}{BW}\right)^2.$$

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{AW}{BW},$$

y PQ es paralela a AB. Puesto que los dos círculos dados son ortogonales al círculo WPQ, su eje radical es un diámetro del segundo, a saber, el diámetro perpendicular a AB. Puesto que este diámetro es también perpendicular a PQ, P y Q son imágenes mutuas por reflexión en ella.

§ 6.7

$J_kS = S \cdot S^{-1}J_kS = SJ'_k$, donde J'_k es la inversión en un círculo de centro en O^S y de radio k. Las dos inversiones son la misma si y sólo si la isometría S conserva invariante a O, es decir, si y sólo si T intercambia a O y O'.

§ 6.8

1. $OA \times OA' = OB \times OB'$ y $\angle AOB = \angle A'OB'$.

2. La razón de amplificación es

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OA \times OA'}{OA \times OB} = \frac{k^2}{ab}.$$

3. Sean $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $d = OD$. Entonces

$$\frac{A'B' \times C'D'}{A'C' \times B'D'} = \frac{(k^2/ab)AB \times (k^2/cd)CD}{(k^2/ac)AC \times (k^2/bd)BD} = \frac{AB \times CD}{AC \times BD}.$$

4. Las esferas que pasan por O se invierten en planos. Dos esferas que se toquen en O no tienen ningún otro punto en común. Dos planos que carecen de un punto común son paralelos.

5. Después de la inversión, tenemos una esfera "emparedada" entre dos planos paralelos α y β. Todas las esferas $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ son congruentes con γ. La sección de la figura por el plano que está a medio camino entre α y β es un círculo que toca un anillo de seis círculos congruentes.

§ 6.9

1. Consideremos, por ejemplo, dos círculos de radio $\frac{1}{3}\pi$ cuyos centros distan $\frac{1}{2}\pi$. Cuando cada círculo se representa por un par de círculos pequeños y paralelos en una esfera, los puntos de intersección son los vértices de 2 cuadrados. (El radio común de los círculos se puede tomar como de cualquier valor entre $\frac{1}{4}\pi$ y $\frac{1}{2}\pi$. El resultado es más evidente cuando este valor se acerca a $\frac{1}{2}\pi$.)

2. Demuéstrese la proposición en primer lugar para un triángulo; divídase a continuación el *pé*gono en triángulos.

§ 7.1

Denótese por R la reflexión en el plano de las dos rectas, y las reflexiones en los planos que pasan por las rectas correspondientes que son perpendiculares al plano en cuestión por R_1 y R_2. Entonces se pueden expresar los semigiros como R_1R y RR_2, de manera que el producto sea R_1R_2.

§ 7.2

La identidad.

§ 7.3

La reflexión en otro plano paralelo

§ 7.4

1. La reflexión en otro plano que pasa por la misma recta.

2. Los dos tetraedros $OABC$ y $OA'B'C'$, que son congruentes, se relacionan o bien mediante una rotación o bien mediante una inversión rotatoria. En el primer caso, un punto cualquiera del eje de rotación equidistará, como sucede con O, de A y de A', de B y de B', y de C y de C'.

§ 7.5

1. (a) Reflexión, (b) Cuarto de giro, (c) Traslación, (d) Torcedura, (e) Reflexión en deslizamiento (f) Inversión rotatoria.

2. En la notación de la figura 7.5*a*, los semigiros son $R'_1R'_2$, $R'_3R'_4$, y su producto es la torcedura $R'_1R'_3 \cdot R'_2R'_4$.

§ 7.6

1. Se transforma en

$$(\mu x \cos\alpha - \mu y \operatorname{sen}\alpha,\ \mu x \operatorname{sen}\alpha + \mu y \cos\alpha,\ \mu z).$$

2. El eje $x = y = z$. El ángulo $2\pi/3$.
3. Se trata de una rotación dilatativa de ángulo π y razón $-\lambda$.
4. Sí. Por medio de esferas, en lugar de círculos. Se puede aplicar la misma demostración en un espacio con cualquier número de dimensiones.

§ 7.7

Una isometría es producto de cuatro o menos reflexiones. Cualquier otra semejanza es producto de una rotación y una dilatación. Si la razón de amplificación es negativa, podemos emplear una inversión rotatoria y una dilatación directa. Puesto que una dilatación directa es producto de las inversiones en dos esferas concéntricas, en total tenemos dos o tres reflexiones y dos inversiones.

Por último, el producto de una inversión y una isometría es el producto de una inversión y r reflexiones, donde $r \leqslant 4$.

§ 8.1

3. Si P_i es (x_i, y_i), M_{ij} será

$$\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \quad \frac{y_i + y_j}{2}\right)$$

y el punto medio de $M_{12}M_{34}$ se determina por

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}\right).$$

§ 8.2

1. $r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$.
2. (r, θ), donde

$$r^2 = \tfrac{1}{4}[r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)]$$

y

$$\tan\theta = \frac{r_1 \operatorname{sen}\theta_1 + r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2}.$$

3. $\theta = \alpha$.
4. Las rectas paralelas correspondientes que pasan por el origen son $ax + by = 0$ y $a'x + b'y = 0$, o

$$\frac{y}{x} = -\frac{a}{b} \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{x} = -\frac{a'}{b'}.$$

La condición se deriva de 8.22 al ponerla en la forma

$$\frac{y}{x}\frac{y'}{x'} = -1, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{a}{b}\frac{a'}{b'} = -1.$$

5. Al reemplazar x y y por $x\cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha$ y $x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$, donde $\alpha = \frac{1}{2}\arctan(-\frac{24}{7}) = \arctan(-\frac{3}{4})$, obtenemos

$$4(4x + 3y)^2 + 24(4x + 3y)(-3x + 4y) + 11(-3x + 4y)^2 = 125,$$

que se reduce a

$$-x^2 + 4y^2 = 1.$$

§ 8.3

1. $c(x^2 + y^2) + k^2(ax + by) = 0,$
$c(x^2 + y^2) + 2k^2(gx + fy) + k^4 = 0.$

2. $x^2 + y^2 = k^2$.
3. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$,
$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$
6. De
$$r\cos\theta + b = 2b\cos t - b\cos 2t = 2b\cos t\,(1 - \cos t) + b$$
y
$$r \operatorname{sen}\theta = 2b \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} 2t = 2b \operatorname{sen} t\,(1 - \cos t)$$
deducimos $r^2 = (r\cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta)^2 = 4b^2(1 - \cos t)^2$ y $\tan\theta = \tan t$. Cuando se reemplaza θ por $-\theta$, r cambia de $2b(1 - \cos\theta)$ a $2b\,(1 + \cos\theta)$. La suma de estas distancias es $4b$ para todos los valores de θ.

§ 8.4

1. Una parábola.
2. Una hipérbola.
3. Del semigiro alrededor del centro se obtiene un segundo foco y una segunda directriz de cualquier cónica central. En la elipse, los dos focos están entre las dos directrices; en la hipérbola, los focos están más allá de las directrices. Denotemos los focos por O y O', y por K' el pie de la perpendicular desde P a la segunda directriz. Puesto que
$$OP = \epsilon PK \qquad \text{y} \qquad O'P = \epsilon PK'$$
tenemos, para la elipse,
$$OP + O'P = \epsilon(PK + PK') = \epsilon KK',$$
y para la hipérbola,
$$O'P - OP = \epsilon(PK' - PK) = \epsilon KK'.$$
4. $\epsilon = \sqrt{1 \mp b^2/a^2}$, $\sqrt{2}$.
5. Puesto que el circuncentro ha de equidistar de A y C, tenemos
$$x^2 + (\tfrac{2}{3}y)^2 = 1 + (\tfrac{1}{3}y)^2,$$
$$x^2 + \tfrac{1}{3}y^2 = 1.$$
6. Por la teoría de las ecuaciones cuadráticas, F es el producto de dos formas lineales si es indefinido, y un cuadrado perfecto si es semidefinido.
7. $2xy = a^2$.
8. A cada punto P de la elipse corresponde un punto P' en la circunferencia *auxiliar* cuyo diámetro es el eje mayor, y PP' es perpendicular a este eje. El radio que pasa por P' forma un ángulo t con el eje mayor.
9. Se incluyen ambas ramas.
10. Reemplácese r por l^2/r.

§ 8.5

1. La parábola $x = 2lt^2$, $y = 2lt$ corta la recta $Xx + Yy + Z = 0$ en puntos que se determinan por las raíces de la ecuación cuadrática
$$X \cdot 2lt^2 + Y \cdot 2lt + Z = 0.$$
La suma y el producto de las raíces, que denotaremos por t y t', son
$$-\frac{Y}{X} = t + t', \qquad \frac{Z}{2lX} = tt'.$$

2. La secante de la elipse $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos(\alpha+\beta) & b\operatorname{sen}(\alpha+\beta) & 1 \\ a\cos(\alpha-\beta) & b\operatorname{sen}(\alpha-\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En la hipérbola, la tangente es

$$\frac{x}{a}\cosh t - \frac{y}{b}\operatorname{senh} t = 1.$$

3. La envolvente de la recta $Xx + Yy + Z = 0$, en la que los coeficientes X, Y, Z son funciones de un parámetro t, es el lugar geométrico de sus puntos de intersección con

$$(X + dX)x + (Y + dY)y + (Z + dZ) = 0,$$

o con $X'x + Y'y + Z' = 0$, donde $X' = \partial X/\partial t$, etc. Al diferenciar

$$ax\sec t - by\csc t = a^2 - b^2$$

y dividir por $\operatorname{sen} t \cos t$, obtenemos

$$\frac{ax}{\cos^3 t} = \frac{-by}{\operatorname{sen}^3 t} = \frac{ax\sec t - by\csc t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = a^2 - b^2.$$

De esta manera, la envolvente de las normales es el lugar geométrico de (x, y), donde

$$\frac{ax}{a^2 - b^2} = \cos^3 t, \qquad \frac{by}{a^2 - b^2} = -\operatorname{sen}^3 t.$$

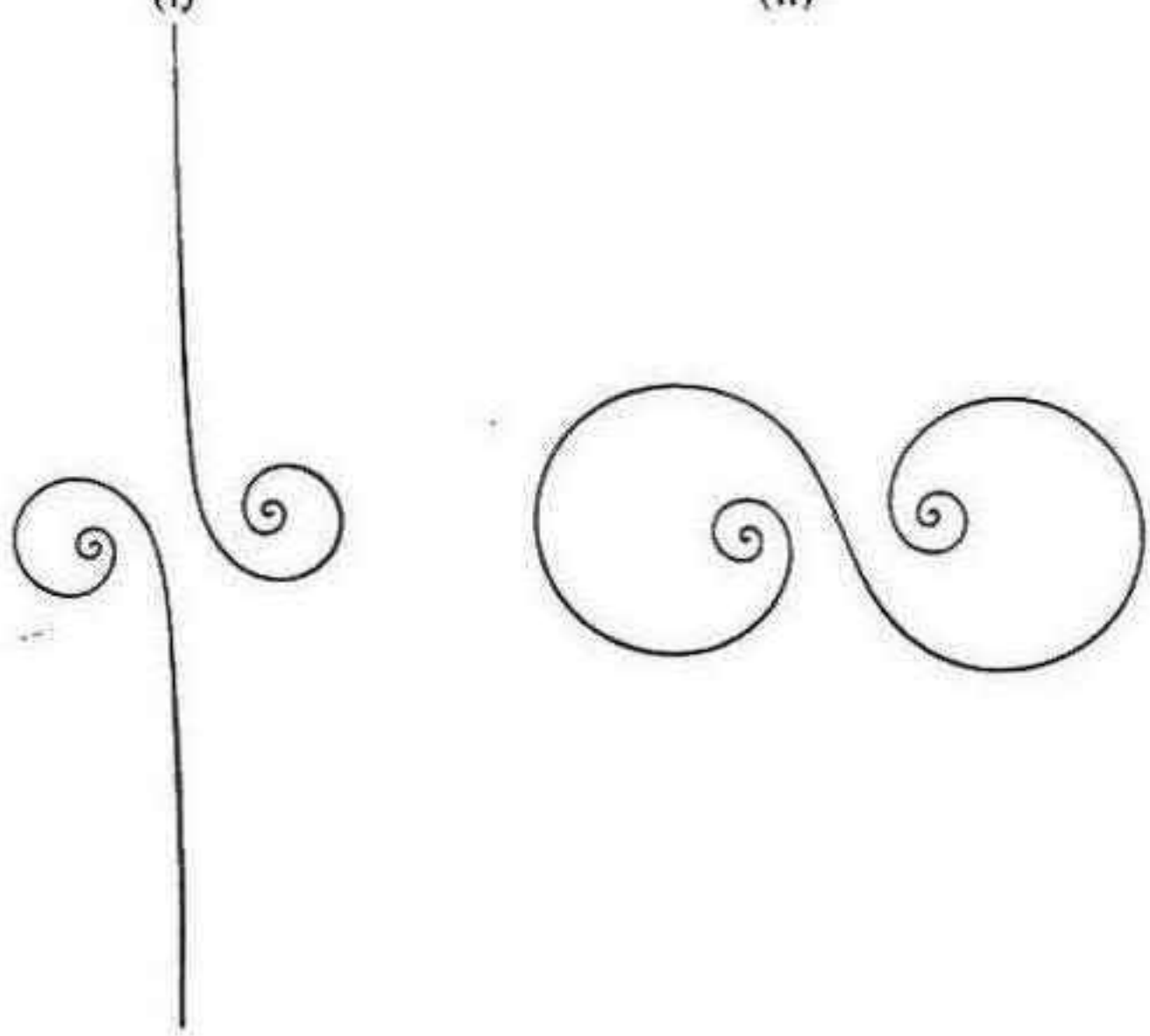
§ 8.6

1. πab.
2. $\frac{1}{2}\tau ab$.

§ 8.7

1. $\mu^{2\pi} r = a\mu^{\theta+2\pi}$. Esta inversión tiene el mismo efecto que la reflexión en la recta inicial.

2. (i) (ii)



Estos dibujos son de Ryszard Krasnodebski. Véase también Coxeter, *Mathematical Gazette*, 52 (1968), pág. 5; *Aequationes Mathematicae*, 1 (1968), págs. 112–114.

§ 8.8

1. Elimínese $X : Y : Z : T$ de las cuatro ecuaciones

$$Xx_i + Yy_i + Zz_i = T \qquad \text{y} \qquad Xx + Yy + Zz = T.$$

El efecto de reemplazar el *i*ésimo punto por una dirección equivale al de reemplazarlo por (X_it, Y_it, Z_it), de manera que la *i*ésima hilera se convierte en

$$X_it \quad Y_it \quad Z_it \quad 1$$

o (igualmente)

$$X_i \quad Y_i \quad Z_i \quad 1/t,$$

y entonces hacer que $1/t$ tienda a cero.

5. La condición para que los radios a un punto común cualquiera de las dos esferas sean perpendiculares consiste en

$$(x + u)(x + u') + (y + v)(y + v') + (z + w)(z + w') = 0.$$

La condición deseada se obtiene al duplicar esto y substraer las ecuaciones de las esferas.

6. El plano polar de (X, Y, Z) pasa por (X', Y', Z') si

$$XX' + YY' + ZZ' = k^2.$$

La naturaleza simétrica de esta condición nos señala que entonces el plano polar de (X', Y', Z') pasa por (X, Y, Z). (Dos de estos puntos se definen como *conjugados* con respecto a la esfera.) El caso especial que se pide surge cuando (X', Y', Z') está en la esfera y (X, Y, Z) en la tangente en ese punto.

7. Al factorizar ambos miembros de la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\operatorname{sen}\alpha\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -\left(\frac{y}{b}\cos\alpha - \frac{x}{a}\operatorname{sen}\alpha\right)^2 + 1,$$

vemos que, para cada valor de α, todo punto de la recta

$$\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\operatorname{sen}\alpha = \frac{z}{c}, \qquad \frac{y}{b}\cos\alpha - \frac{x}{a}\operatorname{sen}\alpha = 1$$

está en el hiperboloide. Si invertimos el signo de Z, obtenemos el otro sistema de generadores. El generador general del primer sistema corta al generador especial

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c}, \qquad \frac{y}{b} = 1$$

del segundo en el punto en el que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{z}{c}(1 + \cos\alpha), \qquad \frac{z}{c}\operatorname{sen}\alpha = 1 - \cos\alpha.$$

La consistencia de estas ecuaciones nos señala que los generadores de sistemas opuestos se intersectan (o, cuando $\alpha = \pi$, son paralelos). Por otra parte, cualquier punto común del generador general del primer sistema y el generador especial

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}, \qquad \frac{y}{b} = 1$$

del *mismo* sistema tendría que satisfacer las dos ecuaciones

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{z}{c}(1 - \cos\alpha), \qquad -\frac{z}{c}\operatorname{sen}\alpha = 1 - \cos\alpha,$$

cosa que sucederá solamente cuando los generadores coincidan.

§ 9.3

1. $z = 2 \pm i$.
2. $u + vi = 0$ significa que el punto (u, v) coincide con el origen $(0, 0)$.
3. $(a + bi)^{-1} = x + yi$, donde

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

4. (i) La rotación dilatativa se reduce a una dilatación, y los dos triángulos sombreados son homotéticos.

(ii) La rotación dilatativa se reduce a una rotación, y los dos triángulos sombreados son congruentes.

§ 9.4

(a) $3 + 4i = 5(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, donde $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, de manera que $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}}$ y $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$. En consecuencia, una raíz cuadrada es

$$(3 + 4i)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\alpha + i\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha) = 2 + i$$

y la otra es $-(2 + i) = -2 - i$.

(b) $1 = \cos 0 + i\operatorname{sen} 0 = \cos 2\pi + i\operatorname{sen} 2\pi = \cos 4\pi + i\operatorname{sen} 4\pi$. En consecuencia, las tres raíces cúbicas son

$$\begin{aligned} \cos 0 + i\operatorname{sen} 0 &= 1, \\ \cos\tfrac{2}{3}\pi + i\operatorname{sen}\tfrac{2}{3}\pi &= \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \\ \cos\tfrac{4}{3}\pi + i\operatorname{sen}\tfrac{4}{3}\pi &= \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

(c) $\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2$.

(d) Lo mismo, y también $\pm i, \pm i\omega, \pm i\omega^2$.

§ 9.5

1. $e^{\frac{1}{2}\pi i} = \cos\frac{1}{2}\pi + i\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi = i$. Sí.

§ 9.6

Por Pitágoras,

$$\left(\frac{24}{7}\right)^2 = (x + 1)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 - 1,$$

$$x + 1 + \frac{1}{x} = \frac{25}{7}, \qquad x = \frac{9 + \sqrt{32}}{7}.$$

§ 9.7

1. El ángulo es am a.
2. El ángulo es $\frac{1}{2}$ am a.

§ 10.1

1. El octaedro es una dipirámide cuadrada con caras laterales equiláteras.
2. Una dipirámide triangular.
3. (i) Un cuadrado, (ii) un exágono, (iii) un decágono.

4. El plano intersecante, con respecto a cualquier esquina aguda, pasa por los puntos medios de las tres aristas que concurren a ese vértice. El romboedro, como sucede con cualquier otro paralelepípedo, se puede repetir por medio de traslaciones para llenar todo el espacie sin dejar intersticios.

§ 10.2

1. Las bases aparecen como dos pentágonos, uno grande y otro pequeño, colocado en el interior en posición opuesta.
2. Siete.
3. Ocho.

§ 10.3

1. Empléese 10.32.
2. Si un poliedro tiene $p \geqslant 4$ en cada cara y $q \geqslant 4$ en cada vértice,

$$4(V - A + C) \leqslant \Sigma q - 4A + \Sigma p = 2A - 4A + 2A = 0.$$

3. La única posibilidad es un mosaico de rombos cuyos vértices forman una celosía.

§ 10.5

1. Las aristas en un vértice son ortogonales entre sí y de la misma longitud.
2. Un vértice en cada "octante".
3. (1, 1, 1).
4. Del cubo del ejercicio 1, derivamos el tetraedro

$$(0, 0, 0)(0, 1, 1)(1, 0, 1)(1, 1, 0),$$

en el que los planos de las caras son $x + y + z = 2$, $x = y + z$, $y = z + x$, $z = x + y$. Para normalizar estas ecuaciones, las dividimos por $\sqrt{3}$. El coseno del ángulo interior que forman dos de los planos es $\frac{1}{3}$.

5. $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Los planos de las caras son $\pm x \pm y \pm z = 1$. La arista que une $(1, 0, 0)$ con $(0, 1, 0)$ pertenece a los planos $x + y \pm z = 1$, que forman un ángulo cuyo coseno es $-\frac{1}{3}$.

6. Los puntos entre los planos paralelos $x + y + z = \pm 1$ cumplen $x + y + z < 1$ y $-x - y - z < 1$; lo mismo pasa con los otros pares.

7. 120°. El tetraedro regular

$$(-1, -1, -1)(-1, 1, 1)(1, -1, 1)(1, 1, -1)$$

tiene el centro en el origen. Los planos que unen el origen con los pares de vértices son

$$y \pm z = 0, \qquad z \pm x = 0, \qquad x \pm y = 0.$$

§ 11.1

1. $\tau \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} = 2 \cos \frac{\pi}{5} \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$.
2. Centro en S, radio QU.

§ 11.2

1. Los cuatro puntos $(\pm \tau, \pm 1, 0)$, como se ve en seguida, forman un rectángulo áureo en el plano $z = 0$.

2. El segmento $(0, 0, \tau^2)(0, \tau^2, 0)$ queda dividido en la razón $\tau : 1$ por el punto $(0, \tau, 1)$.

3. $(0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau)$, $(\pm \tau, 0, \pm \tau^{-1})$, $(\pm \tau^{-1}, \pm \tau, 0)$, $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. De esta manera, los 20 vértices pertenecen a 3 rectángulos "áureos de dos maneras" (en los que los lados están en la razón $\tau^2 : 1$) y a un cubo.

§ 11.3

1. Los lados correspondientes de los dos rectángulos se cortan en los puntos B, D, F, H. Las rectas BF y DH se cortan en O.

2. Los puntos I, G, C, A, de coordenadas polares $(\tau^{-2}, -\pi)$, $(\tau^{-1}, -\frac{1}{2}\pi)$, $(\tau, \frac{1}{2}\pi)$, (τ^2, π), tienen las coordenadas cartesianas $(-\tau^{-2}, 0)$, $(0, -\tau^{-1})$, $(0, \tau)$, $(-\tau^2, 0)$. En consecuencia, las rectas IC, GA son

$$\tau^3 x - y + \tau = 0, \qquad x + \tau^3 y + \tau^2 = 0;$$

y H, su punto de intersección, es $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ o, en coordenadas polares, $(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{3}{4}\pi)$. De esta manera, los puntos J, H, F, D, B, que se determinan por

$$r = 2^{-\frac{1}{2}}\tau^n, \qquad \theta = \tfrac{1}{4}(2n-3)\pi \qquad (n = -1, 0, 1, 2, 3),$$

están en la espiral 8.71, donde $a = 2^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}$. Esto se deriva de la espiral $r = \mu^\theta$ por medio de la dilatación $O(a)$ o por la rotación que recorre el ángulo

$$\frac{\log a}{\log \mu}.$$

§ 11.4

1. $f_{n+2} - 1$.

2. Por inducción, supongamos que $f_{n-2}f_n - f_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 &= f_{n-1}(f_{n-1} + f_n) - f_n(f_{n-2} + f_{n-1}) \\ &= f_{n-1}^2 - f_{n-2}f_n = (-1)^n. \end{aligned}$$

3. Al trabajar con el módulo 10, tenemos $5 + 8 \equiv 3$, $8 + 3 \equiv 1$, y así sucesivamente.

4. Al igualar $k + j = n$, vemos que el coeficiente de t^n es

$$\Sigma\binom{k}{j}$$

donde $k = n - j$, y, puesto que $2j \leqslant j + k = n$, $0 \leqslant j \leqslant \frac{1}{2}n$.

5. 1.010203050813213455 . . . .

6. Por 11.48,

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{\tau^{n+1} + (-\tau)^{-n-1}}{\tau^n + (-\tau)^{-n}} = \frac{\tau + (-1)^{n+1}\tau^{-2n-1}}{1 + (-1)^n\tau^{-2n}}.$$

En consecuencia, el límite es τ.

§ 11.5

Cuando $k = 1$, se obtiene de 11.51 $h = \tau^{-3/2} = 0.48587 \ldots$.

§ 12.1

1. Los dos.
2. La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.
3. La geometría afín.
4. (a) Afín, (b) absoluta, (c) absoluta.

§ 12.2

1. Por el axioma 12.22, existe un punto C en el que $[ABC]$, también un punto D en el que $[BCD]$, y así sucesiva e indefinidamente.

2. El teorema 12.271.

3. Si FDE, podemos aplicar 12.27 al triángulo BFD en el que $[DCB]$, de manera que obtendremos Z en EC tal que $[BZF]$. Puesto que $Z = A$, esto contradice $[AFB]$.

4. Cualquier recta que no pertenezca al conjunto contiene una infinidad de puntos, entre los que sólo un número finito puede quedar en rectas del conjunto (no más de un punto por cada recta).

5. Empleese 12.278 (y la figura 12.2*d*) substituyendo D, A, B, F, C, L por A, B, C, L, M, N.

6. Tómese A' en A/B, B' en B/C y aplíquese el axioma 12.27 al triángulo $A'B'B$ en el que $[B'BC]$ y $[BAA']$.

7. Para *cualesquiera* de esos puntos A' y B', la recta $A'B'$ corta a A/C; por lo tanto, no corta a C/A.

§ 12.3

Los $n-1$ puntos P_i $(i > 1)$ quedan unidos por pares por no más de $\binom{n-1}{2}$ rectas, de las que algunas o todas pueden encontrar a P_1Q. En la figura 12.3*b*, las seis rectas de unión, que son P_2P_4, P_4P_1, P_1P_2, P_3P_6, P_6P_1, P_1P_3 contribuyen lo mismo que P_1P_5.

§ 12.4

1. Puesto que los cinco puntos no son colineales, han de constituir o bien un pentágono convexo, o bien un cuadrángulo convexo con un punto en el interior, o bien un triángulo con dos puntos en el interior. En los casos primero y segundo, el resultado es obvio. En el tercer caso, los dos puntos interiores están en una recta que corta a dos lados distintos del triángulo. Los extremos del tercer lado forman, con estos puntos interiores, el cuadrángulo convexo que se pide.

4. Las dos primeras rectas, BC y CA, descomponen el plano en cuatro regiones angulares. La recta AB no corta la región que acotan C/A y C/B, pero descompone cada una de las demás regiones angulares en dos partes. La región que el triángulo acota es la única porción finita, puesto que por lo menos uno de los lados de cada una de las otras es un rayo.

5. Considérese un conjunto cualquiera de $m-1$ de las m rectas, junto con las $f(2, m-1)$ regiones que forman. Descomponen la *emé*sima recta en m partes (a saber, dos rayos y $m-2$ segmentos), que quedan respectivamente en m de las $f(2, m-1)$ regiones. Estas m regiones quedan divididas en dos cada una, mientras el resto queda sin afectarse. En consecuencia,

$$f(2, m) = f(2, m-1) + m.$$

Al combinar esto con las ecuaciones análogas

$$\begin{aligned} f(2, m-1) &= f(2, m-2) + m - 1, \\ &\cdots \qquad\qquad \cdots \\ f(2, 1) &= f(2, 0) + 1, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} f(2, m) &= f(2, m-1) + m \\ &= f(2, m-2) + (m-1) + m \\ &= \cdots \\ &= f(2, 0) + 1 + 2 + \cdots + m \\ &= 1 + \binom{m+1}{2} = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2}. \end{aligned}$$

6. Los primeros $m-1$ planos descomponen a la *emé*sima en $f(2, m-1)$ regiones planas que quedan respectivamente en $f(2, m-1)$ de las $f(3, m-1)$

regiones del espacio. Estas $f(2, m-1)$ regiones del espacio quedan divididas en dos cada una, mientras el resto queda sin afectar. En consecuencia,

$$\begin{aligned} f(3, m) &= f(3, m-1) + f(2, m-1) \\ &= f(3, m-2) + f(2, m-2) + f(2, m-1) \\ &= \cdots \\ &= f(3, 0) + f(2, 0) + f(2, 1) + \cdots + f(2, m-1) \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{m} \left\{ 1 + \binom{r}{2} \right\} = 1 + m + \binom{m+1}{3} \\ &= \binom{m+1}{1} + \binom{m+1}{3} \\ &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}. \end{aligned}$$

7. $f(n, m) = f(n, m-1) + f(n-1, m-1)$, con $f(n, 0) = 1$. Por lo tanto

$$f(n, m) = f(n, 0) + \sum_{r=0}^{m-1} f(n-1, r).$$

Para demostrar por inducción que

$$f(n, m) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{n}$$

probamos la validez de la misma fórmula al substituir n por $n-1$.

$$\begin{aligned} f(n, m) &= f(n\ 0) + \sum_{r=0}^{m-1} \left\{ \binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \cdots + \binom{r}{n-1} \right\} \\ &= 1 + \sum_{0}^{m-1} \binom{r}{0} + \sum_{1}^{m-1} \binom{r}{1} + \cdots + \sum_{n-1}^{m-1} \binom{r}{n-1} \\ &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{n}. \end{aligned}$$

En el paso final interviene la serie conocida

$$\sum_{r=n-1}^{m-1} \binom{r}{n-1} = \sum_{n-1}^{m-1} \left\{ \binom{r+1}{n} - \binom{r}{n} \right\} = \binom{m}{n} - \binom{n-1}{n} = \binom{m}{n}.$$

§ 12.6

1. La relación $[prs]$ nos señala que las tres rectas no se cortan y que contienen los puntos A, C, B (respectivamente), dispuestos como $[ACB]$. Supongamos que p_1 sea paralela a s. Entonces, cualquier rayo que parta de A por el interior del ángulo que forman AB y p_1, corta a s y, por lo tanto, también a r. En consecuencia, p_1 es paralela a r.

2. Los dos rayos que pasan por un punto dado y son paralelos a una recta dada aparecen como los segmentos que unen el punto con los extremos de una cuerda.

§ 13.1

1. Sean q y r dos rectas paralelas. Si p cortara a q sin cortar a r, entonces p y q pasarían por el punto $p \cdot q$, sin dejar de ser ambas paralelas a r, lo que contradice nuestro axioma 13.11.

2. Sí, siempre que las tres rectas sean coplanares.

§ 13.2

1. Esto es una versión unidimensional del principio de que toda isometría directa (donde se incluye a la identidad) es producto de un número par de isometrías opuestas. Las traslaciones preservan las direcciones, mientras los semigiros las invierten.

2. Por 13.25, $(A \to D) = (C \to B)$ implica $(A \leftrightarrow B) = (C \leftrightarrow D)$, es decir, $(A \leftrightarrow B) = (D \leftrightarrow C)$, que a su vez implica $(A \to C) = (D \to B)$.

3. Es el semigiro alrededor de C.

4. Dos lados opuestos cualesquiera se intercambian por medio del semigiro alrededor del punto medio común de las diagonales.

5. Si usamos el símbolo $\equiv$ para relacionar segmentos congruentes, tenemos

$$BA_1 \equiv C_1B_1 \equiv A_2C, \qquad BA_2 \equiv C_2B_2 \equiv A_3C.$$

Por el ejercicio 2, $BA_1 \equiv A_2C$ implica $BA_2 \equiv A_1C$. En consecuencia, $A_3 = A_1$.

6. Divídase el cuadrángulo en dos triángulos por medio de una diagonal, y empléese 13.26.

7. Las tres bimedianas tienen el mismo punto medio.

§ 13.3

1. Cada punto de AB se transforma en un punto que divide el segmento AB en la misma razón, es decir, en sí mismo. Con respecto a cualquier otro punto P podemos trazar la paralela PM a CA y la paralela PN a CB, donde M y N están en AB. El punto correspondiente P' se obtiene al trazar la paralela MP' a AC' y la paralela NP' a BC'.

Esta es una *construcción afín* característica. En lugar de "la regla y el compás" de Euclides, empleamos un instrumento más sencillo, la *regla de paralelas*, que consiste en cuatro reglas (o dos reglas y dos varillas auxiliares) que forman un paralelogramo en el que hay movilidad en los cuatro vértices. Nos permite trazar paralelas a una recta dada (y, por supuesto, también unir dos puntos dados).

2. Si tenemos que una afinidad intercambia dos puntos C y C', conserva invariante el punto medio O de CC'. Si O es el único punto invariante, es también el punto medio de PP' con respecto a cualquier punto P, y la afinidad es el semigiro $C \to C'$. Pero si hay otro punto invariante M, la afinidad, que transforma el triángulo MCC' en $MC'C$, es la reflexión $M(CC')$.

3. Si la afinidad no es una dilatación, ha de transformar por lo menos una recta a en una recta a' que no sea paralela a a. Otra recta b, paralela a a, se transformará en otra recta b', paralela a a'. El punto de intersección $A = a \cdot a'$ es invariante; de no ser así, estaría en una recta invariante m y podría llamarse tan $a \cdot m$ como $a' \cdot m$, lo que contradice su invariancia. De la misma manera, hay otro punto invariante, $B = b \cdot b'$. La afinidad es, por lo tanto, o bien una ruptura o bien una deformación: $ABC \to ABC'$.

4. Puesto que las rectas tienen ecuaciones lineales, cualquier transformación de la forma 13.33 conserva la colinealidad. Recíprocamente, podemos expresar una afinidad cualquiera $lXY \to l'X'Y'$ en la forma 13.33 al dar los valores adecuados a a, b, c, d, l, m, pues el triángulo $(0, 0)(1, 0)(0, 1)$ se transforma en

$$(l, m)(a + l, c + m)(b + l, d + m),$$

que se puede identificar con cualquier triángulo dado. La no colinealidad de estos tres puntos se asegura mediante la condición $ad \neq bc$.

5. (i) Traslación, (ii) Dilatación central,
(iii) Ruptura, (iv) Deformación

(donde se incluye la reflexión afín como el caso especial en el que $a = -1$).

§ 13.4

1. Se desprende del comentario hecho después de 13.41.

2. Si las diagonales P_0P_3, P_1P_4, P_2P_0, P_3P_1 son respectivamente paralelas

a los lados P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_0, los triángulos siguientes tendrán la misma área:

$$P_0P_1P_2,\ P_1P_2P_3,\ P_2P_3P_4,\ P_3P_4P_0,\ P_4P_0P_1.$$

Por lo tanto, P_2P_4 es paralela a P_0P_1.

3. Cuando es una traslación o un semigiro. De hecho, en una dilatación central (9.1) tenemos que $ad - bd = \lambda^2$.

4. Siempre.

5. Nunca.

6. Cada reflexión afín invierte el área.

7. Una traslación es producto de dos reflexiones afines en la dirección de la traslación, donde los espejos son paralelos en cualquier otra dirección. Con más precisión, en la notación de la figura 13.2*d*, la traslación $A \to D$ es producto de las reflexiones $A(BC)$ y $B(AD)$.

Un semigiro es producto de las reflexiones en dos rectas que se cortan, donde la dirección de cada reflexión es la del espejo de la otra: el semigiro $A \leftrightarrow B$ es producto de las reflexiones $A(BC)$ y $C(AB)$.

Una ruptura es producto de las reflexiones en un espejo en dos direcciones diferentes. De manera alterna, es producto de las reflexiones en una dirección de dos espejos que se cortan.

8. Para cualquier transformación geométrica, las sucesivas versiones transformadas de un punto P_0 comprenden un conjunto de puntos $P_0P_1P_2 \ldots$ que se llama *órbita* de P_0; *la transformación lleva* P_0 a P_1, P_1 a P_2, y así sucesivamente. El ejercicio 3 (en la página) que describía una situación en la que la órbita de todo punto constituía un conjunto de puntos colineales, nos señala que las únicas afinidades de esta clase son las "triviales": las dilataciones, las rupturas y las deformaciones. En cualquier otra clase de afinidad hay por lo menos un punto invariante P_0 que no está en ninguna recta invariante; la recta P_0P_1 se transforma en una recta diferente P_1P_2, la órbita se inicia con tres puntos que forman un triángulo, y la afinidad se puede expresar como $P_0P_1P_2 \to P_1P_2P_3$. En el caso de la equiafinidad, las clases "triviales" son las que consideramos en el ejercicio 7. En cualquier otro caso, $P_0P_1P_2$ y $P_1P_2P_3$ serán dos triángulos de la misma área. Puesto que tienen un lado común, P_1P_2, el ejercicio 1 nos señala que P_0P_3 tiene que ser paralela a P_1P_2.

9. Puesto que hemos tratado ya con la traslación, el semigiro y la ruptura en el ejercicio 7, podemos restringirnos a considerar $P_0P_1P_2 \to P_1P_2P_3$ donde P_0P_3 es paralela a P_1P_2. Si M denota el punto medio de P_0P_3, como se tiene en la figura 13.4*b*, vemos que esta equiafinidad es producto de las dos reflexiones afines

$$\mathrm{R}_1 = M(P_1P_2) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{R}_2 = P_2(P_1P_3)$$

(compárese con § 2.7 en la página 60). Esto se comprende si pensamos que estas reflexiones tienen el efecto

$$P_0P_1P_2 \to P_3P_2P_1 \to P_1P_2P_3.$$

10. Puesto que R_1 transforma los puntos $\ldots P_0P_1P_2P_3 \ldots$ en $\ldots P_3P_2P_1P_0 \ldots$, mientras R_2 transforma $\ldots P_0P_1P_2P_3P_4 \ldots$ en $\ldots P_4P_3P_2P_1P_0 \ldots$, el paralelismo que se propone solamente ocurre cuando $i + j = h + k = 3$ o 4. Para otros valores, no tenemos más que transformar por medio de una potencia adecuada de la equiafinidad $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$.

11. Se debe a que la geometría afín es incapaz de distinguir entre la circunferencia y cualquier otra elipse. La sombra elíptica que arroja una moneda ejemplifica el hecho de que una elipse no es sino una "circunferencia deformada". Podemos usar con libertad una deformación como una transformación de coordenadas, donde escribimos ϵx en lugar de x, de manera que la elipse se vuelve

$$\epsilon^2x^2 + y^2 = 1$$

y la rotación elíptica 13.49 se convierte en

$$x' = x\cos\theta - \frac{y}{\epsilon}\operatorname{sen}\theta, \qquad y' = \epsilon x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta.$$

Esta equiafinidad se reduce a un semigiro cuando $\theta = \pi$. Si en lugar de esto tomamos $\theta = \pi - \epsilon$, $\epsilon = \pi/(2d+1)$, y hacemos que d tienda a infinito, obtenemos una equiafinidad nueva: *la rotación focal*

$$x' = -x - y, \qquad y' = -y,$$

que conserva invariante el par de rectas paralelas $y^2 = 1$. Dicho de otra manera, los polígonos regulares de estrella del tipo $\{2 + 1/d\}$ $(d = 2, 3, 4, \ldots)$ se pueden considerar en convergencia a un dígono (página 63) o un *polígono focal*, en el que los vértices

$$(0, 1), (-1, -1), (2, 1), (-3, -1), \ldots$$

están dispuestos alternadamente en estas dos rectas paralelas mientras sus lados pasan alternadamente por los dos "focos" $(\mp \frac{1}{2}, 0)$.

12. Todo triángulo es regular desde el punto de vista afín, pero los únicos cuadrángulos regulares desde el punto de vista afín son los paralelogramos.

13. Dados P_0, P_1, P_2, complétese el paralelogramo $P_0P_1P_2O$. Trácense a continuación la paralela P_2P_3 a P_1O (donde P_3 está en O/P_0), la paralela P_3P_4 a P_2O (donde P_4 está en O/P_1), y la paralela P_4P_5 a OP_0 (donde P_5 está en O/P_2).

14. Es importante recordar que la geometría afín no admite la medida de los ángulos. El símbolo θ que interviene en 13.49 no se debe interpretar como un ángulo, sino simplemente como un número. El empleo de los senos y cosenos no nos fuerza a trabajar en la geometría euclidiana: se emplean gracias a sus propiedades convenientes, como $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$. Estas funciones se pueden definir, por supuesto, mediante recursos de análisis sin referencia alguna a la geometría. Después de estas palabras de advertencia, tomamos el vértice característico P_j con coordenadas afines

$$(\cos j\theta, \ \operatorname{sen} j\theta),$$

donde $\theta = 2\pi/n$, para concluir que

$$\frac{P_0P_3}{P_1P_2} = \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} \theta} = \frac{3 - 4\operatorname{sen}^2\theta}{2\cos\theta - 1} = 2\cos\theta + 1.$$

15. Los valores son 2, 3, 4, 6 (como se tenía en § 4.5, en la página 88). Podemos justificar esta conclusión de la manera siguiente. A partir de § 13.3 podemos afirmar que la regla de paralelas nos permite multiplicar la longitud de un segmento dado por cualquier número *racional*. De hecho, a partir de (0, 0), (1, 0), (0, 1), los puntos que se pueden construir por medio de la regla de paralelas son los puntos (x, y) de coordenadas afines racionales y solamente ésos. Vemos, por el ejercicio 8, que la naturaleza de un polígono regular desde el punto de vista afín $P_0P_1P_2 \ldots$ se determina por la posición de P_3 en la paralela a P_1P_2 que pasa por P_0. A partir del ejercico 10, es claro que podremos entonces construir P_4 y todos los demás vértices a su vez. El ejercicio 14 nos señala que, con respecto a un polígono de tipo $\{n\}$, P_3 se puede construir si y sólo si $\cos\theta$ *y* θ/π *son números racionales.*

El truco que veremos en seguida para determinar los valores admisibles de θ se debe al mismo H. W. Richmond que geometrizó la solución de Gauss de la ecuación ciclotómica $z^{17} - 1 = 0$ (figura 2.1*b* en la página 52).

Puesto que $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, todo $\cos\theta$ racional implica un $\cos 2\theta$ racional. Puesto que θ/π es un racional, las expresiones

$$\cos\theta, \ \cos 2\theta, \ \cos 4\theta, \ldots, \ \cos 2^k\theta, \ldots$$

abarcan un conjunto *finito* de números racionales. Cuando expresamos estos racionales como fracciones en "sus términos más bajos", sea b, y sea

$$\cos\phi = \frac{a}{b} \qquad (\phi = 2^k\theta)$$

tal que tiene este denominador. Puesto que a y b son primos relativos, el denominador de

$$\cos 2\phi = \frac{2a^2 - b^2}{b^2}$$

será o bien b^2, o bien (si b es par) $\frac{1}{2}b^2$. Pero este denominador no puede ser mayor que b. Por lo tanto,

$$b \geqslant \tfrac{1}{2}b^2 > 0,\ b \leqslant 2,\ b = 1 \text{ o } 2,\ \cos\phi = 0 \text{ o } \pm 1 \text{ o } \pm\tfrac{1}{2},$$

y los únicos valores admisibles de ϕ son $j\pi/2$ y $j\pi/3$ para los enteros j. Puesto que cos $(\pi/4)$ y cos $(\pi/6)$ son irracionales, tenemos que los únicos valores admisibles de θ cuando $0 < \theta \leqslant \pi$ son

$$\pi,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3}.$$

En nuestra aplicación geométrica de este resultado, $\theta = 2\pi/n \leqslant \pi$. En consecuencia, $n = 2, 3, 4$, o 6. En otras palabras, los únicos polígonos regulares desde el punto de vista afín que se pueden construir con la regla de paralelas son el dígono, el triángulo, el paralelogramo y el exágono regular desde el punto de vista afín. (Por ejemplo, el pentagrama y el pentágono de la figura 13.4*e* *no* se pueden construir. Es imposible asignar coordenadas racionales a los cinco vértices de manera simultánea.)

La relación que esto tiene con § 4.5 se puede explicar si observamos que, en la formación de un cristal, la naturaleza emplea efectivamente una regla de paralelas al alinear algunos átomos en las hileras rectas de una celosía.

§ 13.5

1. Cualquier factor común de x y x_1 divide a $xy_1 - yx_1$. Por 13.52, esto es imposible.

2. Por 13.52, $x_0y - y_0x = 1 = xy_1 - yx_1$, y, por lo tanto,

$$(x_0 + x_1)y = (y_0 + y_1)x.$$

3. Podemos asignar sistemáticamente los símbolos 0, 1, . . . , 6 en orden cíclico a los puntos de la celosía básica de la manera siguiente: cada uno de los puntos A, B, C recibe la etiqueta 0, y procedemos a continuación con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, . . . a la derecha. De A hacia L tenemos 0, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 0, . . . ; y de B hacia M tenemos 0, 5, 3, 1, 6, 4, 2, 0, ... Todos los puntos con el mismo número constituyen una "subcelosía", y como hay siete de estas subcelosías, cada una de ellas tiene una celda unitaria siete veces mayor que la de la celosía básica.

De manera alterna, sea la celosía básica compuesta por los puntos cuyas coordenadas afines son enteros. Tómese B en (0, 0), C en (2, 1), A en $(-1, 3)$. Entonces, los únicos puntos de la celosía que quedan dentro del triángulo ABC son (1, 1), (0, 2), (0, 1), que forman un triángulo de área de $\frac{1}{2}$ (es decir, la mitad de una celda unitaria). Por el teorema de Pick, el área de ABC es $\frac{3}{2} + 3 - 1 = \frac{7}{2}$.

3. (a) El área del triángulo $(0, 0)(3, 1)(-1, 4)$ es $\frac{3}{2} + 6 - 1 = \frac{13}{2}$, mientras las cevianas forman un triángulo interior de área $\frac{6}{2} + 0 - 1 = 2$. La razón es $\frac{4}{13}$. (b) El área del triángulo $(0, 0)(3, 2)(-2, 5)$ es $\frac{3}{2} + 9 - 1 = \frac{19}{2}$, mientras las cevianas forman un triángulo interior de área $\frac{1}{2}$.

5. El paralelogramo $(0, 0)(2, -1)(3, 1)(1, 2)$ tiene un área de $\frac{4}{2} + 4 - 1 = 5$, mientras el pequeño paralelogramo en la mitad tiene un área de 1.

El área del paralelogramo $(\pm 6, \pm 6)$ es de 144, mientras la del pequeño octágono en la mitad, a saber $(\pm 3, 0)(\pm 2, \pm 2)(0, \pm 3)$, con 21 puntos interiores, es de 24.

6. $$\frac{1}{\lambda+1}\frac{\mu}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+1}\frac{\nu}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+1}\frac{\lambda}{\lambda+1}$$

$$= \frac{\mu(\nu+1) + \nu(\lambda+1) + \lambda(\mu+1)}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}$$

$$= 1 - \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)}.$$

7. Esto es obvio a menos que λ, μ, ν sean todos $\geqslant 1$ o todos $\leqslant 1$. Supongamos una de estas dos eventualidades y sea LMN el menor de los cuatro triángulos. Entonces, $\lambda\mu\nu + 1$ ha de ser igual a o menor que cada una de las expresiones

$$(\lambda + 1)\nu, \qquad (\mu + 1)\lambda, \qquad (\nu + 1)\mu.$$

Al sumar,

$$\begin{aligned} 3(\lambda\mu\nu + 1) &\leqslant (\lambda + 1)\nu + (\nu + 1)\lambda + (\nu + 1)\mu \\ &= (\mu\nu + \lambda) + (\nu\lambda + \mu) + (\lambda\mu + \nu), \end{aligned}$$

es decir,

$$(\lambda - 1)(\mu\nu - 1) + (\mu - 1)(\nu\lambda - 1) + (\nu - 1)(\lambda\mu - 1) \leqslant 0.$$

Puesto que λ, μ, ν son todos $\geqslant 1$ o todos $\leqslant 1$, cada uno de los tres términos ha de valer cero, de manera que

$$\lambda = \mu = \nu = 1.$$

§ 13.6

1. A (i), (ii) y (iii) les falta la identidad aditiva (cero): (iii) contiene a 1 y i, pero no a $1 + i$. Los otros cuatro conjuntos incluyen al cero, que carece de inverso multiplicativo.

2. Si B es el centroide de las masas a en A y c en C, B' es el centroide de las masas a en A' y c en C'. Los puntos que dividen a AA', BB', CC' en la razón $\mu : 1$ son los centroides de las masas 1 en A y μ en A', 1 en B y μ en B', 1 en C y μ en C'. De estos tres puntos, el central es el centroide de las masas a en el primero y c en el tercero.

Si empleamos la concisa notación del *cálculo baricéntrico* de Möbius, tenemos

$$B = aA + cC, \qquad B' = aA' + cC',$$
$$B + \mu B' = a(A + \mu A') + c(C + \mu C').$$

3. En la notación de Möbius, el centroide de las masas iguales en los cuatro vértices del cuadrángulo $ABCD$ es $A + B + C + D$. Los vértices del paralelogramo de Varignon son $A + B$, $B + C$, $C + D$, $D + A$, y su centro es $(A + B) + (C + D) = (B + C) + (D + A)$.

4. Al cortar el cuadrángulo a lo largo de cualquiera de sus diagonales, obtenemos dos triángulos cuyos centroides son los puntos medios de dos de los segmentos que en la figura 13.6*b* se han trazado con líneas punteadas.

5. Un cuadrángulo con simetría central, es decir, un paralelogramo.

§ 13.7

1. Tenemos en el interior del triángulo $A_1A_2A_3$ $+++$; al otro lado de A_2A_3, $-++$; más allá del vértice A_1, $+--$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}.$

3. $$\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT}) = \tfrac{1}{2}(\Sigma s_i \overrightarrow{OA_i} + \Sigma t_i \overrightarrow{OA_i})$$
$$= \Sigma \tfrac{1}{2}(s_i + t_i)\overrightarrow{OA_i}.$$

4. $\sigma\Sigma s_i\overrightarrow{OA_i} + \tau\Sigma t_i\overrightarrow{OA_i} = \Sigma(\sigma s_i + \tau t_i)\overrightarrow{OA_i}.$

5. Con esta formulación ya no es necesario suponer que $\Sigma s_i = \Sigma t_i$.

6. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \mu & 0 & 1 \\ 1 & \nu & 0 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu + 1.$$

Hay que dividir esto por $(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)$. Cuando L, M, N son colineales, se vuelve cero, de acuerdo con el teorema de Menelao.

7. Cuando la recta queda completamente fuera del triángulo, todos los signos se parecen (por ejemplo, todos son más). Cuando la recta penetra los lados A_2A_3 y A_3A_1, T_3 difiere de signo de T_1 y T_2.

§ 13.8

1. Cualquier punto común de a y b será punto común de a y α. Aplíquese 13.82 a b, c, y a.

2. Puesto que a es paralela a b, también es paralela al plano α que pasa por b, y podemos usar el resultado del ejercicio 1.

3. Nuestra demostración de 13.81 nos señala que las rectas que pasan por A en el plano $q'r'$ son paralelas a las rectas en el plano qr.

4. El centroide de las masas iguales en A_1, A_2, A_3, A_4 es el centroide de masas 1 en A_1, 1 en A_2, y 2 en el punto medio de A_3A_4.

5. (t_1, t_2, t_3, t_4) es el centroide de las masas t_i en A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

§ 13.9

1. En la notación de la figura 13.8*b*, si A', B', C', O' son los vértices opuestos a A, B, C, O, los seis lados del exágono cuyos lados se cruzan $AB'CA'BC'$ se pueden unir con la diagonal OO' de manera que se forme un ciclo de seis tetraedros, de los que los pares consecutivos se relacionan por reflexiones afines; por ejemplo, el tetraedro $OO'AB'$ y $OO'B'C$ se relacionan por la reflexión afín $OO'(AC)$, que conserva invariante el plano $OO'B'$ mientras intercambia A y C.

2. Una reflexión afín intercambia pares de puntos, P y P', de manera que las rectas de unión PP' son paralelas, y todos los segmentos PP' quedan bisecados por el espejo (que, en el caso tridimensional, es un plano).

3. Los puntos (a, b, c) y (a', b', c') se intercambian en la inversión central $(x, y, z) \to (a + a' - x, b + b' - y, c + c' - z)$.

4. Si el punto de la celosía (x, y, z) queda en un primer plano racional $Xx + Yy + Zz = \pm 1$, cualquier divisor común de x, y, z tendría que dividir a ± 1.

5. No. Por ejemplo, $(1, 1, 0)$ es un punto visible del "segundo" plano racional $x + y = 2$.

6. Cuando $x = 1$, tenemos que $2y + 3z = -1$. Dos soluciones obvias son $y = 1$, $z = -1$ y $y = -2$, $z = 1$. Cuando $x = -4$, tenemos $2y + 3z = 5$, con la solución obvia $y = z = 1$. De esta manera, obtenemos el triángulo $(1, 1, -1)(1, -2, 1)(-4, 1, 1)$.

7. El triángulo $(1, 1, -1)(1, -2, 1)(-4, 1, 1)$, cuyo determinante es -1, consiste en media celda unitaria de la celosía en el plano $6x + 10y + 15z = 1$. En consecuencia, la celosía general en este plano es

$$(1, 1, -1) + m(0, -3, 2) + n(-5, 0, 2) = (1 - 5n, 1 - 3m, -1 + 2m + 2n),$$

donde m y n recorren todos los enteros.

8. La ecuación dada implica $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 = 3z^2$. Puesto que $\sqrt{2}$ es irracional, cualquier solución de enteros requerirá que $xy = 0$ y que $x^2 + 2y^2 = 3z^2$, que es imposible; esto se demuestra por medio de la argumentación habitual que establece la irracionalidad de $\sqrt{3}$.

§ 14.1

1. Por 14.11, los cuatro puntos que se describen en 14.13 quedan unidos en pares por medio de seis rectas que, por 14.12, cortan a cualquier otra recta en no menos de tres puntos. También, cada una de las seis rectas corta a las demás en tres puntos.

2. Los m puntos, por los que pasan c rectas por punto, suman en apariencia un total de cm rectas; pero en esta estimación se ha contado cada una de las n rectas d veces, una vez en cada uno de los d puntos en ella. Por lo tanto, $cm = dn$. La configuración de Papo 9_3 puede considerarse como un ciclo de tres "triángulos de Graves" de seis maneras. (Coxeter, *Projective Geometry*, 1964, pág. 39.)

3. He aquí la tabla:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1
4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3
10	11	12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

La última columna señala que los puntos en p_0 son P_0, P_1, P_3, P_9, y que las rectas que pasan por P_0 son p_0, p_1, p_3, p_9. Las otras columnas tienen una interpretación análoga. Las columnas de la tabla

$$\begin{array}{cccccccc} P_0 & P_{10} & P_9 & P_6 & P_5 & P_2 & P_8 & P_3 \\ P_{10} & P_9 & P_6 & P_5 & P_2 & P_8 & P_3 & P_0 \\ P_6 & P_5 & P_2 & P_8 & P_3 & P_0 & P_{10} & P_9 \end{array}$$

indican las ocho rectas de la configuración 8_3 que se forma por el ciclo de ocho puntos $P_0P_{10}P_9P_6P_5P_2P_8P_3$. Los dos cuadrángulos mutuamente inscritos se obtienen al tomar puntos alternados de este ciclo.

4. Por cualquiera de los puntos pasan $p+1$ rectas, tales que cada una de ellas contiene p puntos más. Esto, en total, hace $1+(p+1)p$ puntos.

5. La geometría finita entera constituye un ejemplo para refutar el teorema de Sylvester. Toda recta que une dos de los puntos pertenece a la geometría y así contiene no solamente dos, sino a $p+1$ de los puntos.

§ 14.2

1. Sean los puntos 14.23 A, B, C, D, y prosigamos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} E &= AD \cdot BC = (0, 1, 1), & F &= BD \cdot CA = (1, 0, 1), \\ G &= AB \cdot EF = (-1, 1, 0), & H &= BC \cdot DG = (0, 2, 1), \\ I &= AD \cdot FH = (1, 2, 2), & J &= EF \cdot CI = (1, 2, 3). \end{aligned}$$

2. Los tres pares de lados opuestos son

$$x_2 \pm x_3 = 0, \qquad x_3 \pm x_1 = 0, \qquad x_1 \pm x_2 = 0.$$

3. Vemos que $P_5 = P_2P_3 \cdot P_4P_7$, $P_6 = P_1P_7 \cdot P_3P_4$. La colinealidad de $P_0P_5P_6$ implica que $x^2 + x + 1 = 0$.

4.
$$\begin{aligned} P_4 &= P_0P_5 \cdot P_1P_2 = (0, 1, 1), & P_8 &= P_1P_5 \cdot P_2P_0 = (1, 0, 1), \\ P_3 &= P_2P_5 \cdot P_0P_1 = (1, 1, 0), & P_6 &= P_1P_5 \cdot P_3P_4 = (1, 2, 1) \\ P_7 &= P_0P_5 \cdot P_3P_8 = (2, 1, 1), & P_9 &= P_0P_1 \cdot P_4P_8 = (1, 2, 0), \\ P_{10} &= P_1P_2 \cdot P_0P_6 = (0, 1, 2), & P_{11} &= P_2P_5 \cdot P_0P_6 = (1, 1, 2), \\ P_{12} &= P_0P_2 \cdot P_1P_7 = (2, 0, 1). \end{aligned}$$

Las rectas son:

$$\begin{array}{lll} p_0: x_3 = 0. & p_1: x_2 = 0. & p_2: x_1 + x_3 = 0. \\ p_3: x_2 + x_3 = 0. & p_4: x_1 + x_2 + x_3 = 0. & p_5: x_1 + x_2 - x_3 = 0. \\ p_6: -x_1 + x_2 + x_3 = 0. & p_7: x_1 + x_2 = 0. & p_8: x_1 - x_2 = 0. \\ p_9: x_2 - x_3 = 0. & p_{10}: x_1 - x_2 + x_3 = 0. & p_{11}: x_1 - x_2 = 0. \\ p_{12}: x_1 = 0. & & \end{array}$$

5. Se pueden tomar los puntos $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ como

$$(1,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1) \quad (1,1,0) \quad (0,1,1) \quad (1,1,1) \quad (1,0,1).$$

§ 14.3

1. Los puntos $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(p, 1, 1)$ quedan todos en la recta $x_2 = x_3$. Obtenemos $(0, q-1, 1-r)$ al substraer $(1, 1, r)$ de $(1, q, 1)$.

3. $S = P_{11}$, $T = P_5$, $U = V = F = P_{10}$. (El punto P no se emplea.)

§ 14.4

1. En la definición de un conjunto armónico intervienen de manera simétrica A y B; también sucede lo mismo con C y F.

2. Trácese un triángulo cualquiera RSP en el que los lados SP, PR, RS pasen respectivamente por A, B, C. Sea AR tal que corte a BS en Q Entonces PQ cortará a AB en el conjugado armónico que se pide.

3. Al tomar como triángulo de referencia RAB, sean C y S con las coordenadas correspondientes $(0, 1, \lambda)$ y $/(1, 1, \lambda)$. Entonces Q será $(1, 1, 0)$, P será $(1, 0, \lambda)$ y F será $(1, 1, 0) - (1, 0, \lambda) = (0, 1, -\lambda)$.

4. En cualquier recta de $GP(2, 3)$ hay exactamente cuatro puntos. El conjugado armónico de cualquiera de estos con respecto a otros dos cualesquiera es un cuarto punto de la recta y, por lo tanto, ¡solamente puede ser *el* cuarto punto de la recta!

5. Se determina el mismo conjunto armónico de manera proyectiva por el cuadrángulo, y de manera afín al dividir el segmento AA' interiormente en A_1 y exteriormente en A_2, en la misma razón.

§ 14.5

1. Si x y x' son rectas correspondientes de dos haces en perspectiva, su punto de intersección $x \cdot x'$ está continuamente en el eje o.

2. Una sección cualquiera de un conjunto armónico de rectas es un conjunto armónico de puntos, y un conjunto armónico de puntos, cualquiera que sea, siempre es proyectado por un conjunto armónico de rectas.

5. Siempre que una proyectividad en una recta g es el producto de dos perspectividades, la recta de unión de los dos centros corta a g en un punto invariante.

7. Si la proyectividad dada es una involución, que puede ser, por ejemplo, $(AA')(BB')$, se puede expresar como producto de las dos involuciones $(AB)(A'B')$ y $(AB')(BA')$. Si la proyectividad dada no es una involución, y A es cualquier punto que no sea invariante, se puede expresar la proyectividad como $AA'A'' \barwedge A'A''A'''$ (donde tal vez A''' coincida con A); se ve entonces que es producto de las dos involuciones

$$(AA'')(A'A') \qquad \text{y} \qquad (AA''')(A'A'').$$

8. (i) $(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}c_{21} = 0$.
(ii) $c_{11} + c_{22} = 0$.

§ 14.6

1. Sea AA' el par de puntos correspondientes en cuestión, colineales con el centro O. Sea AX tal que corte al eje en C. La colineación lleva entonces AC a $A'C$ mientras conserva invariante la recta OX. X' es, por lo tanto, el punto de intersección de $A'C$ y OX.

2. En la notación de la figura 14.3*a*, observemos la colineación en perspectiva con centro en O y eje DE que transforma P en P'. Al aplicar la construcción del ejercicio 1 a Q, obtenemos Q', y al aplicarla a R obtenemos R'.

3. Sean los dos puntos A y X, fuera de la recta o de puntos invariantes, tales que se transformen en A' y X'. Puesto que AA' y XX' son rectas invariantes, su punto común O es también invariante y, por lo tanto, está en o. En consecuencia, todas las rectas que unen pares de puntos correspondientes se cortan en el mismo punto O de o.

4. En la notación del ejercicio 3, O_1 es el conjugado armónico de O con respecto a

A y A'. Las homologías armónicas con centros en A y O tendrán entonces el efecto deseado, puesto que la primera conserva a A invariante, y la segunda lleva A a A'.

5. Sí; la proyectividad única $P_0P_1P_3 \barwedge P_1P_2P_4$ debe transformar el otro punto de P_0P_1 en el otro punto de P_1P_2. No es necesario dar perspectividades reales, pero en el caso en que se quieran determinar, una posibilidad es

$$P_0P_1P_3P_9 \underset{A}{\overset{P_{10}}{=}} P_0P_2P_6P_{12} \underset{A}{\overset{P_9}{=}} P_1P_2P_4P_{10}.$$

$P_i \to P_{3i}$ es una colineación proyectiva de período 3.

6. (i) Una homología con centro en $(0, 0, 1)$ y eje $x_3 = 0$.
(ii) Una elación con centro en $(c_1, c_2, 0)$ y eje $x_3 = 0$.

7. Considérese un cuadrilátero $APXA_1P_1X_1$, como el de la figura 14.6*b*, donde A es conjugado de A_2 y P lo es de P_1. Las polares a y p pasan respectivamente por A_1 y P_1. Por 14.64, los triángulos polares APX y apx están en perspectiva desde la recta A_1P_1. Por lo tanto, x pasa por X_1, y X es conjugado de X_1.

8. La condición para que los dos puntos $(0, 1, \pm 1)$ sean conjugados consiste en que $c_{22} - c_{33} = 0$; con respecto a los puntos $(\pm 1, 0, 1)$, $c_{33} - c_{11} = 0$. Estas dos condiciones implican que $c_{11} - c_{22} = 0$, que es la condición para que $(1, \pm 1, 0)$ sean conjugados.

9. La relación bilineal que se ha dado hace de $x_1 = 1$ la polar de $(1, 0, 0)$, y de $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ la polar de $(1, 1, 1)$. Cualquier punto autoconjugado (x) ha de cumplir $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Esto es imposible en el campo de los reales, pero en $GP(2, 3)$ sucede con respecto a los cuatro puntos $(1, \pm 1, \pm 1)$.

§ 14.7

2. Cuando $B = D$, tenemos $x = p$, $y = PQ = d$, y $x \cdot y = P$.
Cuando $A = D$, tenemos $y = q$, $x = d$, y $x \cdot y = Q$.

3. Véase Coxeter 2, págs. 88–89.

7. La indicación señala que la correlación $P_i \to p_i$ es proyectiva. Como es de período 2, es una polaridad. El triángulo $P_4P_{10}P_{12}$ en el que los lados son p_4, p_{10}, p_{12} es autopolar. Por último, puesto que los residuos 0, 7, 8, 11 son las mitades (mod 13) de 0, 1, 3, 9, los puntos P_0, P_7, P_8, P_{11} (y ningún otro) están en sus polares.

De esta manera, las cuatro rectas p_0, p_7, p_8, p_{11} son tangentes las seis rectas $p_1, p_2, p_3, p_5, p_6, p_9$, son secantes y las tres rectas p_4, p_{10}, p_{12} son no secantes. Las tres no secantes son los lados del triángulo autopolar $P_4P_{10}P_{12}$ que se empleó al describir la polaridad. Puesto que cada no secante es un lado común de dos triángulos autopolares, hay tres triángulos más que son autopolares:

$$P_4P_5P_9, \qquad P_{10}P_3P_6, \qquad P_{12}P_1P_2,$$

tales que cada uno tiene por lados una no secante y dos secantes, como sucedía con el triángulo EHH de Coxeter 2, pág. 82, figura 6.2*C*. Cada secante, que solamente contiene un par de puntos conjugados distintos, es un lado de solamente un triángulo autopolar. En consecuencia, los únicos triángulos autopolares son los cuatro que ya se mencionaron.

En otras geometrías, como $GP(2, 5)$, puede haber triángulos autopolares que forman las tres secantes o una secante y dos no secantes.

8. Los lados del exágono son

$$x_1 = 0, \qquad x_1 = x_2 + x_3, \qquad x_2 = 0,$$
$$x_1 + x_3 = 2x_2, \qquad x_1 + x_2 = \tfrac{7}{5}x_3, \qquad \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 = x_3.$$

Los lados opuestos se cortan en los tres puntos

$$(0, 1, 2), \qquad (6, 1, 5), \qquad (2, 0, 1),$$

que quedan en la recta $x_1 + 4x_2 = 2x_3$.

§ 14.8

1. Dos transversales distintas desde R determinarán un plano que contenga a a y b.

2. Sean a, b, c tres generadores que se cruzan. Tomemos arbitrariamente un plano que pase por a y corte a c en R. Este plano también contiene al generador $Ra \cdot Rb$.

3. Las cuatro rectas A_iB_i se intersectan mutuamente y, puesto que no son coplanares todas, tienen que ser concurrentes.

4. Al llamar a los centros de perspectiva C_1, C_2, C_3, C_4, vemos que $C_1C_2C_3C_4$ está en perspectiva con $B_2B_3B_4B_1$ desde A_1, con $B_1B_4B_3B_2$ desde A_2, con $B_4B_1B_2B_3$ desde A_3, con $B_3B_2B_1B_4$ desde A_4, con $A_2A_3A_4A_1$ desde B_1 y así sucesivamente (se intercambian con consistencia las A y B).

5. Cada punto de $PG(3, p)$ está en p^2+p+1 rectas, y cada una de éstas contiene p puntos más. En consecuencia, hay en total $1+p(p^2+p+1)=p^3+p^2+p+1$ puntos, y, por dualidad, el mismo número de planos. Cada uno de los p^3+p^2+p+1 planos contiene p^2+p+1 rectas, pero cada recta está en $p+1$ planos; por lo tanto, el número total de rectas es

$$\frac{(p^3+p^2+p+1)(p^2+p+1)}{p+1}=(p^2+1)(p^2+p+1).$$

Von Staudt obtuvo esta expresión en 1856. (Véase la nota al pie de la página 274. Véase también P. H. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie*, vol. 1, pág. 5, Leipzig, 1902.) Cuando $p=3$, el número es 130.

§ 14.9

1. Debido a que la geometría euclidiana no admite rectas autoperpendiculares.

3. Este es el primer teorema de Clifford en su forma original, que se puede derivar de la forma que damos en nuestro texto al efectuar la inversión en un círculo de centro S.

§ 15.1

1. Por 15.11, existe en el rayo AB, un punto B' tal que $CD \equiv AB'$. Tenemos, de esta manera, $AB \equiv CD$ y $CD \equiv AB'$. Por 15.52, $AB \equiv AB'$. Pero $AB \equiv AB$, y B y B' están en el rayo AB. En consecuencia, por 15.11, $B'=B$.

2. Cualquier triángulo tiene una circunferencia inscrita, y las longitudes de las tangentes a ella desde A, B, C son $s-a$, $s-b$, $s-v$, como vimos en el ejercicio 5 de § 1.3. Tenemos que abandonar todas las fórmulas en las que intervienen funciones trigonométricas, pero el ejercicio 1 conserva su validez. Incluso se puede tener un triángulo de ángulos agudos que no posea circunferencia circunscrita.

§ 15.2

1. Véade Coxeter 3, pág. 189.

2. Si dos rectas tienen una perpendicular común m, son simétricas por reflexión en m. Cualquier punto de intersección a un lado de m tendrá una imagen simétrica al lado opuesto, lo que contradice 12.2511.

§ 15.3

1. El plano que pasa por l y es perpendicular al plano ABC corta al segundo en una recta m que puede cortar, ser paralela o ultraparalela a l. En el primer caso, los planos Al, Bl, Cl pasan por el punto de intersección. En el segundo caso, pasan por el extremo común de l y m. En el tercer caso, por 15.26, l y m tienen la perpendicular común EF, y los planos Al, Bl, Cl son perpendiculares al plano que pasa por EF, la perpendicular a l.

2. Por 15.23, p y r son paralelas. Por lo tanto, el producto de las reflexiones en ellas es un desplazamiento paralelo. La primera reflexión conserva a J invariante: la segunda, lo transforma en L.

§15.4

1. Una rotación tetragonal alrededor del vértice frontal de la izquierda, una rotación trigonal alrededor del centro de la cara d, el semigiro alrededor de la recta que une los puntos medios de dos aristas opuestas y el semigiro alrededor de la recta que une dos vértices opuestos: $(ab)(cd) = (abcd)$. Sin contar la identidad, tenemos $6 + 8 + 6 + 3 = 23$.

2. El grupo cíclico C_p tiene dos "conjuntos de polos", cada uno compuesto por solamente un polo. Al añadir un polo no efectivo $p$egonal en el que $p = 1$, podemos incluir este grupo como una solución "trivial" de 15.42.

§ 15.5

1. (a) C_2.
   (b) $D_{2n} D_n$ (n par), $D_n \times \{1\}$ (n impar).
2. $C_6 C_3$.

§ 15.6

(a) $D_2 \times \{I\}$. (b) $D_3 \times \{I\}$. (c) $A_4 \times \{I\}$.

§ 15.7

1. Los vértices de $\{p, 2\}$ consisten en p puntos a espacios iguales a lo largo de un círculo mayor (que puede ser el ecuador), y sus aristas, en los p arcos que unen vértices vecinos. Los vértices de $\{2, p\}$ consisten en dos puntos antípodas (que pueden ser los polos norte y sur), y sus aristas, en semicírculos mayores a espacios iguales (los meridianos).

2. El tetraedro posee seis planos de simetría, situados de manera que cada uno va de una arista al punto medio de la arista opuesta. El cubo y el octaedro tienen nueve, uno paralelo a cada par de caras opuestas del cubo y otro que une cada par de aristas opuestas. El dodecaedro y el icosaedro tienen quince, que unen cada par de aristas opuestas.

3. $4\pi \Big/ \left(\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{2} - \pi\right)$. Dos aristas correspondientes de los $\{p, q\}$ y $\{q, p\}$ inflados se bisecan perpendicularmente la una a la otra en el ángulo recto que comparten cuatro ejemplares de la región fundamental. Según esto, es natural que el orden del grupo resulte ser $4A$.

§ 15.8

1. Si el enésimo radio es k_n, tenemos $k_{n-1}k_{n+1} = k_n^2$.
3. Por medio de la abreviatura

$$k^2 = \cos^2 \frac{\pi}{p_1} - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{p_2} = \cos^2 \frac{\pi}{p_2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{p_1}$$

(cf. 10.42), encontramos que el radio y la distancia son

$$\frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{\pi}{p_1} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{k} \cos \frac{\pi}{p_2}.$$

§ 16.1

Si AB y AM son respectivamente perpendicular y paralela a r, como se tiene en la figura 16.3a, tendremos un ángulo agudo en A y otro recto en B, y, sin embargo, los rayos no se cortan.

§ 16.2

1. En el modelo proyectivo, los puntos y rectas quedan representados por puntos y rectas. Por lo tanto, las isometrías se representan por colineaciones. Puesto que las paralelas se transforman en paralelas, estas colineaciones han de transformar a ω en sí misma. Puesto que en una reflexión todo punto del espejo permanece invariante, la colineación correspondiente ha de ser una elación o una homología (§ 14.6). Puesto que su período es 2, tiene que ser una homología armónica. Dado que preserva a ω, su centro es el polo del espejo (*por ejemplo*, el punto donde se cortan las tangentes en los extremos de la cuerda).

Cuando se representa el espejo por medio de uno de los círculos verticales, la reflexión aparece como inversión en una esfera que pasa por la circunferencia, ortogonal a la esfera de Klein.

2. Un haz de circunferencias concéntricas puede ser descrito como las trayectorias ortogonales de un haz de rectas. En el modelo conforme, las rectas aparecen como circunferencias que pasan por un par de puntos inversos (con respecto a Ω). Por lo tanto, las circunferencias pertenecen al haz ortogonal de círculos coaxiales (donde también está Ω y cuyos puntos límite son los dos puntos inversos).

§ 16.3

1. En el modelo proyectivo, la perpendicular común a dos ultraparalelas une sus polos con respecto a ω, y la paralela común a los dos rayos une sus extremos.

2. Tenemos, con respecto a cualquier punto G en A/B, $\angle MAG > \angle MBA$. Pero $\angle DAM = \angle EBM$. Por lo tanto, $\angle DAG > \angle EBA = \angle BAD$.

3. Al considerar los triángulos rectángulos y congruentes, vemos que $AD = CF = BE$. Puesto que el ángulo en C del triángulo ABC es igual a $\angle CAD + \angle EBC$, la suma de los tres ángulos del triángulo es

$$\angle BAD + \angle EBA,$$

es decir, la suma de dos ángulos agudos (iguales).

4. Aquí se ha generalizado el teorema de la concurrencia de las rectas que son las alturas de un triángulo (que surge como corolario del problema de Fagnano). En la demostración más sencilla, interviene el modelo proyectivo y se hace referencia al teorema de Chasles (14.64): *dos triángulos polares cualesquiera son triángulos en perspectiva.*

5. Será una traslación o una reflexión en deslizamiento, según estén o no estén los triángulos al mismo lado de su lado común.

6. Trácense las tangentes a una circunferencia del radio que se indica en los extremos de los tres radios que forman ángulos de 120° entre sí. Estas tangentes forman un triángulo triplemente asintótico.

7. Trácese la ceviana que pasa por el punto dado y compárese con la figura 16.3a.

§ 16.5

3. Considérese la manera en la que las traslaciones sucesivas a lo largo de CA, AB, BC afectan el lado CA del triángulo ABC. La primera traslación lleva a este segmento sobre sí mismo hasta una posición AX. La segunda (a lo largo de AB) lo lleva a BY, donde $\angle ABY = A$. La tercera (a lo largo de BC) lleva a éste a CZ, donde $\angle ZCB = \pi - \angle CBY = \pi - (A + B)$, de manera que $\angle ZCA = \pi - A - B - C$. (Este resultado se puede extender de manera evidente de los triángulos a los polígonos mayores.)

4. Considérese la manera en la que los semigiros sucesivos alrededor de los puntos medios de DA, AB, BC, CD afectan el lado DA del cuadrángulo $ABCD$. El primer semigiro invierte este lado, por lo que obtenemos AD. El segundo (alrededor del punto medio de AB) lo lleva a BX, donde $\angle ABX = A$. El tercero (alrededor del punto medio de BC) lo lleva a CY, donde $\angle BCY = A + B$. El cuarto (alrededor del punto medio de CD) lo lleva a DZ, donde $\angle CDZ = A + B + C$, de manera que $\angle ZDA = 2\pi - A - B - C - D$.

5. Encontramos en un vértice cualquiera un ejemplar de cada ángulo del polígono en su orden natural. El ciclo se puede repetir cualquier número de veces (si el polígono tiene un área suficientemente grande).

§ 16.6

1. Compárese con § 16.3, ejercicio 3. Las mediatrices de los lados del triángulo pueden cortarse, ser paralelas o ultraparalelas.

2. Las bisectrices externas de los dos ángulos del triángulo pueden cortarse, ser paralelas o ultraparalelas.

3. El horociclo es simétrico por reflexión en cualquier diámetro. El diámetro r refleja a J en L.

4. Dos. Sus centros son los dos extremos de las mediatrices del segmento que une a ambos puntos.

5. Recordemos que una curva equidistante tiene dos ramas.

7. Aplíquese el resultado de § 16.3, ejercicio 2.

§ 16.7

1. Una curva equidistante.

2. La propiedad aditiva, que se describió en § 6.6, ejercicio 5, nos señala que la distancia hiperbólica es *proporcional* a la distancia inversiva. El factor de proporcionalidad depende de una convención que se hace, como sucedía en el caso del valor $\mu = 1$ que nos condujo a 16.53.

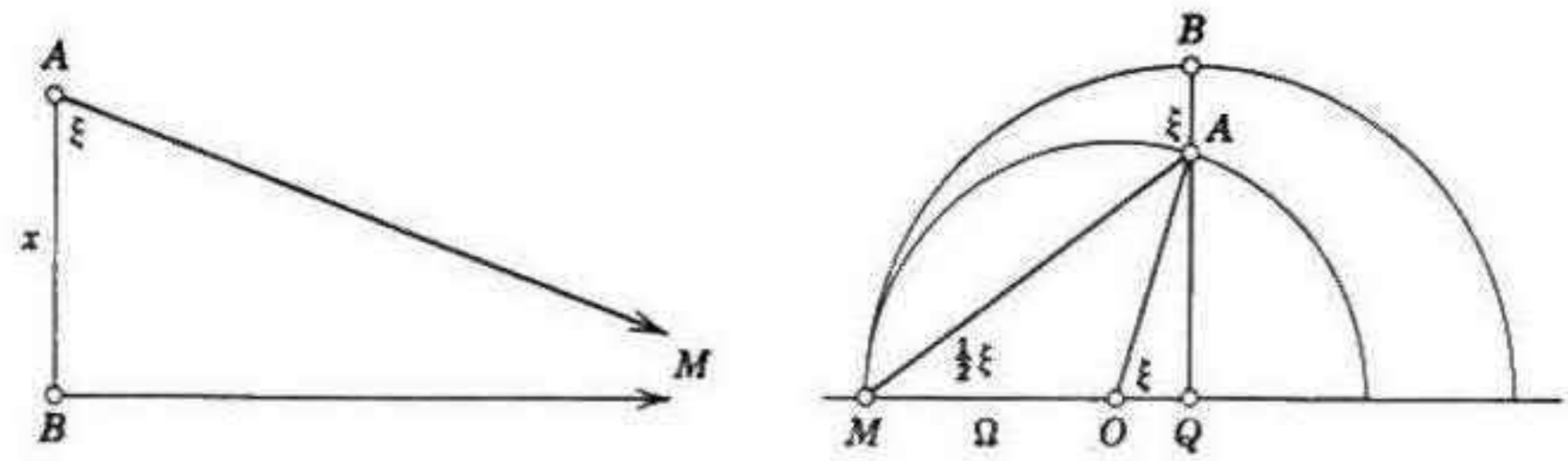


Figura 16.7a

3. La demostración siguiente de la famosa fórmula de Lobachevsky se debe a Paul Szász [véase Coxeter, *Annali di Matematica, pura ed applicata*, (4), 71 (1966), pág. 82]. En la figura 16.7*a*, el segmento AB de longitud x se representa por la parte AB de la recta perpendicular a Ω en Q. La circunferencia que pasa por B con centro en Q representa a la recta que pasa por B y es perpendicular a AB, y la circunferencia tangente que pasa por A con centro en O (que también está en Ω) representa una recta paralela con el mismo extremo M. El ángulo de paralelismo

$$\xi = \Pi(x) = \angle BAM$$

aparece como el ángulo con vértice en A en el "triángulo curvilíneo" BAM, y de nuevo como $\angle QOA$. Puesto que x es la distancia inversiva entre las circunferencias concéntricas de radios QB y QA (la segunda no está en el dibujo), tenemos

$$e^x = \frac{QB}{QA} = \frac{QM}{QA} = \cot \tfrac{1}{2}\xi,$$

de donde

$$\xi = 2 \arctan e^{-x}.$$

Si algún lector se siente a disgusto al emplear la trigonometría euclidiana para obtener un resultado hiperbólico, encontrará en la página 422 una demostración puramente hiperbólica.

§ 16.8

Por todas las circunferencias que pasan por un punto (el punto de contacto).

§ 17.1

Los vectores **a** y **c** han de ser o bien paralelos entre sí o bien perpendiculares a **b**.

2. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{acd}]\mathbf{b} - [\mathbf{bcd}]\mathbf{a} = [\mathbf{abd}]\mathbf{c} - [\mathbf{abc}]\mathbf{d}$

3. $$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

§ 17.2

La velocidad va en la dirección de la tangente. La aceleración se dirige hacia el centro a lo largo del radio.

§ 17.3

1. $x = u - \operatorname{sen} u$, $y = -1 - \cos u$. Se trata, por supuesto, de una cicloide congruente.
2. $x = \cos u + \operatorname{sen} u$, $y = \operatorname{sen} u - u \cos u$. Esta es una especie (que, por supuesto, no es equiangular) de espiral.
3. Debido a que $r = s \cos \varphi$.

§ 17.4

1. En el origen.
4. (a) $s = 4 \operatorname{sen} \psi$.
   (b) $s = \frac{1}{2}(\csc \psi \cot \psi + \log \tan \frac{1}{2} \psi)$.
5. Puesto que $u = \log (\cosh u + \operatorname{senh} u) = \log (\sec \psi + \tan \psi)$,

$$\int \sec \psi \, d\psi = \log (\sec \psi + \tan \psi) + C.$$

§ 17.5

$\rho = a \operatorname{senh} u$. En la cúspide es cero: la curvatura es infinita.

§ 17.6

1. Al diferenciar $\mathbf{r}^2 = 1$ dos veces, obtenemos $\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} = 0$ y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \rho = 0$, de donde

$$(\mathbf{r} + \rho\mathbf{p}) \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{r} + \rho\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = 0.$$

2. Debido a que $\mathbf{t} \cdot \dfrac{d}{ds}(\mathbf{r} + \rho\mathbf{p}) = 0$.

§ 17.7

2. La helicoide $\dfrac{y}{x} = \tan \dfrac{z}{c}$.
3. $\dfrac{c}{a} = 1$.

§ 17.8

2. $\kappa = \tau = \dfrac{1}{3(1 + u^2)^2}$.

§ 17.9

1. $x = a\mu^u \cos u$, $y = a\mu^u \operatorname{sen} u$, $z = c\mu^u$.
4. El ángulo es $(\sqrt{1 + c^2/a^2} \log \mu)$.
5. El cilindro cuya base es una espiral equiangular.

§ 18.1

$$J[\mathbf{r}^1\mathbf{r}^2\mathbf{r}^3] = J\mathbf{r}^1 \cdot (\mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^3) = (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \cdot (\mathbf{r}^2 \times \mathbf{r}^3)$$
$$= (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}^2)(\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}^3) - (\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}^2)(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}^3) = 1.$$

§ 18.2

2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{11}u^1v^1 + g_{22}u^2v^2 + g_{33}u^3v^3$
$+ g_{12}(u^1v^2 + u^2v^1) + g_{23}(u^2v^3 + u^3v^2) + g_{31}(u^3v^1 + u^1v^3).$

5. $\det g^{\alpha\beta} = G^{-1}$.

§ 18.3

2. $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 1, \quad g^{\alpha\beta} = 4\delta^{\alpha\beta} - 1,$ donde $\delta_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$.

§ 18.5

3. $\Sigma x_\alpha^2 = 1, \quad \Sigma y_\alpha z_\alpha = 0.$
4. $g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22} = (u^1)^2, \quad g_{\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta).$
5. $g_{11} = (u^3)^2, \quad g_{22} = (u^3 \sin u^1)^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \ (\alpha \neq \beta).$
6. $g_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^2}{(A - u^\alpha)(A - u^\beta)} + \dfrac{y^2}{(B - u^\alpha)(B - u^\beta)} + \dfrac{z^2}{(C - u^\alpha)(C - u^\beta)}\right)$

§ 18.6

1. $\Sigma\Sigma\epsilon^{\alpha\beta\gamma}y_\beta z_\gamma.$

§ 19.1

2. $\Sigma \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}_i = \Sigma\Sigma g^{ij}\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = \sqrt{g}\,\Sigma\Sigma g^{ij}\epsilon_{ij}\mathbf{n} = \mathbf{0}.$

El triángulo que forman $\mathbf{r}^1$ y $\mathbf{r}_1$ tiene la misma área, sin considerar el signo, que el triángulo que forman $\mathbf{r}^2$ y $\mathbf{r}_2$.

3. $\mathbf{r}^1 = \mathbf{r}_1/(1 + z_1^2), \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_2/(u^1)^2.$
4. $g_{11} = g^{11} = 1, \quad g_{22} = \sin^2 u^1,$
$g^{22} = \csc^2 u^1, \quad g_{ij} = g^{ij} = 0 \ (i \neq j).$

§ 19.2

2. $\tan\phi = \sqrt{g}/g_{12}.$
4. $\cos\phi = \cos\theta\cos(\phi - \theta) - \sin\theta\sin(\phi - \theta)$

$$= \frac{a_1a_2}{g_1g_2} - \frac{a^2a^1}{g^2g^1}$$
$$= \frac{a_1}{g_1g_2}(g_{12}a^1 + g_{22}a^2) - \frac{a^2}{g^2g^1}(g^{11}a_1 + g^{12}a_2)$$
$$= \frac{g_{12}}{g_1g_2}(a_1a^1 + a^2a_2) + \left(\frac{g_2}{g_1} - \frac{g^1}{g^2}\right)a_1a^2$$
$$= \frac{g_{12}}{g_1g_2}$$

5. $g_1a^1 = g_2a^2.$
6. La red consiste en las curvas paramétricas, que son ortogonales cuando $g^{12} = 0$. La identidad $g^{11}g_{11} - g^{22}g_{22} = 0$ concuerda con el hecho de que las bisectrices internas y externas de un ángulo sean perpendiculares.
7. $S = \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin u^1\, du^1\, du^2.$

§ 19.3

1. $\mathbf{r}^1 \times \mathbf{r}^2 = \mathbf{n}/\sqrt{g}$.
2. $b_{11} = -1, \quad b_{22} = -\operatorname{sen}^2 u^1, \quad b_{ij} = 0 \ (i \neq j)$.

§ 19.4

1. $H = 0$.
2. $H = \{z_1(1 + z_1^2) + u^1 z_{11}\}/2u^1(1 + z_1^2)^{\frac{3}{2}}$.
3. $u^1 = \frac{1}{2}\pi, \quad u^1 = \frac{3}{2}\pi$.
5. En un umbílico.

§ 19.5

3. $u^1 \pm u^2 = k$.
4. $u^1 = \pm c \operatorname{senh}(u^2 - k)$.

§ 19.6

1. En un umbílico, 19.52 es una identidad.
2. La expresión es un cuadrado perfecto.
3. En un umbílico, $K = \kappa^2 > 0$.
4. Las condiciones $b_{11} : b_{12} : b_{22} = g_{11} : g_{12} : g_{22}$ se convierten en
$-\operatorname{sen}^2 u^2 : \operatorname{sen} u^1 \cos u^1 \operatorname{sen} u^2 \cos u^2 : -\operatorname{sen}^2 u^1$
$= 2 \operatorname{sen}^2 u^1 + \cos^2 u^1 \operatorname{sen}^2 u^2 : \operatorname{sen} u^1 \cos u^1 \operatorname{sen} u^2 \cos u^2 : 2 \operatorname{sen}^2 u^2 + \operatorname{sen}^2 u^1 \cos^2 u^2$.
5. No. Cuando hay una curva de umbílicos, esta curva constituye por sí sola una línea de curvatura, y las únicas líneas de curvatura que la cruzan lo hacen en ángulos rectos.

§ 19.7

1. $b_{33} = 0$.
3. Las líneas de curvatura son las intersecciones del elipsoide con las otras cuádricas del sistema.

§ 19.8

1. $\theta = \frac{1}{4}\pi, \quad \frac{3}{4}\pi$.

§ 20.1

1. $\sqrt{g}\, K = \dfrac{\partial}{\partial u^1}\left(\dfrac{\sqrt{g}}{g_{22}}\,\Gamma^1_{22}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u^2}\left(\dfrac{\sqrt{g}}{g_{22}}\,\Gamma^1_{12}\right)$.
$\Gamma_{ij,i} = \frac{1}{2}(g_{ii})_j, \quad \Gamma^k_{ij} = \Gamma_{ij,k}/g_{kk}$.
2. $\Gamma_{ii,i} = \frac{1}{2}(g_{ii})_i, \ \Gamma_{ii,j} = -\frac{1}{2}(g_{ii})_j, \quad \Gamma_{ij,i} = \frac{1}{2}(g_{ii})_j, \quad \Gamma^k_{ij} = \Gamma_{ij,k}/g_{kk}$.
3. $\Gamma_{12,2} = u^1, \quad \Gamma_{22,1} = -u^1, \quad \Gamma^2_{12} = 1/u^1, \quad \Gamma^1_{22} = -u^1$; todas las demás son 0.
5. Por las ecuaciones que anteceden a 19.33,

$$\sqrt{g}\,\mathbf{r}^i = \Sigma \epsilon^{hi} \mathbf{n} \times \mathbf{r}_h.$$

En consecuencia,
$$\begin{aligned}\sqrt{g}\,\Sigma\Gamma^i_{ij} &= \sqrt{g}\,\Sigma \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{ij} = \Sigma\Sigma \epsilon^{hi}[\mathbf{n}\mathbf{r}_h\mathbf{r}_{ij}] \\ &= \mathbf{n} \cdot \Sigma\Sigma \epsilon^{hi}\mathbf{r}_h \times \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_j \\ &= \mathbf{n} \cdot (\sqrt{g}\,\mathbf{n})_j = (\sqrt{g})_j.\end{aligned}$$

6. $K = 1$.

§ 20.2

3. No; las tangentes no forman un ángulo constante con el eje de las z.

§ 20.3

2. $(\sqrt{g})_{11} = -\sqrt{g}$.

§ 20.4

2. Otra circunferencia de radio b y una de radio $a - b$.

§ 20.5

(i) 2π sen r. (ii) 2π senh r.

§ 20.7

$\cosh^2 u^1 + (u^2 + c)^2 = k^2$.

§ 21.1

Sí; forma un mapa de tres exágonos en el toro.

§ 21.2

2. Sea $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ un hexágono regular concéntrico con el disco e interior a él. Unánse P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6, pasando por la cota del disco y no por el centro.
3. Constituyen la gráfica de Thomsen.
4. Sí, cuando $q > 0$. Ambas son no orientables con $\chi = 2 - 2p - q$.

§ 21.3

1. Se puede trazar $\{2, 1\}$ como un semicírculo mayor que une 2 vértices antípodas. Se puede trazar $\{1, 2\}$ como un círculo mayor en el que se señala un punto como vértice.

2. $\{3, 5\}/2$ tiene 6 vértices, donde cada uno se encuentra unido con todos los demás. Los vértices y las aristas de $\{5, 3\}/2$ constituyen la gráfica de Petersen [Ball 1, pág. 225].

5. $\{4, 4\}_{1,1}$ tiene 2 caras cuadrangulares, 4 aristas y 2 vértices; cada vértice pertenece a las 4 aristas.

$\{4, 4\}_{2,0}$ tiene 4 caras cuadrangulares, 8 aristas y 4 vértices; cada vértice pertenece a las 4 caras.

$\{3, 6\}_{1,1}$ tiene 6 caras triangulares, 8 aristas y 3 vértices; cada vértice pertenece a las 6 caras.

$\{6, 3\}_{1,1}$ tiene 3 caras exagonales, 9 aristas y 6 vértices, cada vértice pertenece a las 3 caras.

$\{6, 3\}_{2,0}$ tiene 4 caras exagonales, 12 aristas y 8 vértices. Todos son mapas de género 1.

7. $V = 3, 4, 4, 5, 6, 7$.

9. Los enteros positivos p y q no son tan arbitrarios. Si uno de ellos vale 1, el otro solamente puede valer 2. Por ejemplo, $q = 1$ implica $A = pr$, $C = 2r$, de donde

$$A + C = (p + 2)r = (2p + 2q - pq)r = \chi \leqslant 2, \; A = C = 1, \; p = 2.$$

§ 21.4

1. El cubo de una sola manera; el dodecaedro de dos maneras.

§ 21.6

$$\begin{array}{lllllllllllll} \chi = 2, & 1, & 0, & -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & -8, & -9; \\ [N] = 4, & 6, & 7, & 7, & 8, & 9, & 9, & 10, & 10, & 10, & 11, & 11. \end{array}$$

§ 22.1

1. $rN_1 = A'N_0$, donde, por el ejercicio 1 al final de § 10.3,

$$\frac{1}{A'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2}.$$

De la misma manera, $pN_2 = AN_3$.

2. Esto se deriva del cubo análogo del espacio $x_4 = 0$ al trasladarlo a lo largo de una distancia igual a 1 por la cuarta dimensión.

3. El cubo $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, -1)$ se traslada por la cuarta dimensión a lo largo de una distancia de 2.

4. $(1, 1, 1, 1)$.

§ 22.2

1. Puesto que $\cos\frac{\pi}{q} < \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} > \frac{\pi}{2}$. De la misma manera, $\cos\frac{\pi}{q} < \operatorname{sen}\frac{\pi}{r}$.

2. $\{3, 3, 4\}$.

§ 22.3

1. $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 1)$.
2. $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$, permutados.
3. $(\tau, 1, \tau^{-1}, 0) = \tau^{-2}(\tau, 0, \tau, 0) + \tau^{-1}(\tau, \tau, 0, 0)$.
4. Los puntos adicionales corresponden a los centros de los 24 icosaedros.

§ 22.4

1. No.
2. (a) No. (b) Sí.
3. Sí. Los doce pueden tener sus centros en los vértices de un icosaedro regular.
4. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}.$$

§ 22.5

No.

Indice

"A"

Abbott, E. A., 144
Abscisa, 139
Aceleración, 362
Adición, 166, 168
Afinidad, 5, 236-422, 260, 488
Ajedrez, tablero de, 77, 459
Alhambra, 86
Alias y cartada, 141-142
Altura de un triángulo, la, 40, 302
Amplitud de un número complejo, la, 171
Angulo, 112, 124, 216
de paralelismo, 331-333, 343, 421-422, 500
véase también Angulo diedral
Angulo diedral, 61, 181, 188, 447, 462
Angulo recto, 26, 302
Anillo de círculos, 116
Antihomografía, 177
Antípodas, 121-122
Antiprisma, 180, 183
Apolonio de Perga, 117, 120, 132, 137-138, 146, 477
Archibald, R. C., 196
Area, 30, 80, 123-124, 152, 237, 256, 321
Arena de la playa, la, 452
Argand J. R., 165, 168
Argumento, *véase* Amplitud
Aristófanes, 225
Arquímides de Siracusa, 32, 137-138, 195 225, 235, 250, 327
Arte, 84, 89, 265, 299
Artin, E., 82, 208, 227, 228, 234
Asa que se agrega a una superficie, 426
Asíntota, 148
Astroide, 145
Atomos de un cristal, los, 373, 456
Automorfismo, 234, 432
Axiomas, 26, 209, 210, 217, 220, 226, 328
véase también Congruencia, Continuidad, Incidencia, Orden.

"B"

Bachmann, F., 66, 67, 69-73, 123, 265, 298, 335
Baker, H. F., 145, 280, 300, 475
Balas de cañón, 456-459
Ball, W. W. R., 53, 93, 171, 180, 181, 191, 199, 273, 435, 437, 439, 442, 444, 456, 459, 501
Bankoff, L., 31, 47
Barlow, W., 88, 93, 318, 456
Bases duales de una espacio vectorial, 369
Beecroft, P., 5, 37, 469
Bell, E. T., 123, 137, 155, 183, 213, 404
Bell, R. J. T., 161-163
Beltrami, E., 329, 413, 421
Bennett, G. T., 53
Bernal, J. D., 457-460
Bernoulli, J., 144, 149, 155
Beso Preciso, El, 38
Biblia, la, 33, 68, 444
Bimedianas de un cuadrángulo, las, 233
Binet, J. P. M., 199
Binormal, 362
Birkhoff, G., 57, 171, 175, 234, 273, 438, 360
Bisección de un segmento, la, 230
Blake, W., 55
Blaschke, W., 111, 161, 225, 251, 428
Blum, R., 118, 144
Bôcher, M., 112
Bol, G., 428
Bolsa de Fortunato, la, 54, 372, 433
Bolyai, J., 207, 220, 301-306
Bolzano, N., 324

BONOLA, R., 220, 334, 337, 344
BORSUK, K., 330
Botánica, 200-203
Botella de Klein, la, 430-31, 435-36, 441, 442
BOTTEMA, 47, 468
BRABANT, H., 31
BRADWARDINE, T., 63
BRAHANA, H. R. 432
BRAIKENRIDGE, W., 291
BREDWARDIN, *véase* Bradwardine
BREWSTER, Sir David, 61, 92, 149, 318
BRIANCHON, C. J., 292-293
BRICARD, R., 47
BROOKS, R. L., 436
BRÜCKNER, M., 185
BUCHANAN, R., 33
BUERGER, M. J., 260-263, 373-376
BURCKHARDT, J. J., 316-318
BURNSIDE, W., 92, 321, 342
BUSEMANN, H., 222
BUSEY, W. H., 274
BUTLER, S. (el joven), 448
BUTLER, S. (el viejo), 238

"C"

Caballeros, 81
Cálculo 43, 150-156, 352-366, 416-421
Campo, 266
CANTOR, G., 168, 229
Caracol, 316
Caracol, curva de, 119
Característica de Euler-Poincaré, 418
Característica, *véase* Euler-Poincaré
CARAVELLI, V., 433
Cardioide, 144, 149
CARROLL, Lewis, 26, 51, 65, 72, 77, 95, 167, 183, 433, 436
CARSLAW, H. S., 305, 306, 327-335, 421
Casco del Nautilus, el, 133
CASEY, J., 39, 102, 103, 121
Catenaria, 358-361
CAYLEY, A., 267
Celda, 219
véase también Unidad
Celda unitaria de una celosía, 79, 243, 262
Celosía crítica de una esfera, 376-378
Celosía cúbica con centro en una cara, 374-379
Celosía cúbica con centro en un cuerpo, 375
Celosía recíproca, 373-376
Centro, de una cónica, el 147
de curva, 355
de semejanza, 98-99, 130
Centroide, 32, 139, 249-253
Centro radical, 115
CEVA, G., 225, 255
Ceviana, 339
CHASLES, M., 125, 286, 499
CHEPMELL, C. H., 47
CHILTON, B. L., 449-451
CHRISTOFFEL, E. B., 411-420
CHURCH, A. H., 200, 203
CIAMBERLINI, C., 469
Cicloide, 76, 57, 359
Ciclotomía, 51-53, 171-173, 490
Cilindro, 159-160
Cinemática, 361
Cinta de Möbius, 428, 440
Círculo, 37, 162-163, 300, 340
de Apolonio, 117-118
de curvatura, 354
de similitud, 119
Círculo mayor, 122
Círculos coaxiales, 113-118, 144
Círculos ortogonales, 107-108, 112, 143
Circunferencia circunscrita, 35, 300
Circunferencia inscrita, 35
Circunferencias ex-inscritas, 35, 144
Circunferencias tritangentes de un triángulo, 35
Circunradio, 186-188
CLEMENS, S. L., *véase* Twain
CLIFFORD, W. K., 100, 300
COE, C. J., 350
Coeficientes binomiales, 199, 216, 219
Cofia cruzada, 430-431 (Cross-Cap)
COHN VOSSEN, S., 80, 82, 112, 131, 179, 184, 270, 399, 406, 409, 414, 428, 430, 449, 453-456
Cojinetes de balines, 458
Colatitud, 386
COLEMAN, A. J., 397
Colineación, 283
véase también Afín, Equiafín, Perspectiva, Proyectiva
Colineación afín *véase* Afinidad
Colineación en perspectiva, 284
Colineación equiafín, *véase* Equiafinidad
Colineación proyectiva, 284
Colmena, 90, 454
Colmena estadística, 459-460
Compás, 107
Componentes contravariantes, 370
Componentes covariantes, 370
Conceptos primitivos, 26, 208-209
Concha, 155
Concoespiral, 203, 366-367
Conejos, 196
Configuración, 269, 273-276
Congruencia, 28, 232, 301-306

Cónica degenerada, 292
Cónicas centrales, 142-143, 147
Conjugado armónico, 249-279
Conjunto cuadrangular, 277
Cono, 159-160
Consistencia, 265, 327-330
Continuidad, 27, 132, 220
Convención de la suma (donde se conserva), 370
Convexidad, 80, 179, 216-219
Coordenadas afines, 326, 259, 381
Coordenadas baricéntricas, 251-257, 271, 492
Base de una celosía o de un espacio vectorial, 262, 437, 369
Coordenadas cartesianas, 70, 138-140, 189-190
Coordenadas cartesianas oblicuas, 381
Coordenadas cilíndricas, 363, 378-380
Coordenadas de área, 253-256, 259, 335-339, 389
Coordenadas generales, 379-382
Coordenadas homogéneas, 252, 271
Coordenadas polares, 64
Coordenadas polares esféricas, 381
Coordenadas polares geodésicas, 415-421
Coordenadas proyectivas, 271
Coordenadas tangenciales, 255
Copo de nieve, 61
Corazón de la manzana, el, 61
Correlación proyectiva, 285
Correspondencia de puntos en rayos paralelos, la, 304
Correspondencia, *véase* Transformación
Cosenos directores, 158
cosh, 148, 154
COTES, R., 174
COURANT, R., 46, 107, 153
COURT, N. A., 31, 32, 35, 40, 46, 97, 98, 99, 118
COX, Homersham, 296-300
CRAMER, G., 371
Cristales, clases de, 316-318
Cristalografía, 77-89, 260-264, 316-319 373-376, 461
CROWE, D. W., 334
Cuadrados latinos, 270
Cuadrángulo, 47, 85-86
véase también Cuadrángulo completo, Cuadrángulo ortocéntrico, Polígono simple.
Cuadrángulo completo, 42, 266
Cuadrángulo ortocéntrico, 42
Cuádrica, 160, 297-300, 382
Cuádrica reglada, 161, 297-298
Cuádricas confocales, 382, 406-407
Cuadrilátero completo, 267
véase también Cuadrángulo completo.
Cuarto de giro, 56, 169, 195-196
Cuaternios, 165, 272
Cubo (4, 3), 26, 179-182
Cubo romo, 314
Cuerpos platónicos, los, 26, 179-194, 301-311, 447, 461
CURRY, H. M., 53, 196
Curva del seno, 76, 363
Curva equidistante, 340
Curvas equidistantes coaxiales, 340
Curvas paralelas, 356
Curvas paramétricas de una superficie, 386
Curvatura, 38, 354, 362
véase también Centro, Círculo, Curvatura normal, Curvaturas principales
Curvatura integral de un triángulo geodésico, 417
Curvatura media, 396-400
Curvatura normal de una superficie, 387, 393
Curvaturas principales, 395-396, 401-403
Curvatura total, *véase* Curvatura Gaussiana

"D"

Dado icosaédrico egipcio, 180
DANDELIN, G. P., 297
DANESE, A. E., 199
DARBOUX, G., 361, 364-366, 404
DARWIN, C., 453
DAVENPORT, H., 376
DAVIS, R. F., 47
Decagrama (10, 3), 63
DEDEKIND, R., 220, 235, 236
Defecto angular, 337-339
Deformación, 237, 242
DEHN, M., 212
DE LA VALLÉE POUSSIN, *Véase* La Vallée Poussin
Deltoide, 145
DE MOIVRE, A., 171
DE MORGAN, A., 437
DEMPSTER, A. P., 376
DENK, F., 66
Densidad de un paquete, la, 452-458
Densidad de un polígono, la, 62, 64
Derivada de un vector la, 352
DESARGUES, G., 122, 226, 265, 275-276
DESCARTES, R., 5, 138, 155, 185, 470
DE SITTER, W., 339
Desplazamiento, 137
véase también Isometría directa

Desplazamiento de tornillo, *véase* Torcedura
Desplazamiento paralelo, 307
Diámetro de un horociclo, 340
Diedro {p, 2}, 321, 433
Difracción por rayos X, 373.
Digono {2}, 63
Dilatación, 96, 107, 131, 140-141, 166, 228-237, 446
Dilatación central, 228
Dios, 68, 105, 195, 257
Dipirámide, 181, 319
Direcciones principales, 395, 399, 402
Directriz, 146
DIRICHLET, G. L., 81, 376
Disco, 431
Disección 183
Diseños, 74-92
Diseños a franjas, 74-76, 192-193
Diseños de Frieze, 74-76
Disposición de hojas, 200-203
Distancia, 255
Distancia inversiva, 5, 119, 344, 500
División áurea, 191-203
DJORDJEVIC, R. Z., 468
DNA, 316
Dodecaedro regular {5, 3}, 26, 180-182, 450, 457
Dodecaedro rómbico, 375, 455
Dodecaedro, *véase* Dodecaedro regular, Dodecaedro rómbico
Dodecagrama (12/5), 63
DODGSON, C. L., 28, 335, 433
véase también Carroll
Dominó, fichas de, 88
DONCHIAN, P. S., 449, 450
DONKIN, W. F., 307, 339
DORRIE, H., 246-247
D-stix Pre-engineering Kit, 460
Dualidad proyectiva, 267-269, 293
topología, 432
véase también Poliedros recíprocos
DUDENEY, H. E., 52
DUPIN, C., 404-409
DURERO, A., 265

"E"

Ecuación de un círculo, la, 69, 140, 143
de una cónica, 146-149
de una recta, 138
Ecuación homogénea, 159
Ecuación lineal, 128, 237, 254, 271
Edificio de la Bolsa de Valores de Copenhague, 367
EDMONDS, J. R., 435-436
Efesios, 444
EINSTEIN, A., 208, 339
Eje conjugado de una hipérbola, el, 147
Eje radical, 114
Ejes de una cónica, los, 147
Eje transversal de una hipérbola, 147
Elación *véase* Homología
Elemento de arco, 151
Elementos de Euclides, los, 25, 207
Elementos ideales, 111, 122
Elementos, los cuatro, 26
Elipse, 123, 146, 148
Enantiomorfismo, 315-318
Eneágono (9), 48, 53
ENOCH, 68
Enrejado, 78-93, 200, 234, 236, 243-247, 260-263, 373-379
Entero, 166
Envolvente, 290, 355
Epicicloide, 144
Equiafinidad, 5, 241-243, 260, 489
ERDÖS, P. 31, 93, 247, 467
Erlangen, programa, 95, 225, 237, 426
Escarabajos, 87
ESCHER, M. C., 84-87, 91
Esfera, 120-121, 133, 186, 343
véase también Apolonio, Esfera circunscrita, Esfera Inscrita, Esfera media
Esfera circunscrita, 188, 311, 313
Esfera inscrita, 186
Esfera media, 186, 455
Esferoide, 161
Espacio, 218
Espacio inversivo, 121
Espacio-tiempo, 239
Espejo, 28, 54, 319
Espiral, 155-157, 200, 203
véase también Espiral equiangular
Espiral áurea, 195-196
Espiral equiangular, 155-157, 172, 196, 356
Espiral logarítmica, 155
Espíritu, 293, 444
Espuma, 457-460
ESQUILO, 32
Estática, 248-260, 358
ESTOBAECIO, 25
EUCLIDES DE ALEJANDRÍA, 25, 137, 146, 185, 207, 208, 226, 237, 265, 301-302
EUDOXIO, 236
EULER, L., 40, 127, 165, 170-173, 183-185, 207, 225
EUSTACE, R., 318
Evoluta, 153, 355
Exágono, 81, 107, 266
Excentricidad, 146
Exceso esférico, 124

Extremo de una recta, el, 304
Extremos, 43-45

"F"

FAGNANO, J. F. T. di, 43-45, 209, 302, 499
FANO, G., 267-275
FAREY, J., 213-216
FEDOROW, E. S., 77, 318
FEJÉR, L., 18
FEJES TÓTH, L., 315, 443, 453, 456, 467
Fenilcetonuria, 317
FERMAT, P., 45, 51, 138, 302
Figuras directamente congruentes, 65
Figuras directamente semejantes, 101
Figuras homotéticas, 96, 232
Figuras opuestamente congruentes, 65
Figuras opuestamente semejantes, 100
Figura vertical, 61, 90, 187, 445
Filotaxis 200-203
FINN, Huckleberry, 440
Foco, 146
FORDER, H. G., 102, 115, 153, 209, 211-221, 228, 238, 257-259, 293, 300-303, 347, 362, 385, 395, 396, 405, 468
FORD, L. R., 120, 176-177
Forma bilineal, 288, 371
Forma cuadrática, 149
Forma cuadrática definida, 149
Forma cuadrática indefinida, 149
Forma cuadrática positiva y definida, 149
Formas cuadráticas binarias, 149
Formas unidimensionales, 279
Forma ternaria cuadrática, 379
Fórmula de Euler de curvatura normal, 408
Fórmula de Euler de $V - E + F$, 183-186, 446
Fortunato, su bolsa 14, 31 2, 433
FOSS, V. W., 251
Fracción continua, 176
Fracciones, 167, 234, 245
FRANKLIN, P., 441
FRENET, F., 362
FREUDENTHAL, H., 183
FRICKE, R., 77
FRUCHT, R., 435
Funciones hiperbólicas, 148, 152

"G"

GALLAI, T., 93
GALLUCCI, G., 295
GALOIS, E., 175
GARDNER, M., 162, 183, 458
GAUSS, C. F., 51, 53, 80, 165, [illegible] 220, 222, 301-304, 307-343, [illegible] 420, 490
Generadores de un grupo, 57
de una superficie reglada, 161
Género de una superficie, el, 427
Génesis, 68, 207
Geodésica, 411-423
Geometría absoluta, 207, 301-325
Geometría afín, 207, 225-266
Geometría analítica, 137-164, 168-171, 236-63, 271, 276
Geometría conforme, 112, 121
Geometría de cuatro dimensiones, 443-452.
Geometría diferencial, 347-423
Geometría elíptica, 123-124, 420, 432
Geometría hiperbólica, 301-343, 420-423
Geometría intrínseca de una superficie, 490
Geometría no euclidiana, 123, 266, 301-343, 420-423
Geometría proyectiva, 122-123, 265, 300, 329
Geometrías proyectivas finitas, 5, 269-274, 279, 292, 299
GERGONNE, J. D., 99, 285
GIBBS, J. W., 347
GIRARD, A., 124
Girasol, 200, 203
GÖDEL, K., 328
GOETHE, J. W., 200
GOSSET, T. m 450
GOULD, S. H., 274, 299, 426
Grado de una gráfica, *véase* Valencia
Gráfica cúbica, *véase* Gráfica trivalente
Gráfica de Thomsen, 428, 431
Gráfica (o complejo unidimensional), 428, 435
Gráfica planar, 428
Gráfica trivalente, 428
GRASSMANN, H., 347
GRAUSTEIN, W. C., 123
GRAVES, J. T., 494
GREITZER, S. L., 32, 477
GROSSMAN, H. D., 47
GRÜNWALD, T., *véase* Gallai
Grupo, 56, 228, 236
Grupo abstracto, 57, 75
Grupo alternante, A_n, 309
Grupo cíclico C_n, 56, 308
Grupo de simetría, 56, 82-92
Grupo Diedral D_n, 57, 309
Grupo discreto, 322
Grupo fundamental de una superficie, 428

Grupo icosaedral A_5, 312
Grupo Octaedral S_4, 310
Grupo Poliedral, 309-315
Grupo de puntos, 316
Grupos espaciales, 317
Grupo simétrico S_n, 309
Grupo tetraedral A_5, 309-311
GUDERMANN, C., 359
GUTHRIE, F., 437

"H"

HALES, S., 457
HARDY G. H., 32, 43, 73, 79, 88, 89, 93, 167, 169, 170, 174, 243-245, 261
HAROS, C., 247
HART, H., 111
HARTLEY, M. C., 449
Haz de círculos, 113-118, 144
de rectas, 279, 293, 304, 340
Haz intersecante de círculos coaxiales, 113
Haz no intersecante de círculos coaxiales, 115
Haz tangente de círculos coaxiales, 114
HEASLET, M. A., 263
HEATH, T. L., 25, 183
HEAWOOD, P. J., 5, 425, 435-442
Hélice circular, 201, 363-365, 460
general, 365-367, 416
Helicoide, 363, 402
HELMHOLTZ, H. von, 51
Hermathena, 105
HERMES, J., 52
HERON DE ALEJANDRÍA, 35
HESSE, L. O., 288
HESSENBERG, G. 275, 370
Hexagramme mystique, 298
Hexlet, 121
HILBERT, D., 81, 82, 111, 131, 179, 183, 208, 270, 273, 301, 333, 399, 406, 409, 414, 429, 453-456
HILTON, H., 318
Hipérbola, 146, 149, 155
véase también Hipérbola rectangular
Hipérbola rectangular, 148, 149, 154
Hiperbolas conjugadas, 407
Hiperboloide, 160, 164
Hipercubo {4, 3, 3}, 445, 462
Hiperespacio, 217-219
Hiperplano, 219
Hipocicloide, 144
HJELMSLEV, J. T., 73-74, 233, 307
HOBSON, E. W., 154
HOFMANN, J. E., 44, 65
Homografía, 176
Homología, 284, 288
Homología armónica, 285, 330
Homo sapiens, 316
Homotecia, *véase* Dilatación
Horociclo, 340
Horociclos concéntricos, 340, 423
Horoesfera, 344
Hosoedro (2, p), 434
Huerta, 78

"I"

I, *véase* Inversión central
Icosaedro {3, 5}, 26, 180-182, 193-194 480
Identidad, la, 54
Imagen reflejada, 29
Incentro, 34, 303
Incidencia, 266
Indicatriz de Dupin, 406-409
Indice de un subgrupo 233
INFELD, L., 174, 248
Infinito 111, 122, 146
Inradio, 35, 186-188
Interés compuesto, 157
Intervalo, 210
Invariante, 54, 97
Inversión central, 127, 316
en un círculo 105-120, 141, 172, 175, 322-325
en una esfera, 119-122, 133
Inversión rotatoria (o Reflexión rotatoria), 128
Inverso, 54, 106
Involución, 281-284
Involución de Möbius, 120, 177
Involución hiperbólica, 283
Involuta, 356
Isometría, 54-65-92, 125-130, 140, 307-316, 461
Isometría, 54, 65, 92, 125-130, 140, 307
Isometría opuesta, 65

"J"

JACOB, C. G. J., 381
JAMES, R. C., 432
JONES, O., 86
JANIC, R. R., 467
JEFFREYS, H., 369, 383
JOHNSON, R., 39, 103, 121
JORDAN, C., 77, 318
Juego, 165

"K"

Kaleidoscopio, 61, 318-324
KANAGASABAPATHY, P., 52

KARAMATA, J., 93
KASNER, E., 173
KÄSTNER, A. G., 93-94, 214
KELLY, L. M., 93-94, 214
KELVIN, Lord, 130, 452
KEMPE, A. B., 437
KEPLER, J., 63, 89, 122, 145, 189, 191, 197, 265, 446, 456
KERÉKJÁRTÓ, B., 301,
KITROSSER, I., 453
KLEIN, F., 40, 77, 95, 169, 225, 237, 301, 314, 329-330, 442, 426, 437
KRASNODEBSKI, R., 482
KREYSZIG, E., 347, 361, 370, 389, 398
KRONECKER, L., 369, 383

"L"

LACHLAN, R., 102, 104
LAGRANGE, J. L., 350, 398, 399
LAGRANGE, R. 133
LAMB, H., 111, 127, 145, 153, 307, 339, 356-360
LAMBERT, J. H., 339
Latitud, 386;
Latus rectum, 146
LA VALLÉE POUSSIN, C. J. de 405-406
LEFSCHETZ, S., 422
LEGARÉ, J. M., 58
LEHMUS, G. L., 32, 468
LEIBNIZ, G. W., 138, 219, 256
Lemniscata, 144, 149
Lente, 311, 312
LEONARDO DA VINCI, 61, 181, 193 195, 265
LEONARDO DE PISA, o FIBONACCI, 196-197
LEVI, F. W., 183
Ley asociativa, 59
Ley conmutativa, 273, 307
Ley distributiva, 348-350
LIEBMANN, H., 335
LIE, S., 284
Límite, 74, 220
LINDSAY, J. H. Jr., 338, 428
LIOUVILLE, J., 406, 412, 422
Líquido, 458-459
LITTLEWOOD, J. E., 32, 146
LOBACHEVSKY, N. I., 220, 301-303, 331, 339, 344, 422
LOCKWOOD, E. H., 361
Logaritmo, 146, 357
Longitud de un arco, la, 149-151
de un segmento, 236, 302, 348
LONGUET-HIGGINS, M. S., 63
Lorentz, transformación de, 241
Loxodromia, 157
LUCAS, E., 197, 199
Lúnula, 124
LÜTKEMAYER, G. 422
LUXEMBURG, W. A. J., 46

"M"

MACBEATH, A. M., 80
MACDUFFEE, C. C., 165
MACLANE, S., 170, 171-231, 272, 347, 371
MACLAURIN, C., 291, 407, 415
Magnitudes fundamentales, de primer orden, 387
de segundo orden, 393
MAGNUS, L. J., 106
Mapa, 418, 429-442
Mapas duales, 425, 432
Mapas no reflexibles, 435
Mapas reflexibles, 431
Mapas regulares, 432-346
Máquina del tiempo, la, 146
MARVIN, J. W., 457
MASCHERONI, L., 107
Matemáticas griegas, 32, 137, 145, 225, 301
Matemáticas orientales, 32
Matricial, notación (del teorema de Papo), 268
Matriz ortogonal, 381
Matriz simétrica, 288
MATZKE, E. B., 457, 460
McBRIDE, J. A., 168
Mediación, 27, 208, 304
Mediana, 33
MEIJERING, J. L., 460
MENAECMO, 146
MENDELSOHN, N. S., 118 177
MENELAO DE ALEJANDRÍA, 225, 255
Meridianos, 386
MERSENNE, M., 155
MILLER, J. C. P., 63
MINKOWSKI, H., 208, 339
MINOS, 28
Mitad de un plano, la, 215
MITRINOVIC, D. S., 467
MÖBIUS, A. F. 120 177, 252, 256, 296, 319, 436
Modelos conformes de la geometría hiperbólica, 329-330, 342-344
Modelos de la geometría hiperbólica, 329-331, 334, 342-344, 422-423
de poliedros, 183-182, 319, 449, 460
Módulo de un número complejo, 171
MOHR, G. 107
MONGE, G., 161, 386, 407, 413
Monógono (1), 435
MOORE, R. L., 302

MORDELL, L. J., 52, 439, 467
MORE, H., 444
MORLEY, C., 46, 107
MORLEY, F., 46, 145
Mosaico, 79
véase también Mosaico regular
Mosaico esférico, 320
Mosaico regular, 89-92
MOSELEY, H. 203, 356
MOSER, W. O. J., 57, 78, 82, 94, 325, 427-435
MOTZKIN, T., 93
Movimiento, 54, 65, 155
MOZZI, G., 361
Multiplicación, 166, 169

"N"

NAPOLEÓN, 46
NARANIENGAR, M. T., 47
Nefroide, 144
NEVILLE, E. H., 98, 262
NEWMAN, J., 173
NEWMAN, M. H. A., 140, 225
NEWTON, Sir Isaac, 54 138, 145, 149, 174, 195
NIGGLI, P., 78
Nivel, curvas y superficie de, 380;
Normal, 153, 354, 381, 392
véase también Binormal, Normal principal
Normal principal, 362;
No secante, 289
Nueve puntos, centro de los, 99
círculo de los, 41, 111, 144
Número algebraico, 168
Número complejo conjugado, 172
Número cuadrático, 168
Número irracional, 26, 167, 234
Número racional, 165-167
Números complejos, 165-177
Números primos de Fermat, 51-53
Números de Fibonacci, 191, 196-203
Número trascendente, 168

"O"

Octaedro {3, 4}, 26, 180-182
Octaedro trunco, 375
Octágono, 247, 473
Octagrama {8/3}, 63
Operación de simetría, 55, 73
OPPENHEIM, A., 32
Orbita, 489
Ordenada, 139
Orden de un grupo, 57
serial, 208-215, 229
Origen, 138
Ortocentro, 40
Ortoesquema, 186-187, 316
OSTROWSKI, A., 355

"P"

PACIOLI, L., (o Paciuolo), 181, 189-193
Panal cúbico (4, 3, 4), 446, 453, 462
Pantógrafo, 97
PAPO DE ALEJANDRÍA, 28, 65, 265-280
Paquete cúbico repleto, 455-459
Paquete exagonal repleto, 456
Paquete fortuito de esferas, 458
Paquete repleto de esferas, 453-460
Parábola, 146, 148, 359
Paraboloide elíptico, 160
Paraboloide hiperbólico, 160, 402
Paraboloide, *véase* Elíptico, Hiperbólico
Paralela común, 332
Paralelas de latitud, 386
Paralelepípedo, 157, 158, 258, 349
Paralelogramo, 46, 227
Paralelogramo reducido, 80
Parámetro, 139, 148, 157, 292, 386
PASCAL, B., 260, 291-292, 298
PASCH M., 208-214, 293, 301
Pastel y cubierta, 64
Patente de la cinta de Mobius, la, 428, 430
PLANO, G., 208
PEAUCELLIER, A., 111
PEDOE, E., 41, 42, 107, 143, 274, 329
Pentágono (5), 51-53, 191-194
Pentagrama (5/2), 63
Permutación impar, 308
Permutación par, 308
Perpendicular común, 333
Perspectiva, 279
PETERSON, J., 479
PETRIE, J. F., 321, 460
PHILLIP, W. E., 47
ir, 64, 80, 167-168, 302
PICK, G., 243-244
PIERCE, B., 173
PIERI, M., 265
PIERO DELLA FRANCESCA, 193
Piña, 200-202
Pirámide, 26, 179-180, 319
PITÁGORAS, 30, 101, 168, 191, 416
Plano, 157, 212
PIERO DELLA FRANCESCA, 193
Plano inversivo, 112
Planolandia, 444

Plano no desarguesiano, 270
Plano normal de una curva torcida, 362
Plano osculatorio de una curva torcida, 362
Planos paralelos, 258
Plano proyectivo, 429
Plano racional, 262-373
Plano tangente de una superficie, 387
PLATÓN, 183, 225
POINCARÉ, H., 328
Polar, 160, 285
Polaridad, 285-289
véase también Polaridad Absoluta
Polaridad absoluta, 299
Polaridad elíptica, 289
Polaridad hiperbólica, 289
Poliedro, 179, 185
véase también Poliedro regular
Poliedro compuesto, 189
Poliedro regular, 26, 179-190
Poliedros recíprocos, 189-190
Polígono, 39, 51-64, 124, 242-243, 339, 491
Polígono focal, 489
Polígono regular, $\{_m\}$, 51, 242-243, 490-491
Polígono simple, 244
Polígonos de estrella, 62-64, 91
Polígonos equivalentes, 238
Politopo, 443-452
Politopo de 16 celdas {3, 3, 4}, 447, 449, 462
Politopo de 24 celdas {3, 9, 3}, 449, 462
Politopo de 600 celdas {3, 3, 5}, 11, 449, 452, 460, 462
Politopo regular 443-452
Politopo regular de 120 celdas {5, 3, 3}, 449-451, 462
Politopos recíprocos, 449
Polo, 285-313
PÓLYA, G., 77, 245
PONCELET, J. V., 265
Pons asinorum, 28, 65, 302
Postulados de Euclides, 26
Potencia de un punto, 109
POUSSIN, *véase* La Vallée Poussin
Primer plano racional, 263
Prisma, 179-180, 319, 320
Problema de la escala, el, 174
Problema de los cuatro colores, el, 436-437
Problema de los ocho colores, 41, 442
PROCLO, 26
Producto, 54, 348
Producto directo de grupos, 76
Producto escalar, *véase* Producto interior de vectores
Producto exterior de vectores, 348
Producto interior de vectores, 348
Producto vectorial, *véase* Producto exterior de vectores
Proyección, 348
véase también central, ortogonal, estereográfica
Proyección central, 122, 124
Proyecicón estereográfica, 321-324, 330
Proyección ortogonal, 330, 365, 445
Proyectividad, 279
Proyectividad elíptica, 281
Proyectividad hiperbólica, 281
Proyectividad parabólica, 281, 284
PTOLOMEO, Claudio, 52
Punto de acumulación, 132, 322
de contacto, 289
Punto de Fermat, 46
Punto en el infinito, 111, 304;
Punto medio, 140, 231
Punto parabólico de una superficie, 397
Puntos autoconjugados, 285, 289
Puntos colineales, 93, 210
Puntos conjugados, 285
Puntos diagonales, 42
Puntos limítrofes de un haz no intersecante de círculos coaxiales, 115
Punto unitario, 271
Punto V completo, 436
Punto visible de la celosía, el, 262

"Q"

Quintaesencia, 180
Quinto postulado, 27-28, 301, 328, 344

"R"

RADEMACHER, H., 43, 184-185
Radio de curvatura, 357
Radios de un polígono, 61
de un poliedro, 186-188
RAINICH, G. Y., 350
Rayo AB, 210
Rayo, OB, 211
Razón de amplificación, 100
Rayos paralelos, 220
Razón extrema y media, 191;
Recta de Euler, 40, 41, 43, 149
Recta de Simson, 39, 145
Recta en el infinito, 122, 265
Recta inicial, 140
Rectángulo áureo, 193-195
Recta pedal *véase* Recta de Simon
Rectas autoconjugadas, 285, 289
Rectas conjugadas, 285

Rectas de curvatura de una superficie, 395
Rectas oblicuas, 130
Rectas paralelas, 95, 122, 222, 303-306 327-343
Rectas ultraparalelas, 307;
Red de un poliedro, 180
de curvas en una superficie, 389
véase también Red ortogonal
Red ortogonal de curvas en una superficie, 391
RIEVE, J. E., 243
Reflexión 29, 54, 126-132, 335
Reflexión afín, 237, 242-243, 260
Reflexión dilatativa, 100-104, 141, 177
Reflexión en deslizamiento, 69, 128, 140, 175
Región angular, 216
Región de Dirichlet, 81-83, 200-201
Región fundamental, 79, 86, 320-324
Región, *véase* Convexidad
Regla de paralelas, 488
Régulo, 297
Relatividad, 208-340
Renacimiento, 274
Representación esférica de una superficie, 395, 398, 419
Representación isométrica, 343
Restrición cristalográfica, 88-89, 491
Retícula de triángulos, 91, 320-324
REYNOLDS, O., 452, 458
RICCI, G., 360
RICHELOT, F. J., 52
RICHMOND, H. W., 52, 296, 490
RIEMANN, B., 266
RIESZ, M., 64
RINGEL, G., 5, 441-442
ROBBINS, H., 46, 107
ROBINSON, G., de B., 165, 167, 271, 280, 292
ROBINSON, R., M. 315
ROBSON, A., 144, 153
RODRIGUES, O., 400-403
ROGERS C., A. 457
ROLLETT, A. P., 53, 196
Romboedro, 181, 375
Rotación, 55, 125-131, 142, 307-315, 341
Rotación dilatativa, 100-104, 131-133, 141, 155, 163, 169, 175, 195-196, 357, 366-367
Rotación hiperbólica, 241
Rotación parabólica, 242
ROUSE BALL, *véase* Ball
ROUTH, E. J., 246, 254-255
Rueda, 361
Ruletas, 144
Ruptura, 237, 242
RUSSELL, Bertrand, 21, 208, 209, 219
RUSSELL, H. N., 207

"S"

SALMON, G., 160, 255, 408
SATYANARAYANA M., 47
SAWYER, Tom, 440
SAYERS, Dorothy, L., 318
SCHEINER, C., 97
SCHLÄFLI, L., 63, 89 181, 187, 215-219 425, 443, 446
SCHLEGEL, V., 182-183, 418
SCHMIDT, H., 162
SCHÖNFLIES, Arm. 316-319
SCHUMACHER, H. K., 229
SCHÜTTE, K., 315
SCOTT, G. D., 453
Secante, 150, 289
Sector de una hipérbola, el, 152
Segmento de recta, 208, 209
Semejanza, 100, 117
véase también, Semejanza directa, Semejanza opuesta, Semejanza de espiral
Semejanza de espiral, *véase* Rotación dilatativa
Semejanza directa, 100-102
Semejanza inversa, *véase* Semejanza opuesta
Semejanza opuesta, 101-104
Semigiro, 55, 127, 230
senh, 148, 154
Sentido, 65-67, 74, 100-104, 110, 125-132
Separación, 217
Serie, 199
Serie exponencial, 173
SERRET, J. A., 362
Pseudoesfera, 422-423
SEYDEWITZ, F., 290, 293, 298
SHARP, A., 179
Signos de coordenadas, 138, 256
Silla de montar de mono, 409
Símbolo alternante, 382;
Símbolo de Schäfli de una colmena, 446, 459
de un mapa, 432
de un mosaico, 89
de un poliedro, 181
de un poliedro, 181
Simetría bilateral, 28
Similitud, 98
Simplejo, 219
Simplejo regular (3, 3, 3), 444, 462
SIMSON, R., 39, 197, 199

istema categórico, 327, 330
istemas ortogonales de superficies, 404
SITTER, W. DE, 339
ITH, C. S., 460
ITH, D. E., 51
ODY, F., 38, 99, 116, 121, 354
INCKE, L., 77, 318
MMERVILLE, D. M. Y., 303, 321, 329, 340-342
EISER, A., 75
AUDT, K. G. C. von, 5, 181, 265, 273, 289-291
INBERG, R., 95
EFINER, J. 32, 44, 115-116, 145, 468
STEINHAUS, H., 155, 180, 189, 213, 216, 259, 364, 375, 455, 456
Stella octangula, 189
STEWART, B. M. 39
STRUIK, D. J., 353, 409-414
STRUIK, Sra. de, 260
Svástica, 55-57
Subgrupo, 60
véase también Subgrupo normal
Subgrupo normal, 233
Superficie, 159
de revolución, 161, 416
topológica, 425-442
ficie acotada, 429
anticlástico (con forma de silla montar), 397
cuádrica, 297-300, 382
desarrollable, 397
una cara, 428
distante, 344
orientable, 428
orientable, 428
cie relacionada simplemente, 418
e sinclásica, 397
es paralelas, 404
cie universal de cubierta, 427
perposición, 27
STER, J. J., 93, 213, 270
, J. L. 26, 105, 111, 145, 157, 165, 68, 195, 233, 257, 306, 437
z, P., 7, 300
ELEW, Wanda, 329

"T"

P. G., 130, 436
nte, 29, 150, 289, 379
ntes inflexionales de una superfi- 397
to, 25
o de Bahai, el, 61
Tensor, 370, 394
Teorema de los seis colores, 438-
Teorema de los tres colores, 436
Teorema de Papo, 267-270
Teorema fundamental del álgebra, de la geometría proyectiva, 281
Teoría electromagnética de la luz
Tetraedro, 180, 218
véase también Tetraedro caracte Tetraedro regular
Tetraedro característico $O_1O_2O_3O_4$, s
Tetraedro Cuadirrectangular, 186-1
Tetraedro en perspectiva, 297-299
Tetraedro regular (3, 3), 26, 180-182
Theorema egregium, 411-413
THOMPSON, Sir D'Arcy W., 133, 155
THOMSEN, G., 22, 232
THOMSON, W., *véase* Kelvin
TIETZE, H., 440
TITCHMARSH, E. C., 47, 168
TOEPLITZ, O., 42, 184-185
Topología, 65, 266, 418-419, 425-442
Topología combinatoria, 425-442
Torcedura, 125, 128-133, 163, 361-366
Tornillo, 126
Toro, 162-163, 399, 419
Torsión, 362
Tractriz, 359-361
Transformación, 54, 233
Transformación conforme, 175-177, 237
Transofrmación congruente, *véase* Isometría
Transformación de coordenadas, 141-149, 253-254
Transformación lineal fraccionaria, 176
Transformación marina, 331
Transformación que preserva al círculo, 119, 176, 330
Transformación que preserva la esfera, 133, 405
Transposición, 308
Translación, 54, 68, 71, 126-130, 229-238, 306, 341
Trayectorias ortogonales, 391
Triángulo, 210
de referencia, 252, 271
véase también Triángulo equilátero, Triángulo isósceles
Triángulo asintótico, 305, 331-336
véase también Triángulo doblemente asintótico, Triángulo triplemente asintótico.
Triángulo autopolar, 282
Triángulo duplicadamente asintótico, 334-339
Triángulo equilátero, (3), 45-46
Triángulo esférico, 124

Triángulo isósceles, 28, 39
Triángulo óptico, 41
Triángulo pedal, *véase* Triángulo óptico
Triángulo rectángulo, 39
Triángulos en perspectiva, 274
Triángulo triplicadamente asintótico, 334-339
Triedro ortogonal de vectores unitarios, 351
Trigonometría, 34-39, 141, 421
Trisección de un ángulo, 47, 53
de los lados de un triángulo 246
Truco del arroz, el, 458
Truncamiento, 310
TUCKER, A. W., 163, 431
TURING, A. M., 203
Turritella duplicata, 366
TWAIN, Mark, 440-441

"U"

Umbilical, 395, 402-403
Unidad de área, 339
de distancia, 420
USPENSKY, J. V., 263

"V"

Valencia de una gráfica, la, 428
VALLÉE, L. L., 362
VANDEGHEN, A., 99
VARIGNON, P., 233, 251
VASIC, P. M., 467
VEBLEN, O., 65, 129-130, 211, 216, 219, 230, 233, 238, 241, 269
Vector, 168, 247-250, 258-262, 347
VELDKAMP, G. R., 31, 99
Velocidad, 353
Volumen, 262
VON STAUDT, *véase* Staudt
VORONOI, G., 81 375

"W"

WACHTER, F. L., 344
WAERDEN, B. L. van der, 35, 315
WALFISZ, A., 158
WALLACE, W., 39
WALLIS, J., 165
WEATHERBURN, C. E. 363, 382, 405, 413-417
WEIERSTRASS, K., 220
WEINGARTEN, J., 394, 397, 400
WELCH, J. J., 251
WELLS, H. G., 121, 123, 446
WESSEL, C., 165, 168
WEYL, H., 54, 56, 97, 125-126, 200, 24 301, 308, 317, 319, 366
WITTENBAUER, F., 251
WRIGHT, E. M. 79, 174, 243-245, 261
WYTHOFF, W. A., 199

"Y"

YAGLOM, I. M. 46, 116, 207, 265
YOUNG J. W., 270, 277, 283
YOUNGS, J. W. T., 7, 442

Esta obra se terminó de imprimir el día 15 de abril de 1971, en los talleres de Litho Offset Victoria, S. A., Geranio 284, México 4, D. F. La edición consta de 4,000 ejemplares, más sobrantes para reposición.

TL-85